مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١)

تاريخ الرياضيات العربية
بين الجبر والحساب

الدكتور رشدي راشد

تاريخ الرياضيات العربية

بين الجبر والحساب

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١)

تاريخ الرياضيات العربية

بين الجبر والحساب

الدكتور رشدي راشد

ترجمة : الدكتور حسين زين الدين

«الآراء الواردة في هذا الكتاب لا تعبّر بالضرورة
عن اتجاهات يتبناها مركز دراسات الوحدة العربية»

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «سادات تاور» ـ شارع ليون ـ ص . ب : ٦٠٠١ ـ ١١٣ بيروت ـ لبنان
تلفون: ٨٠١٥٨٢ ـ ٨٠١٥٨٧ ـ ٨٠٢٢٣٤ ـ برقياً: «مرعربي»
تلكس: ٢٣١١٤ مارابي

حقوق الطبع والنشر محفوظة للمركز

الطبعة الأولى

بيروت: نيسان/ابريل ١٩٨٩

المحتويات

تصدير ٧

مقدمة ٩

الفصل الأول: بدايات علم الجبر ١٧

أولاً : فكرة الجبر لدى الخوارزمي ١٩

ثانياً : الكرجي ٣٣

ثالثاً : بدايات الجبر في القرنين العاشر والحادي عشر ٤٧

رابعاً : الاستقراء الرياضي: الكَرَجي والسموأل ٧٤

الفصل الثاني: التحليل العددي ١٠٣

استخراج الجذر الميمي وابتكار الكسور العشرية في القرنين الحادي عشر والثاني عشر ١٠٥

الفصل الثالث: المعادلات العددية ١٧١

حل المعادلات العددية والجبر: شرف الدين الطوسي، ڤيت ١٧٣

الفصل الرابع: نظرية الأعداد والتحليل التوافيقي ٢٣٣

أولاً : التحليل الديوفنطسي في القرن العاشر: مثال الخازن ٢٣٥

ثانياً : ابن الهيثم ومبرهنة ويلسون ٢٦٨
ثالثاً : الجبر والألسنية : التحليل التوافيقي في العلوم العربية . . . ٢٨٤
رابعاً : الأعداد المتحابة وأجزاء القواسم التامة والأعداد
الشكلية في القرنين الثالث عشر والرابع عشر ٢٩٩

ملحق ٣٤٩
قائمة المصطلحات ٣٧٧
المراجع ٣٨١
فهرس ٣٩٥

تصدير

بدأ حديثاً بعض الاهتمام بالتراث العلمي العربي في البلدان المتقدمة وفي الوطن العربي نفسه. ففي البلدان المتقدمة ـ تلك التي تنتج وتستهلك العلم ـ إزدهر البحث في تاريخ العلوم وتدريسه في العقود الثلاثة الأخيرة لأسباب لن ندخل فيها هنا، نذكر منها فقط الاعتقاد بأهمية ما يمكن أن يقدمه تاريخ العلوم في التحديث العلمي والصناعي. وهكذا بدأت إعادة كتابة بعض فصول هذا التاريخ بما فيها الفصل الخاص بالعلم العربي، لا لذاته، ولكن لارتباطه الوثيق بالعلم اليوناني والعلم اللاتيني. ومن ثم فالاهتمام بالتراث العلمي العربي هو جزء يسير من اهتمام بتاريخ العلوم جملة ـ فعلينا إذاً ألّا نخطىء الفهم ـ فمكان العلم العربي في أذهان أكثر الدارسين له في هذه البلدان جزئي هامشي. وتختلف الصورة والأسباب في الوطن العربي، فإن كان قد نما فيه أيضاً الاهتمام بالتراث العلمي، إلّا أن هذا الاهتمام ـ لأسباب لن ندخل فيها كذلك ـ لم يترجم بعد إلى مشروع حضاري. فمجموع ما أخرج حقاً من أمهات التراث العلمي العربي طبقاً للمعايير العلمية الدقيقة في التحقيق والتفسير والتأريخ، وكذلك مجموع الدراسات الجادة التي تناولت فهم العلم العربي على أنه جزء من تاريخ العلم، تُعد على أصابع اليد الواحدة.

ولأهمية المعرفة بالتراث العلمي العربي لوضع مشكلة «التجديد والتراث» وضعها الصحيح، وللمساهمة في خلق العقلانية العلمية كقيمة حضارية لازمة للإجابة عن السؤال حول العطاء العلمي وحول توطين العلم في الوطن العربي، وللحث على خلق فكر أصيل في الفلسفة جملة وفي فلسفة العلوم خاصة، تبنى مركز دراسات الوحدة العربية فكرة إصدار هذه السلسلة التي عهد إليّ بالإشرف عليها.

وسننشر في هذه السلسلة بعض أمهات التراث العلمي، محققة وفقاً للمعايير

العلمية المعترف بها، وبعض الدراسات الجديّة لهذا التراث في حدود كتابين في السنة. كما سنعيد نشر بعض النصوص والدراسات التي أجمع الباحثون على رفيع مستواها. ولقد رأى المركز أن تبدأ السلسلة بترجمة كتابي هذا في تاريخ الرياضيات العربية، ليعقبه نشر **هيئة مؤيد الدين العرضي** بتحقيق الدكتور جورج صليبا، وهو من أهم ما أنتجته المدرسة العربية في الفلك وكذلك من أهم ما صدر قبل كتاب كوبرنيكوس.

ولا أملك إلا شكر د. حسين زين الدين الذي نقل الكتاب إلى العربية، وأخلص في هذا العمل مع صعوبته الجمة ولم يتوان أمام المشقة حتى تجاوزها.

ولا أملك كذلك إلا شكر د. خير الدين حسيب، مدير مركز دراسات الوحدة العربية، لتشجيعه وإصراره على الدفع بمشروع السلسلة إلى الأمام حتى تحقق، وبميدان تاريخ العلوم قدماً لسد فراغ مهم في المشروع الحضاري العربي.

رشدي راشد
باريس ١٩٨٩/٢/١

مُقَـــدّمَـــة

تبدو الرياضيات العربية كما تعرضها معظم بحوث تاريخ العلوم منذ بداية القرن التاسع عشر بمظهر مليء بالمفارقات، شأنها في ذلك شأن بقية العلوم المكتوبة بهذه اللغة. فعلى الرغم من كونها تبدو في هذه الأعمال باباً أساسياً من أبواب تاريخ الرياضيات الكلاسيكية إلاّ أنها لا تعدّها في واقع الأمر جزءاً منها. فإذا كان متعذراً على مؤرخ العلم الكلاسيكي تجنب مواجهة المؤلفات الرياضية العربية خلال بحوثه، أو رؤيتها متوثبة على مسرح التاريخ إما بذاتها أو من خلال ترجماتها اللاتينية أو العبرية، أو متخفية في ثنايا أعمال أولئك الذين كانوا على اطلاع على اللغة العلمية آنذاك، أي اللغة العربية، من أمثال ليونارد دوبيز (Léonard de Pise)، فإن قواعد إخراج هذه المسرحية فرضت حلاً لم يتغير منذ القرن التاسع عشر، يتمثل في دعوة هذه الرياضيات إلى التواري لتلحق في كواليس التاريخ بذوي الأدوار الثانوية الذين لا يتمايزون فيما بينهم إلاّ سلباً، وفي الدلالة عليها بعبارة مثقلة بالخيالات والأساطير ولا تستدعي أي تعليق: «الرياضيات غير الغربية».

قد يخيّل لنا أن مثل هذا النعت هو من بقايا تخرّصات سادت القرن التاسع عشر، وقد انطوى في وقتنا الحاضر، إلاّ أن الأمر ليس كذلك مطلقاً، إذ إنه لا يزال راسخاً في لغة كثير من المؤرخين المعاصرين. ولكن إذا قبلنا بهذه الايديولوجية التي تستدعي ما ذكرناه من تخيلات وأساطير والتي حللناها في ملحق لهذا الكتاب، فلن يكون للرياضيات العربية، وبالتالي لن يكون لغيرها من العلوم العربية حق الادعاء بأنها جزء من التاريخ.

صحيح أن هذه الايديولوجية تشكو من وهن ذاتي في مجال البحث التاريخي إلاّ أنه وهن غير بريء على كل حال. إلى هذا المظهر المليء بالمفارقات للرياضيات العربية تنضم صورة متناقضة بعض الشيء عنها. إن هذه الايديولوجية، ما خلا بعض الاستثناءات مثل أعمال المؤرخ البارز ويبك (Woepcke) في القرن الماضي، عرفت كيف توجه الاهتمام الذي يحرك البحث التاريخي بتقليص مداه من جهة، فأعطت أولوية مطلقة للمؤلفات اليونانية المترجمة إلى اللغة العربية ولكن غضت الطرف عن الأعمال الابداعية العربية من جهة أخرى. يشهد بذلك ندرة النصوص حولها وفقر الدراسات غير المنهجية التي خصصت لها خلال القرنين السابقين، الأمر الذي لم يكن ممكناً معه أن ينتج إلاّ معرفة مشوشة وغير متواصلة. وبالفعل، ليس من النادر مثلاً أن نرى في تاريخ للرياضيات العربية رياضياً عبقرياً من القرن العاشر يوازن بمعلّق عاثرٍ بلا موهبة من القرن الرابع عشر دون أن يعلل هذا الخلط بأي مبرر آخر سوى عدم توافر الوثائق. كذلك تبدو الرياضيات العربية في كثير من الدراسات التي لم تكن قليلة الجودة بمظهر مشوش، فثمة مكتشفات ومبرهنات وقضايا تأخذنا بعمقها وقابليتها على التعميم، نراها غارقة في خضم من النتائج الهزيلة المبعثرة. إنها حقاً لصورة متناقضة، ومع ذلك لا تثير المؤرخ الذي لا يهتم إلاّ بالنتائج وحدها دون التساؤل عن أهمية بواعثها.

فإذا كانت هذه المفارقة التي أجّجتها ايديولوجية معيّنة، وإذا كانت الصورة الباهتة والمتناقضة الناجمة عن بعض الممارسات لا تزالان قائمتين، فهذا عائد جزئياً على الأقل، إلى منهج المؤرخ الخاص وأسلوبه. وكما في العديد من حقول تاريخ العلوم بوجه عام تعطى الأهمية في غالبية الحالات لإعادة ترتيب تعاقب العلماء. ومن وجهة النظر هذه فإن مثل مؤرخ الرياضيات العربية كمثل غيره من المؤرخين العاملين في ميادين أخرى والذين يتلخص الترتيب التاريخي عندهم بالترتيب الزمني لتعاقب المؤلفين. ولئن لم يكن المجال هنا للدخول في جدل حول المنهجية، فلنكتفِ فقط بملاحظة أن ترتيباً كهذا مستنداً إلى معطيات تاريخية ناقصة هو محكوم بأن يكون جزئياً ومشكوكاً بأمره. وبالنسبة إلى الرياضيات العربية فإن مجموع المؤلفات المتراكمة خلال سبعة قرون على الأقل والمودعة في مئات الآلاف من المجلدات المبعثرة في جهات الأرض الأربع تصم مسبقاً بالسطحية المحضة كل محاولة غير منهجية ترمي إلى بناء تاريخها. فقد يحدث أن رياضيَّين تفصل بينهما عدة قرون يُعدّا متعاقبين بسبب الجهل

بمن أتى بينهما من الرياضيين. نفهم من ذلك إذن، بأن أي تاريخ عام هو مستحيل الآن، ولكن لو اقتصرنا على حدود بلدٍ ما أو قطرٍ ما، فعندها يصبح هذا التأريخ خادعاً لا صلة له بموضوعه الحقيقي.

ولئن أردنا أن نذكّر بملامح تاريخ الرياضيات العربية هذه فليس فقط لكي نزيح بعض المفاهيم التي يعرضها ويناقشها هذا الكتاب، وإنما أيضاً لوقاية القارىء من نزعة بدأت تظهر في السنوات الأخيرة، ذلك أن تاريخ الرياضيات العربية بدأ يثير حديثاً اهتماماً لم يسبق له مثيل وإنتاجاً ما انفك يتّسع. إلاّ أن هذا الحماس ليس مقتصراً على المؤرخين الأصيلين المدققين المهتمين حقاً بفهم تاريخ العلم الكلاسيكي وإنما هو أيضاً تعبير عن تيار يتلاقى عنده لأغراض سامية أو خسيسة كلّ من المدافعين وطالبي الشهرة. إن التشدد والدقة المنهجيين يستطيعان دون غيرهما حمايتنا بقدر الإمكان من مثل هذه المحاولات.

فكيف يمكننا التصرف ضمن هذه الشروط لنستجلي مع تعدد الأسماء والكتابات والوقائع المحاور الخفية التي تطورت وفقها عقلانية أو بالأحرى عقلانيات الرياضيات ذاتها؟ إن مثل هذا التساؤل النظري ضروري إذا أردنا أن نكشف الستر عن بنى فعاليّة رياضية دامت سبعة قرون على الأقل، وله بالإضافة إلى ذلك قيمة استكشافية. ذلك أن بإمكانه توجيه الباحث الذي يواجه عدداً هائلاً من النصوص إلى أولوية ما يجب تناوله. إننا باتباع مثل هذه الطريقة قد تمكّنا من جهتنا أن نعيد بناء بعض الوقائع التي ظلت طي التجاهل حتى الآن، وبخاصة بعض التيارات النظرية التي كانت حتى ذلك الحين طي حقل التجارب مما سمح لنا بالتعرف إلى البنى الأساسية للرياضيات العربية. فلنعد إذن إلى مبدأ هذه المنهجية المعروض بمزيد من التفصيل في صلب هذا الكتاب.

إن فهم الرياضيات الكلاسيكية وبخاصة تلك المكتوبة بالعربية هو قبل كل شيء تحديد موقعنا بين الجبر والحساب من جهة وبين الجبر والهندسة من جهة أخرى. إن هذا المنظور وحده هو الذي مكّننا في الواقع من وعي الدور الأساسي والجذريّ الجدّة للجبر في تكوين عقلانية الرياضيات. ولكن بفضل هذا الموقع أصبحنا أيضاً بوضعٍ يسمح لنا أن نتلمس حركة إعادة ترتيب هذه الأنظمة وبنائها أحدها بالآخر، أو بعبارة أخرى أن نرى جدلية تقوم بين الحساب والجبر وبين الهندسة والجبر.

ولكن، لنشر إلى أنه ليس في هذه الجدلية أيّ قبْلية بدليل أنها تكشّفت من خلال بحوثنا، وبالواقع لقد فرضت هذه الجدلية نفسها أمامنا تدريجياً كحركة استقرائية موجهة لتوسيع كلٍّ من هذه الأنظمة وذلك بإرساء قواعدها من جديد وذلك بتعميم مفاهيمها أو طرائقها ولو كلّف ذلك أحياناً نفي بعضها أو حذفه. إن البحوث المجتمعة هنا تلحّ على إثبات الحركة الأولى بين الحساب والجبر وعلى وصفها. أما الجدلية بين الجبر والهندسة التي نوّهنا بها استرسالاً في هذه النصوص فإن الدراسات التي تحلّلها ستكون موضوع كتاب آخر. ولكن لكي نحدّد منحى هذه الحركة وندرك مداها، فلقد اقتضانا ذلك توضيحاً لمدلولها أن نسترجع حدثاً وهو ظهور كتاب الخوارزمي في الجبر، ففي هذا المؤلَّف يبدو الجبر في الواقع لأول مرة في التاريخ نظاماً مستقلاً ومعروفاً بهذا الاسم.

إن هذا الكتاب الذي يرجع إلى بداية القرن التاسع، وعلى الرغم من كونه فقيراً من الناحية التقنية إذا ما قيس بالأعمال الإنشائية اليونانية الكبرى لا يمكن رده إلى الأعمال القديمة ولا حتى القديمة المتأخرة. ولهذا ترانا نحاول استخراج فكرة هذا النظام الجديدة ذاتها التي نراها متضمّنة فيه ومبشرة بتيار بحث لا بدّ آتٍ.

إن متابعة هذا العمل هي بالضبط ما أعطى لكتاب الخوارزمي هذا البعد التاريخي. إننا نعلم بما فيه الكفاية، رغم جهلنا لمعظم متقدمي الخوارزمي وبالتالي بمكوّنات البداية الأولى للجبر، بأن الجبر ينضوي في تقاليد الحساب غير اليونانية. هذه التقاليد التي نجدها في كتابين للخوارزمي ذاته لم يسلم منهما إلاّ كتاب واحد ولكن مترجماً إلى اللاتينية. ولكن مهما يكن من أمر فإن الرياضيين ما انفكوا منذ عهد الخوارزمي يستحوذون على هذا النظام الجديد ليطوّروا دون تأخير الحساب الجبري ونظرية المعادلات والتحليل السيّال، وذلك حتى قبل ترجمة حساب ديوفنطس. لنذكر على سبيل المثال لا الحصر الأسماء الشهيرة لابن ترك وأبي كامل وابن الفتح.

لكن الجبر الذي وُسّع وأغني بعد قرن ونصف القرن تقريباً من الخوارزمي غدا غرضاً لتجديد آخر هو في الحقيقة عود أصيل على بدء، وقد غدا ذلك ممكناً بفضل الحساب. وبالحقيقة إذا كان لكلمة حَسْبَنَة معنى غير مجازي فإنها أفضل ما يناسب للدلالة على مساهمة الكرجي ولاحقيه كالسهروردي والسموأل، فحسبنة تعني هنا نقل عمليات الحساب الأولية وخوارزمية القسمة الإقليدية أو استخراج الجذر وتمديد ذلك

إلى العبارات الجبرية وبخاصة إلى كثيرات الحدود. وبفضل حسبنة الجبر هذه تمكن الرياضيّون ما بين القرنين العاشر والثاني عشر من إنشاء جبر كثيرات الحدود والوصول إلى معرفة أفضل بالبنية الجبرية للأعداد الحقيقية. أو بعبارة أخرى، لنقل بأن هؤلاء الرياضيين عملوا بطريقة تجريبية للوصول إلى توسيعات جبرية منتهية لحقل الأعداد المنطّقة.

ومنذ ذلك الحين ونحن نرى كيف انتظم حول هذه العمليات وهذه الخوارزميات الحسابية بحث في الجبر اشتمل إضافة إلى ذلك على فصل في التحليل السيّال كجزء لا يتجزأ منه. إن هذا الفصل الذي نراه ماثلاً في المؤلفات الرياضية العربية قبل ترجمة حسابيات ديوفنطس بزمن بعيد قد وجد مكانه الحقيقي عندما ترجمت هذه إلى العربية وبخاصة عندما عُلِّلت جبريّاً بصورة لا تتفق حسب اعتقادنا مع الغاية التي أُريدت له منذ البداية.

إن كثيراً من البحوث المجموعة في هذا الكتاب تتسم بهذا «العود إلى بدء» بالنسبة إلى الجبر. وقد غدا ذلك ممكناً نتيجة لحركة الحسبنة التي نوهنا بها، أما البحوث الأخرى فقد خصصت لدراسة تأثيرات هذا الجبر الجديد في الحساب ونظرية الأعداد. فبعد أن حدّدنا موضع الكرجي وموقعه الذي ما انفك المؤرخون منذ وبيك يقدرونه عالياً رغم استمرارهم في تجاهل مشروعه الحقيقي، وبعد أن بيّنا بأنه مؤسس مدرسةٍ وتقليد وبأنه ليس حالة منعزلة، أو بعبارة أخرى بعد أن وصفنا هذا الجبر المجدد فقد غدا بمقدورنا بعدئذ أن نبيّن أن النتائج المعروفة سابقاً وكثيراً غيرها مما اكتشفناه، تنتظم وفق فصول لم تنشأ بل ولم تذكر أبداً حتى الآن.

أما كون هذه الفصول قابلة لأن تزداد غنى فهذا أمر لا يقبل الجدل، وأما إمكان إضافة متمِّم لها فهو غير مستبعد أيضاً. ولكننا ندّعي فقط أننا أنشأنا الفصول الرئيسية التي وفقها تترتب المنجزات الحسابية والجبرية للرياضيات العربية. ولكننا قبل عرضها أردنا أن نبيّن أثر هذا الجبر من حيث تقنيات البرهان: الاستقراء التام المنتهي كوسيلة للبرهان. ولقد تمايزت هذه الطريقة عن غيرها مما كان يستخدم آنذاك في الحساب والجبر وبخاصة في القرن العاشر. وفي دراستنا: الاستقراء الرياضي: الكرجي والسموأل وجدنا أنفسنا مقودين إلى جَدْلنة الطريقة الانكفائية في تاريخ العلوم لكي نستوعب بدقة أصالة طريقة الاستقراء التام المنتهي مفهوماً وتقنية.

فإذا عدنا الآن إلى الفصول المكوّنة لمجال الرياضيات هذا فإننا نجد:

١ ـ التحليل التوافيقي

لقد اعتبر هذا التحليل، حتى الآن نشاطاً خاصاً برياضيي عصر النهضة ومن أتى بعدهم، وهو يعود بالفعل كما بيّنا آنفاً إلى الرياضيين العرب وقد تمّ تكوينه كحساب على مرحلتين. فقد ظهر في البداية دون وحدةٍ تجمعه أي كحسابٍ خالص حيث أُبعدت خاصيته التوافيقية إلى المحل الثاني، خصوصاً بالنسبة إلى علماء الجبر الذين اعتبروه كـ «وسيلة حسابيّة» مساعدة في الجبر، ومن جهة أخرى كتطبيق توافيقي، أي دون أن تصاغ القضايا بصورة عامة أو بالأحرى دون أن تبرهن عند المعجميين واللغويين بشكل خاص. وفي مرحلة ثانية متأخرة تحققت الوحدة بفضل علماء نظريّة الأعداد بصورة أساسية، الذين اهتموا بدراسة الدالّة (التابع Fonction) : عدد قواسم عدد. وسوف نعرض المرحلة الأولى في التحليل التوافيقي في الرياضيات العربية ونعيد تأليف المرحلة الثانية في الأقسام التي تتناول: الأعداد المتحابّة، القواسم التامة، والأعداد الشكلية في القرنين الثالث عشر والرابع عشر.

٢ ـ التحليل العددي

إن الجبر الجديد المطبّق على الحساب التقليدي، سمح لنا بتأليف هذا الفصل حيث عممت طرائق البحث العددي: كاستخراج الجذر، والطرق المختلفة لتقريبه. وسنبيّن كيف أوصلنا ذلك إلى اختراع كسورٍ جديدة ووضع نظرية لها، وتمّ ذلك بالتحديد أثناء تعميمنا لطرق استخراج الجذر الميمي (Racine n^ième). راجع الكتاب: **استخراج الجذر الميمي واستنباط الكسور العشرية**.

٣ ـ حل المعادلات العددية

إن هذا الفصل الذي هو من ثمرات الجبر الجديد عرف أيضاً كيف يستفيد من سابقه وهو مدين جزئياً بتطوره إلى استحالة إعطاء حلٍّ جبريٍّ بواسطة الجذور للمعادلات التكعيبية في ذلك الوقت. والرياضيون الذين ساهموا في إعداد هذا القسم هم أنفسهم، كما سنرى، أولئك الذين ينتمون إلى الاتجاه الآخر أي الجبريين الهندسيين. وهكذا نرى أنه كانت ترتسم جانبياً وبشكل خفي مفاهيم غنيّة وعميقة وذات أهمية مستقبلية، إذ اتضحت فيما بعد أهمية بعضها الوظيفية والتحليلية(١).

---

(١) انظر: الطوسي وثيت، حل المعادلات العددية والجبر.

إن تطبيق الجبر على نظرية الأعداد الموروثة عن الرياضيات الهيلينستية قد سمح من جهة أخرى بتدشين النظرية التقليدية للأعداد التي احتفظت بالأسلوب نفسه حتى عام ١٦٤٠ على الأقل، وهكذا بإمكاننا أن نضيف إلى الفصول السابقة الفصلين التاليين:

٤ ـ التحليل الديوفنطسي الجديد

لا نعني هنا بالطبع التحليل الديوفنطسي التقليدي الذي يشكل كما ذكرنا جزءاً من الجبر بل نعني التحليل الديوفنطسي الخاص بالحلول في مجموعة الأعداد الصحيحة. لقد ولد هذا التحليل في القرن العاشر لخدمة الجبر لكن مضاد له في الوقت نفسه، فهو يهتم قبل كل شيء بالمثلثات القائمة الزاوية العددية ويمتد ليشمل معادلات ونظم معادلات ديوفنطسية أكثر صعوبة. من أهم النتائج كان نص تخمين فيرما (Fermat) في الحالة $n = 3$ الذي حاول عبثاً كثيرون إثباته(٢).

٥ ـ النظرية التقليدية للأعداد

نعرض أخيراً في بحثين متتالين،ابن الهيثم ومبرهنة ويلسون (Wilson) والأعداد المتحابة والقواسم التامة، والأعداد الشكلية في القرنين الثالث عشر والرابع عشر، المساهمات الجديدة في نظرية الأعداد مثل دراسة تمييز الأعداد الأوليّة والتوافقات الخطيّة والدوّال الحسابية، ولقد جهدنا بشكل خاص أن نستخلص أسلوب هذه النظرية.

لو تتبعنا هذه الجدلية القائمة بين الجبر والحساب فإننا نرى كيف تتجلى البنى الرئيسية لهذين العلمين، ولكن يمكن لذلك أن يفضي بنا من خلال تطور المصطلحات إلى الإتجاهات التي تطور هذين العلمين وفقاً لها. إن مجمل النتائج التي توصّلنا إليها تبينّ أن هذا الفراغ أو شبه الفراغ الذي يفترضه جمهرة من المؤرخين ما بين الاسكندرية والجمهوريات الإيطالية، والذي يشكل عائقاً لا يمكن تجاوزه لتفهمهم لتاريخ الرياضيات هو في الواقع الإمتلاء بعينه؛ الأمر الذي يتقضينا أن نعيد من جديد دراسة مشكلة تعاقب الفترات في تاريخ الرياضيات. لذلك فقد وجدنا من

---

(٢) انظر مثال الخازن، في: **التحليل الديوفنطسي في القرن العاشر**.

المناسب أن نجمع في ملحقٍ دراسة تاريخية ونقدية لمفهوم العلم الغربي ذاته. إلاّ أن هذه النتائج ذاتها تثبت أيضاً أن العلم الذي كتب بالعربية والذي سُمّي علماً عربياً نظراً إلى ذلك، فإن ورثته الشرعيين الوحيدين هم أولئك الذين تابعوه. وإذا كنا نريد ألاّ نَضِلّ ولا نُضِل، علينا أن ندرس هذا العلم على أساس أنه فترة أو مرحلة من هذا التاريخ لا أكثر ولا أقل.

الفَصْلُ الأول

بدَايَاتُ عِلْمِ الجَبْر

أولاً: فكرة الجبر لدى الخوارزمي[1]

١ ـ بين عامي ٨١٣ و٨٣٣، أي في عهد المأمون كتب محمد بن موسى الخوارزمي[2]،

---

(١) كُتب هذا النص وتُرجم إلى الروسية من قبل أكاديمية العلوم في الاتحاد السوفياتي احتفالاً بذكرى مرور ١٢٠٠ سنة على ولادة محمد بن موسى الخوارزمي، وكانت الترجمة الفرنسية قد صدرت عن: *Fundamenta Scientiae.*

(٢) هذا اسم المؤلف كما تؤكد جميع شهادات المؤرخين والمفهرسين والرياضيين. ويورد الطبري هذا الاسم اثناء سرده لحوادث ٢١٠ هجري، في: أبو جعفر محمد بن جرير الطبري، **تاريخ الرسل والملوك**، تحقيق محمد أبو الفضل ابراهيم، ١٠ ج، سلسلة ذخائر العرب، ٣٠ (القاهرة: دار المعارف، ١٩٦٠ ـ ١٩٦٨): «يروى عن محمد بن موسى الخوارزمي أنه قال...»، ج ٣، ص ٦٠٩.

لكن الطبري عند ذكره لحوادث ٢٣٢ هجري يورد قائمة بأسماء فلكيين كانوا قد حضروا لحظات الواثق الأخيرة: «بين الحضور الحسن بن سهل شقيق الفضل بن سهل والفضل بن اسحق الهاشمي واسماعيل بن نوبخت ومحمد بن موسى الخوارزمي المجوسي القطر بولّي، وسنان مرافق محمد بن الهيثم ومجموعة أولئك الذين يهتمون بالنجوم». لو قابلنا بين هاتين الشهادتين للطبري نفسه آخذين بالاعتبار إجماع غيره من المؤرخين فلسنا بحاجة إلى اختصاصي في ذلك العصر ولا إلى فقيه في اللغة، لندرك أن علينا أن نقرأ في الرواية الثانية للطبري «محمد بن موسى الخوارزمي والمجوسي القطر بولّي...» وأن الأمر يتعلق باسمين لشخصين (الخوارزمي والمجوسي القطر بولي) حيث سقط حرف العطف (و) في نسخة أولى. ولم يكن هذا ليستحق الكشف لو لم تترتب عليه سلسلة من النتائج المتعلقة بشخصية الخوارزمي، وحتى مصدر علمه أحياناً، وهكذا، مؤخراً في مقالة:

=G. Toomer, «Al-Khwārizmī,» in: Charles Coulston Gillispie, ed., *Dictionary of Sci-*

في بغداد، مؤلفه الشهير: **الكتاب المختصر في الجبر والمقابلة**[٣]. لأول مرة في التاريخ صيغت الكلمة «جبر» وظهرت تحت عنوان يُدل به على علم لم تتأكد إستقلاليته بالاسم الذي خُصَّ به فقط بل ترسّخ كذلك مع تصوّرٍ لمفردات تقنية جديدة معدّة للدلالة على الأشياء والعمليات.

كان الحدث بالغ الأهمية وقد اعترف بأهميته هذه المؤرخون القدماء والمحدثون على السواء، كما لم تخف أهميته على رياضيي تلك الحقبة، إذ لم يتأخر الرياضيّون، حتى أثناء حياة الخوارزمي، وأولئك الذين جاءوا بعده، في شرح وتفسير كتابه. وكي لا نورد سوى أسماء من أتوا مباشرة بعده، نذكر: عبدالحميد بن ترك، ثابت بن قرّة، الصيداني، سنان بن الفتح، أبو كامل، أبو الوفا البوزجاني[٤]. ونفهم دون عناء أن بين هؤلاء الشارحين من كان ذا مساهمات أساسية في تأسيس علم الجبر، وكان هؤلاء في حديثهم عن تاريخ الجبر يتّفقون في إعطاء الأسبقية فيه للخوارزمي[٥]، باستثناء صوت واحد كان معارضاً لهذا الإجماع، هو صوت ابن بَرَزة، الذي ادّعى هذا الشرف لعائلته ناسباً تلك الأسبقية لجدّه ابن ترك، لكن هذا الادعاء رُفض دون تحفظ من قِبل معاصره أبي كامل[٦].

= *entific Biography* (New York: Scribner, 1970 - 1978).

بنى ج. تومر على هذا الخطأ بيقين ساذج رواية طويلة، لا نستطيع نكران فضلها في تسلية القارىء.

(٣) انظر: أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي، **كتاب الجبر والمقابلة**، تقديم علي مصطفى مشرفة ومحمد مرسي أحمد (القاهرة: [د.ن.]، ١٩٣٧ ـ ١٩٦٨).

(٤) أبو الفرج محمد بن اسحق بن النديم، **كتاب الفهرست في أخبار العلماء المصنفين من القدماء والمحدثين وأسماء كتبهم**، تحقيق رضا تجدّد، ١٠ ج في ١ (طهران: مكتبة الأسدى، ١٩٧١)، ص ٣٣٨ ـ ٣٤١.

(٥) كتب أبو كامل بخصوص الخوارزمي: «هو أول من توصل لكتاب الجبر والمقابلة وهو من بدأه واخترع جميع ما فيه من أسس»، انظر: أبو كامل، «مخطوطات قرة مصطفى»، ٣٧٩ ظهر الورقة ٢. انظر سنان بن الفتح الذي لا يذكر في مقدمة كتيّبه سوى الخوارزمي، ويؤكد بأن هذا العلم يعود له، «ألّف محمد بن موسى الخوارزمي كتاباً أسماه **الجبر والمقابلة**». انظر أيضاً الحسن بن يوسف الذي كتب عن الخوارزمي: «إنه أول من اكتشف هذا العلم بالإسلام، واعتبره علماء الحساب «إمامهم» والاستاذ في هذا العلم». وأخيراً نذكر ابن مالك الدمشقي: «أعرف أن هذا العلم هو من اختراع العالم الممتاز محمد بن موسى الخوارزمي»، ونستطيع مضاعفة الشهادات التي تكثر في هذا المعنى.

(٦) يعزو مصطفى بن عبدالله حاجي خليفة استشهاداً من كتاب: أبو كامل، **الوصايا بالجبر**، يتحدث فيه أبو كامل عن كتاب غير كتابه، ويكتب «لقد اثبتُّ في كتابي الثاني الحجة على أن السطوة =

هناك بعض وقائع يصعب تفسيرها رغم اعتراف الجميع بها، إذ كثيراً ما يجد المؤرخ نفسه حيالها في وضع يبدو متناقضاً للوهلة الأولى، طالما أنه ليس على معرفة وثيقة بأعمال الرياضيين الذين سبقوا الخوارزمي، ويبقى هذا الجهل، حتى الآن على الأقل، صعب التجاوز[7] ويبقى السؤال التالي دون جواب: لماذا يبدو علم الجبر بالغ النضج بطرائقه رغم أنه مولود جديد؟ وما هو السبب في أن هذه المساهمة ـ التي توحي مظاهر عديدة منها بأنها تتويج لنشاط سابق ـ تبدو مع ذلك كأنها بداية أصيلة؟

انخرط المؤرخون منذ القدم، لعجزهم عن إيجاد جواب مقنع لهذا السؤال، في مساجلات دائمة التجدد تدور حول مسألتين متلازمتين هما: أصول علم الجبر من جهة، ومصادر عالِم رياضيات بغداد من جهة ثانية، مستندين تارة إلى رياضيّ اليونان (إقليدس أو ديوفنطس حسب الظرف) وتارة أخرى إلى الرياضيين الهنود، ومؤخراً إلى رياضيي بابل. إن تعايش وجهتي النظر المتناقضتين هاتين، يبرهن أنه ليس بإمكان

=والأسبقية في الجبر والمقابلة هي لمحمد بن موسى الخوارزمي، ورددت طيش المدعو ابن بَرْزَة الذي ينسبه لعبدالحميد والذي يدّعي بأنه جدّه». انظر: مصطفى بن عبدالله حاجي خليفة، **كشف الظنون عن أسامي الكتب والفنون**، تحقيق محمد شرف الدين يالتقيا ورفعت بليكة الكليسي، ٢ ج (استانبول: مطبعة الحكومة، ١٩٤١ ـ ١٩٤٣)، ج ٢، ص ١٤٠٧ ـ ١٤٠٨.

(٧) لم يصلنا ما هو أكثر أهمية في استجلاء تاريخ الرياضيات في القرنين الأولين للهجرة. انظر: Rushdi Rashed, «Algèbre et linguistique: L'Analyse combinatoire dans la science arabe,» in: R. Cohen, *Boston Studies in the Philosophy of Sciences* (Boston, Mass.: Reidel Pub. Co., 1973), vol.10, pp.383-399.

حيث بيّنا أن اللغويين ومؤلفي المعاجم وخاصة الخليل بن أحمد (المتوفي عام ٧٨٦ تقريباً) كانوا يملكون بعضاً من قواعد توافيقيّة وهذا لا يستتبع الاستنتاج بأنهم قد عرفوا التحليل التوافقي (Analyse combinatoire) كتحليل، إذ طبّقت القواعد دون أن تعرض أو تبرهن.

نجد حسب الشهادة المتأخرة لابو زيد عبدالرحمن بن محمد بن خلدون، في: **المقدمة** (بيروت: دار الكتاب اللبناني، ١٩٥٦ ـ ١٩٥٩)، بعض المتتاليات البسيطة. إن تفحص مراجع متوافرة حالياً وصادرة عن معنيّين بالأدب وفلاسفة. . . إلخ، عوضاً عن الرياضيين تمدّنا بمعلومات شديدة النقص كيما تتيح الاستنتاج بطريقة مقنعة، يختلف الوضع فيما يتعلق بالنتاج الحسابي لرياضيي القرن الثالث الهجري الذي لا يزال مفقوداً كنتاج الخوارزمي نفسه. فالأخير ألّف كتاباً ما زال مفقوداً حتى الآن **كتاب الجمع والتفريق** المذكور في كتاب الجبر لأبي كامل، **«مخطوطة قره مصطفى»، ٣٧٩ ورقة ١١٠**. فإذا ما توصلنا بجهد متأنٍ لتشكيل محتوى هذه الأعمال نكون قد تعرّفنا على طريق رياضيات ذلك العصر وهذا مرهون بالمستقبل.

إحداهما أن تفرض نفسها وأنه لم يكن بمقدور أي مؤرخٍ أن يثبت فعلياً أية أبوّة بين الخوارزمي أو بين هذه أو تلك من المصادر المزعومة لعلم الجبر. ويظهر الارتباك نفسه عندما يتعلق الأمر ليس بالمؤلَّف كله، بل بفصولٍ ذات مدى أضيق بكثير، كتلك المخصصة لقياس المساحات والأحجام. لنذكر ببساطة هنا الطروحات المتناقضة حول الروابط بين كتاب الخوارزمي و(Mišnat ha-Middot)[^8]. فليس نادراً ـ في ظروف كهذه ـ أن يلجأ المؤرخون إلى معلومات تطرح مشاكل إضافية أكثر مما تحلّ السابقة، كمثل فكرة «الجبر الهندسي» الشهيرة لليونانيين.

وتضاف إلى صعوبة إثبات مساهمة الخوارزمي في تكوين تاريخ الجبر صعوبة أخرى على مستوى مختلف، إذ إننا لو قبلنا بتجزئة كتاب الخوارزمي كي نتتبع آثار رياضيات قديمة، لن نلبث أن نلاحظ أنها ليست سوى شذرات لا توضح في شيء الشكل النظري للعلم الجديد. سأكتفي في هذا العرض بتفحص هذا الشكل، محاولاً تلمس الفكرة المكوّنة عند الخوارزمي نفسه عن الجبر وعندها قد يكون بالإمكان طرح قضية أصالة جبر الخوارزمي بصورة أدق.

٢ ـ في التقديم لكتابه، يعلن الخوارزمي عن مشروعه: توفير كتاب موجز للناس يعالجون فيه مسائلهم الحسابية ومبادلاتهم التجارية، وميراثهم، ومسح أراضيهم[^9]. وبالفعل فإن مختلف أقسام كتابه المتعاقبة مكرّسة هذه المواضيع. **القسم الأول** وهو نظري مخصص لإقامة «حساب» الجبر والمقابلة، أي إنشاء مفرداته الأوليّة ومفاهيمه؛ في **القسم الثاني** حدّد الخوارزمي أسس الطرق المنتظمة التي تسمح بإعادة جميع مسائل العمليات الحسابية إلى أنواعها الجبرية الأساسية. بينما عالج في **الأقسام الأخيرة**، ولغاية عملية جداً، كيفية تطبيق هذا الحساب على المعاملات التجارية ومسح الأراضي والقياسات الهندسية والوصيّات. هكذا نرى من مجرد قراءة لكتاب الخوارزمي، أن

---

[^8]: فيما يرى غاندز في هذا الكتاب بداية القسم المتعلق بـ «قياس» المساحات والأحجام عند الخوارزمي. انظر:
Solomon Gandz, *The Mishnat ha Middot: The First Hebrew Geometry of about 150 C.E.; Geometry of Muhammed ibn Musa d'al Khawarizmi* (Berlin: Springer, 1932).
وبالعكس فإن سارفاتي يضع هذا النص بعد الخوارزمي، أنظر:
Gad Ben -'Ami Sarfatti, *Mathematical Terminology in Hebrew Scientific Litterature of the Middle Ages* (Jerusalen: [n. pb.], 1968).

[^9]: الخوارزمي، **كتاب الجبر والمقابلة**، ص ١٦.

الجبر يبدو ـ دفعة واحدة ـ علماً نظرياً له امتداداته التطبيقية في مجال الأعداد كما في مجال الهندسة المترية.

إذا كان الجبر كناية عن «حساب» كما كتب الخوارزمي، فذلك يعود لسببين على الأقل. فمن جهة يمكننا تطبيق قواعد الحساب على مختلف الأشياء (عددية كانت أو هندسية) حالما نعبّر عنها بمفردات الجبر الأوليّة ـ عدد، مجهول، مربع المجهول ـ التي درسها الخوارزمي نفسه في كتاب ما زالت ترجمته اللاتينية محفوظة[10]. ومن جهة ثانية ظهرت منذ البداية إمكانات الجبر التطبيقية، وتلبيته للحاجات العملية للحساب. الجبر معرفة يقينية بالتأكيد، لكنه علم تطبيقي أيضاً وليس موضوعه كائناً خاصاً، فالمقصود به الأعداد والمقادير الهندسية على السواء. ولسنا مبالغين في الإلحاح على جِدَّة التصور والأسلوب لجبر الخوارزمي التي لا تتعلق بأي تقليد «حسابي» سابق حتى تقليد ديوفنطس نفسه.

إن تفحصاً لكتاب الخوارزمي يظهر نوعين من المفردات الأوليّة: المفردات الجبرية البحتة والمفردات المشتركة بين الجبر والحساب. والمفردات الجبرية كما رأينا هي المجهول المسمّى تارةً بالجذر أو الشيء ومربعه أو «المال» حسب تعبير الخوارزمي بالإضافة إلى الأعداد النسبية الموجبة وقوانين الحساب: ±، ×، \، ÷، $\sqrt{\ }$، والمساواة. وغالباً ما يُدَلُّ على هذه العمليات كافة بكلمات متفاوتة الوقوعات. فهكذا عندما يتحدث عن عملية الضرب مثلاً يستعمل كلمة «ضرب» لكنه يستعمل أيضاً كلمة «ضعف» وكلمتي «ثني» و«ثلث» ولكن بصورة أقل (وقوعين لكل كلمة منهما). العلاقة «في» تعمل أيضاً كمؤثر ضربٍ على غرار «ن في ن». ومن المستغرب حقاً فيما يتعلق بالحدود قصور معرفة الخوارزمي على الحدّين الآنفي الذكر، ولكي لا نتطرق إلّا لكتاب الخوارزمي فقط، نشير إلى أنه يعالج فيه مسألة يوحي محتواها بأنه استعان بالقوة «٣» دون أن يسميها صراحة، إذ إنه يكتب: «إذا قلنا مربعاً ـ مال ـ مضروباً بجذره نحصل على ثلاث مرات المربع الأول» ويقصد الخوارزمي بتعبير «مال» إجمالاً

---

(١٠) انظر: A.P. Juschkewitsch, *Über ein Werk des Abu Abdallah Muhammed Ibn Mūsā al-Hwarizmi al-Mağūsī zur Arithmetik der Inder*, Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Tehchnik und Medizin, Beiheft zum, 60 (Leipzig: [n.pb.], 1964).

علينا أن لا نخلط بين كتاب الخوارزمي هذا عن الحساب، وكتابه: كتاب الجمع والتفريق الذي ذكره أبو كامل. ففي الكتاب الأخير يظهر جلياً أن الخوارزمي يعالج أيضاً مسائل حسابية.

مربع المجهول، لكن قد يحصل أن يقصد بالتعبير عينه «الشيء»، في حين إذا جاور الجذر، فالحد «مال» لا يعني عندها سوى المعنى الأول، وهكذا نحصل على: $x^2 \cdot x = 3 \cdot x^2$. إذا كان الأمر كذلك وبمعزل عن المثل السابق، فمن المدهش حقاً أن يكون الخوارزمي جاهلاً للقوة التكعيبية، وهكذا ففي كتيّب عن قياس الأشكال المسطّحة والكروية لمؤلفيه بنو موسى[11]، نصادف العدد المجسّم في ترجمة الحجاج لكتاب **الأصول** لإقليدس. والحال أن بنو موسى والحجاج كانوا معاصرين للخوارزمي بل زملاءه إن صح التعبير في «بيت الحكمة». ومن ناحية أخرى فإن توسيع مفهوم القوة الجبرية تحقق من خلال قراءة لكتاب الخوارزمي من قِبَلِ رياضيّين فقط هما أبو كامل وسنان بن الفتح[12]، وهذا الأخير صاغ بوضوح المفهوم العام للقوة الصحيحة

---

(١١) انظر: بنو موسى، «كتاب في معرفة مساحات الأشكال،» في: أبو نصر السراج الطوسي، **رسائل الطوسي** (حيدر آباد: [د. ن.]، ١٩٤٠)، ج ٢، ص ١٩ وما يتبع (النسخة سيئة).

(١٢) أدخل سنان بن الفتح، «مخطوطات (٢٦٠)، رياضيات» (القاهرة)، ص ٩٥ (وجه الورقة) و١٠٤ (ظهر الورقة)، قوة المجهول بصورة عامة وهذا ما قاله سنان بن الفتح، ص ٩٥: «إن جلّ معرفة الحساب هو النسبة والتعديل، وقد وضع محمد بن موسى الخوارزمي كتاباً سماه: **الجبر والمقابلة**. وقد فسر ذلك، وسنح لنا بعده تفسيره باباً يتشعب على قياسه يقال له باب الكعب ومال المال والمداد. ولم نر أحداً من أهل العلم ممن سبقنا وانتهى إلينا خبره وضع في ذلك عملاً أكثر من التسمية، فأحببنا أن نضع في ذلك كتاباً نبين فيه مذهب قياسه، والله الموفق لما أحب والمعين عليه».

فالحساب تجري أعداده إذا أخرجت على النسبة على التوالي على أن يُسمى الأول من ذلك عدداً والثاني جذراً والثالث مالاً (ص ٩٦) والرابع مكعباً والخامس مال مال والسادس مداداً والسابع مال الكعب. ثم تكون النسبة الثانية والتاسعة و< على > ذلك ما أحببت، وهذا لا سيما لو غيرت لجاز بعد أن تفهم المراد منها، غير أن العادة جرت، وهذا مثال يدل على وصفنا، وهو على تركيب حساب الهند.

١ ١ ١ ١ ١ ١ ١ ١ ١

واحد عشرة مائة ألف عشرة ألف مائة ألف ألف ألف عشرة ألف ألف مائة ألف ألف ألف ألف ألف

عدد جذر مال مكعب مال مال مداد مال كعب النسبة الثامنة النسبة التاسعة

فنلاحظ: أ ـ يعلن سنان بن الفتح أسبقيته في هذا التعميم ويكتب: «لم نر أحداً ممن سبقنا وانتهى إلينا خبره وضع في ذلك عملاً أكثر من التسمية < القوى > فأحببنا أن نضع في ذلك كتاباً نبيّن فيه مذهب قياسه». ب ـ إذا كان الحد «مداد» عربي الأصل يكون عندها مشتقاً من «مِدّ» الذي يعني الامتداد في طول شيء أو إطالة شيء بآخر. ويمكن أن يعني أيضاً جمع «مِدّ» وهو نموذج لقياس يعني بالأصل: مدّ كلتا يديه ليملؤهما طعاماً. ولا نرى سبباً في هذا الاختيار للدلالة بشكل خاص للقوة x^5 أو المرتبة السادسة. وليس مستبعداً أن يكون هذا التعبير مقتبساً من اللغة الفارسية للدلالة على المرتبة السادسة. ج ـ يقابل ابن الفتح القوة n بالقوة $(n + 1)$. د ـ وأخيراً، فإن تعريف x^6 هو =

الموجبة. يبدو إذن، أن اقتصار الخوارزمي على القوة الثانية في استعمال الحدود الجبرية ليس ناجماً عن جهلٍ بقوى أعلى للمجهول، لكن هذا عائد على الأرجح إلى تصورٍ كاملٍ للجبر ومجاله وتوسيعه. ومن المهم أيضاً الرجوع إلى المفاهيم المكوِّنة للنظرية الجبرية كي نتمكن من فهم قصد الخوارزمي وفي الوقت نفسه من فهم المعنى والمرمى لهذا التحديد المتعمد للحدود الأولية.

إن المفاهيم الأساسية المستعملة من قِبَل الخوارزمي هي: المعادلة من الدرجة الأولى والثانية، ثنائية الحدّ وثلاثيات الحدود المقترنة بها، الشكل المنتظم، والحل بطريقة الحساب، وقابلية البرهنة لصيغة الحل. ولكن لو أردنا فهم كيف تتحقق وتتناسق هذه المفاهيم في أولى نظريات الجبر، فالطريقة المثلى هي في تتبعٍ سريع لبحث الخوارزمي. فبعد أن قدّم تعابير نظريته كتب يقول «فمن هذه الضروب الثلاثة ما يعدل بعضها بعضاً وهو كقولك أموال تعدل جذوراً وأموال تعدل عدداً وجذور تعدل عدداً»[13].

ويتابع: «ووجدت هذه الضروب الثلاثة التي هي الجذور والأموال والعدد تقترن فيكون منها ثلاثة أجناس مقترنة وهي أموال وجذور تعدل عدداً، وأموالٌ وعدد تعدل جذوراً، وجذور وعدد تعدل أموالاً»[14].

نجد إذن أن الخوارزمي يحتفظ بثلاث معادلات ثنائية الحدود وبثلاث معادلات ثلاثية الحدود:

$$ax^2 = bx,\ ax^2 = c,\ bx = c\ ;\ ax^2 + bx = c,\ ax^2 + c = bx,\ ax^2 = bx + c.$$

وحتى عند هذه المرحلة نستطيع القول إن نص الخوارزمي يتميز ليس فقط عما يمكن أن نجده في اللوحات البابلية ولكن أيضاً عن حساب ديوفنطس. ليس المقصود إذن سلسلة من المسائل يجب حلُّها، بل عرضاً ينطلق من مفردات أولية يفترض أن تعطي اقترانانها كل النماذج التي يمكن أن تُحتذى والتي سوف تشكل بوضوح من الآن فصاعداً الغرض الفعلي للدراسة. ومن جهة ثانية فإن فكرة المعادلة تظهر لذاتها منذ

=جدائي (نسبة إلى الجداء)، (المترجم)، بعكس جميع التعاريف الجمعية (نسبة إلى الجمع)، (المترجم)، التي نعرفها في العربية.

(١٣) انظر: الخوارزمي، **كتاب الجبر والمقابلة**، ص ١٧.

(١٤) انظر: المصدر نفسه، ص ١٨، و

Guillaume Libri, *Histoires des sciences mathématiques en Italie: Depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle* (Paris: Renouard, 1936), vol. 1. p.255.

البداية وعلى نحوٍ عامٍ بحيث يمكننا القول: إنها لا تنشأ ببساطة أثناء حل مسألة، بل إنها مقصودة لترمز إلى صفٍ لا نهائيٍ من المسائل. لتقدير هذا الإنجاز يكفي أن نتذكر واحدة من مخلّفات التقليد القديم في كتاب الخوارزمي، فهو غالباً ما يعطي قيمة المال بعد أن يكون قد حصل على قيمة المجهول. ويبدو أن هذا يرجع إلى عادة لا تتعلق بدراسة المعادلات بل بحل المسائل، كإيجاد مربعٍ بحيث يكون حاصل ضربه بعددٍ ما يساوي مثلاً حاصل ضرب جذره بعدد آخر.

ضمن هذه الشروط يُنتظر من عرض الخوارزمي أن يتطور دائماً نحو الأعم. وبالفعل فقد ارتفع إلى مرحلة ثانية من التعميم حالما أدخل مفهوم الشكل المنتظم. يتطلب الخوارزمي أن تُردَّ بانتظام كل معادلةٍ إلى شكلها المنتظم المكافىء. فيكتب عن المعادلة الرابعة مثلاً: «وكذلك، لو ذكر مالان أو ثلاثة أو أقل أو أكثر، فاردده إلى مالٍ واحد واردْ ما كان معه من الأجذار والعدد إلى مثل ما رددت إليه المال»[15]. ويصل إلى معادلات ثلاثيات الحدود بصورة خاصة:

$$x^2 + px = q \quad x^2 = px + q \quad x^2 + q = px$$

لقد أصبح إذن كل شيء مهيئاً لوضع صيغ حساب الحلول. عندها يعالج الخوارزمي كلاً من الحالات الثلاث ولا يغير من عمومية البرهان في شيء إذا ما استعيض عن العوامل الحرفية بقيم عددية خاصة. لنأخذ المعادلة الأولى من المعادلات الثلاث مثلاً وهي الحالة الأكثر شيوعاً، ولتكن $p=10$ و $q=39$. يكتب الخوارزمي «فبابه أن تنصّف الأجذار وهي في هذه المسألة خمسة فتضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية وتنقص منه نصف الأجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريد، والمال تسعة»[16]. وبتعبير آخر، لقد حصل في هذه الحالة على العبارة التالية:

$$x = \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{p}{2}. \qquad (1)$$

ويحصل بالتوالي في الحالتين الأخريين على:

$$x = \frac{p}{2} + \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

---

(١٥) الخوارزمي، المصدر نفسه، ص ١٩.

(١٦) المصدر نفسه، ص ١٨ ـ ١٩، و Libri, Ibid.

وإذا كان: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 > q,$ فإن:

(3) $$x = \frac{p}{2} \pm \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]^{\frac{1}{2}},$$

ويوضح في الحالة الثالثة:

إذا كان $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ «فجذر المال مثل نصف الأجذار سواء لا زيادة ولا نقصان»؛

وإذا كان $q > \left(\frac{p}{2}\right)^2$ «فالمسألة مستحيلة»(١٧).

وليختتم هذا الفصل، كتب الخوارزمي «فهذه الستة الضروب التي ذكرتها في صدر كتابي هذا، وقد أتيت على تفسيرها وأخبرت أن منها ثلاثة ضروب لا تنصّف فيها الأجذار وقد بيّنت قياسها واضطرارها. فأما ما تحتاج فيه إلى تنصيف الأجذار في الثلاثة الأبواب الباقية فقد وصفته بأبواب صحيحة وصيّرت لكلٍ منها صوراً يستدل منها على العلة في التنصيف»(١٨).

برهن الخوارزمي أيضاً عن غير طريق الجبر الصيغ المختلفة مستعيناً بالأشكال الهندسية، أي بواسطة تساوي المساحات وأغلب الظن أن هذه البراهين مستوحاة من معرفة حديثة العهد له بكتاب **الأصول** فقدّم الخوارزمي كلاً منها بوصفها «علة» للحل. ولم يكتفِ الخوارزمي بأن يكون لكلٍ حالة برهان، بل اقترح في بعض الأحيان برهانين لكل ضرب من المعادلات. وبالتأكيد، إن تطلباً كهذا يدل بوضوح على المسافة التي قطعها الخوارزمي والتي تفصله عن البابليين وتفصله من الآن فصاعداً أيضاً، بمنحاه المنظم، عن ديوفنطس.

وهكذا من استعراضنا السريع يبدو كيف يتطور عرض الخوارزمي وينتظم حول المفاهيم السابقة. جميع المسائل التي يعالجها الجبر يجب أن تردّ إلى معادلة ذات مجهولٍ واحدٍ من الدرجة الثانية على الأكثر، وذات معاملات نسبية موجبة وهي المعادلة الوحيدة المقبولة في هذا الكتاب للخوارزمي. فالعمليات الجبرية - من نقلٍ وردّ لأحد طرفي المعادلة - تطبق كي تأخذ المعادلة شكلها المنتظم فتصبح عندها فكرة إيجاد الحل عبارة عن إجراء بسيط لاختيار أيّ لوغارتمية (Algorithme) لكل ضربٍ من ضروب المسائل. وتصبح صيغة الحل بعد ذلك مبررة رياضياً بواسطة برهان بدْء - هندسي (Proto-géométrique). ويحق للخوارزمي بعدها القول بأن كل ما يتعلق بالجبر «لا بدّ أن يخرجك إلى أحد الأبواب الستة التي وضعت في كتابي هذا»(١٩).

---

(١٧) المصدر نفسه، ص ٢٠ - ٢١، و Ibid., p.257.

(١٨) المصدر نفسه، ص ٢١.

(١٩) المصدر نفسه، ص ٢٧.

يتبع هذا العرض للخوارزمي أربعة فصول موجزة ومكرّسة لدراسة بعض مظاهر تطبيق القوانين الأولية للحساب على العبارات الرياضية الأكثر بساطة. فيدرس بالترتيب كلاً من الضرب والجمع والطرح والقسمة واستخراج الجذر التربيعي. هذا ما يقترح تبيانه في فصله الموجز عن الضرب: «وأنا مخبرك كيف تضرب الأشياء (المجاهيل) وهي الجذور، بعضها في بعض إذا كانت منفردة أو كان معها عدد أو كان مستثنى منها عدد أو كانت مستثناة من عدد...»[٢٠].

أي أنه يبيّن نتائج كلٍّ من الأشكال التالية:

$$a, b, c, d \in Q^+ \qquad (a \pm bx)(c \pm dx)$$[٢١].

تأخذ هذه الفصول أهميتها من الغاية التي تحركها أكثر مما تأخذها من النتائج التي تحتوي عليها. لو تفحصنا إذن أقوال الخوارزمي والمكان الذي أفرده لهذه الفصول (وَضعها مباشرة بعد دراسته النظرية للمعادلة التربيعية) والاستقلالية التي يرجعها لكلٍّ منها، يظهر لنا أن المؤلف أخذ على عاتقه دراسة الحساب الجبري بحد ذاته، أي دراسة خصائص ثنائيات الحدّ وثلاثيات الحدود المترافقة مع المعادلات المذكورة في القسم الأول من كتابه. ومهما بدت دراسته هذه بدائية فحسبها على الأقل أنها المحاولة الأولى المكرّسة للحساب الجبرى بحد ذاته. لأن عناصر هذا الحساب لا تظهر فقط من خلال الحل لمسائل مختلفة، بل أصبحت الغرض لفصولٍ ذات استقلالية نسبية أيضاً.

وندرك إذن بدقة أكبر فكرة الجبر عند الخوارزمي: المقصود نظرية المعادلات الخطيّة والتربيعية ذات المجهول الواحد وحساب أولي على ثنائيات الحدّ وثلاثيات الحدود المترافقة معها. وإذ أولى الخوارزمي اهتماماً أكبر للمعادلة من الدرجة الثانية فهذا يعود ببساطة إلى الفكرة الكامنة في حلّها وفي البرهان عليه حسب النظرية الجديدة. فالحل يجب أن يكون في الوقت نفسه عامّاً وقابلاً للحساب، وعموميته مبررة رياضيّاً، أي هندسياً. وفي الواقع، وحده الحل بواسطة الجذور يجيب عن شروط الخوارزمي، ويتضح على الفور حصر الدرجة وحصر عدد الحدود الأولية.

منذ بدايته الفعلية، ظهر الجبر إذاً كنظرية للمعادلات قابلة الحلّ بواسطة الجذور، وللحساب الجبري للعبارات المترافقة مع تلك المعادلات، وذلك قبل أن

---

(٢٠) المصدر نفسه، ص ٢٧.

(٢١) Q^+، هو رمز مجموعة الأعداد النسبية الموجبة، و $\in$، هو رمز الانتماء (المترجم).

تكون قد صيغت بعدُ بشكل عام فكرة كثيرات الحدود. استمر هذا الفهم لفترة طويلة بعد الخوارزمي فاهتم من جاء بعده مباشرة بدارسة المعادلات ذات الدرجات العالية أو تلك التي يمكن ردّها إلى معادلة من الدرجة الثانية. ورغب بعضٌ آخر بحل المعادلة من الدرجة الثالثة بواسطة الجذور. لكي نقتنع بتأثير الخوارزمي يكفي أن نذكر كيف رفض الخيّام اعتبار حل المعادلة من الدرجة الثالثة بطريقة تقاطع المنحنيات حلاً جبرياً وكرّس هذه الصفة للحل الذي يعتمد الجذور فقط.

بعد هذه الفصول النظرية يرجع الخوارزمي إلى التطبيقات المختلفة من حسابية أو هندسية لعلمه الجديد التي أصبحت منذ الآن مبنيّة في غالبيتها على شمولية النظرية، إذ يجتهد في كل حالة لنقل المسألة لمفردات جبرية ليتمكن من ردّها فيما بعد إلى ضروب معادلاته المعدّة، ولم يتصدَّ إلَّا في القسم الثاني من كتابه بصورة عرضيّة لبعض مسائل التحليل الديوفنطسي(٢٢).

سيكون عبثاً البحث عن نظرية كهذه قبل الخوارزمي، صحيح أننا قد نلتقي بهذا أو ذاك من مفاهيمه في نص ما من العصور القديمة أو تلك المتأخرة ولكن لم تظهر جميعها إطلاقاً ولم ترتبط إطلاقاً ببنية كهذه. والحال أن هذه البنية النظرية المعدّة تفسر الفقر الظاهري لتقنية جبر الخوارزمي وتجديده المتعمّد للمصطلحات. وفي الواقع إذا ما قورن كتاب الخوارزمي بكتاب المسائل العددية لديوفنطس مثلاً لبدا وكأنه لا يحتوي إلَّا على تقنية بسيطة جداً. لكن هذه البساطة توافق بالضبط التجديدات التي فرضها تكوين النظرية. وكذلك فإن التجديدات الاصطلاحية كانت تهدف إلى خلق لغة قابلة للتعبير عن المفردات الهندسية والحسابية على السواء، وهكذا بتعبيرها عن مقتضى النظرية، عكست هذه التجديدات أيضاً همَّ تمييز العلم الجديد.

غير أننا لا نستطيع ادّعاء شرحٍ وافٍ للجبر حسب الخوارزمي طالما أننا لم نتبيَّن مردوده آنذاك، فمفهوم علمٍ ما لا يتحدد بالجهد الذي بذل في سبيله فقط، ولكن قيمته تكمن أيضاً في قدرته على الاتساع وطاقته التراكمية وفي العوائق التي تعترضه أثناء نموه. أي باختصار، بجميع مناحي البحث التي يحثّ عليها. وهذا بالضبط ما يتميّز به الخوارزمي عن أي سلفٍ له محتمل، فوحده حدّد الإنطلاق لمجرىً بكامله من

---

(٢٢) نجد هذا النوع من المسائل في الفصل المكرّس للوصيّات. انظر مثلاً: الخوارزمي، المصدر نفسه، ص ٧٦ وما يتبع.

البحث الجبري الذي لم ينقطع منه ذلك الحين. علينا إذاً تفحص هذا البعد التاريخي لجبر الخوارزمي.

٣ ـ لقد حمل كتاب الخوارزمي بين سطوره الفصول المختلفة من الجبر الكلاسيكي. ولكن لصياغة هذه الفصول فعلياً ولتجسيد فكرة الجبر بحسب الخوارزمي اضطر من جاء بعده إلى الابتعاد عن طريقه، إذ وجب عليهم شق سبلٍ جديدة، ليس فقط لتخطّي الحواجز النظرية والتقنية التي تعترض تنفيذ برنامجه ـ حل المعادلة التكعيبية بواسطة الجذور مثلاً ـ ولكن أيضاً لتحويل المشروع نفسه في منحى أكثر حسابيّة وكذلك لتطوير الحساب الجبري المجرد. نستطيع أن نفرد إذن بِدْأيْن جديدين للجبر وتيارين من الأبحاث التزما اقتفاء أثر الخوارزمي، لكن ضده في الوقت نفسه، الأول كان حسابياً والثاني هندسياً وكلا الإثنين عدّل بعمقٍ طبيعة المذهب. طبيعي أنني لا أستطيع التصدي هنا، ولو بإيجاز، إلاّ لنتائج التقليد في الجبر الحسابي. بعد الخوارزمي بقليل وربما في حياته شُرِعَ بمتابعة مهمته، فبينما كان ابن ترك يستعيد نظرية المعادلات ليعطي براهين هندسية ـ بدئية على كل حال[٢٣]، وإن كانت أكثر رسوخاً، كان الماهاني ينقل إلى لغة الجبر بعض مسائل ثنائية التربيع من الكتاب العاشر من **الأصول** ومسائل تكعيبية لأرخميدس[٢٤].

كذلك كان تعميم مفهوم القوة الجبرية سريعاً ولدينا هنا شهادتان تؤكدان بأن هذا المسعى قد أوْحت به قراءة لكتاب الخوارزمي. الشهادة الأولى لأبي كامل صاحب

---

(٢٣) Aydin Mehmed Sayili, *Logical Necessity in Mixed Equations by 'Abd al-Hamid ibn Turk and the Algebra of his Time*, Türk Tarih Kurumu Yayinlarindan 17, seri no.1 (Anakara: Türk Tarih Kurumu Basimevi, 1962),

بخاصة النص العربي، ص ١٤٤ وما يتبع.

(٢٤) انظر: الماهاني، «الأصول،» مخطوطة، «باريس (٢٤٥٤)،» ص ١٨٠ ـ ١٨٧ (ظهر الورقة)، حيث نجد: $39x^2 = x^4 + \frac{225}{4}$

يروي الخيّام أن الماهاني «توصل إلى تحليل المأخوذة التي استعملها أرخميدس معتبراً إياها مقبولة وذلك في القضية الرابعة من الكتاب الثاني من مؤلفه حول: «الكرة والاسطوانة،» ويتابع الخيّام أن الماهاني «فتأدى إلى كعاب وأموال وأعداد متعادلة فلم يقف له حلّها...»، انظر: فرانز ويبك، **رسائل الخيام الجبرية**، ترجمة وتحقيق رشدي راشد وأحمد جبار (حلب: [د.ن.]، ١٩٨١)، ص ١١.

المؤلف **المعروف والمشروح**[٢٥] والثانية لسنان بن الفتح[٢٦]، وهذا الأخير درس معادلات ثلاثية حدود يمكن ردّها في حال قسمتها على قوة ملائمة للمجهول إلى معادلات الخوارزمي وبتعبير آخر إلى معادلات تحتوي على الحدود:

$$ax^{2n+p}, bx^{n+p}, cx^{p}.$$

هذه الأبحاث جميعها، وأفضلها بصورة خاصة دراسة لأبي كامل تتعلق بالأعداد النسبية الموجبة بالإضافة إلى العديد من النتائج التي توصل إليها علماء الحساب والجبر في دراسة الأعداد الصمّاء الجبرية، وأخيراً ترجمة كتاب **المسائل العددية** لديوفنطس. كل هذا ساعد الكَرَجي في إعداد مشروع حَسْبَنَة (Arithmétisation) الجبر كما سبق وأشرنا. المقصود من جهة حسب تعبير السموأل (أحد الرياضيين الذين أتوا بعد الكَرَجي): «الطريق إلى التصرف في المجهولات بجميع الأدوات الحسابية كما يتصرف الحاسب في المعلومات». ومن جهة أخرى الاستعاضة تدريجياً عن البراهين الهندسية بالبراهين الجبرية. هذا التطبيق أصبح ممكناً بالإعداد الأول لفكرة كثيرات الحدود بخطوطها العامة، وهذا التطبيق نفسه الواضح في كتاب الكَرَجي سمح بتوسيع الحساب الجبريّ المجرد وتنظيم العرض الجبريّ حول مختلف العمليات الحسابية المطبّقة بالتتابع على العبارات الجبرية. ومنذ ذلك الحين قُدّمت على هذا النحو أفضل المؤلفات في الجبر الكلاسيكي. لقد بيّنا آنفاً وبالتفصيل كيف تشكّل مثل هذا البرنامج وماذا كانت أهم نتائجه[٢٧].

سيكون من باب التطويل هنا تعداد النتائج لحسبنة الجبر هذه، لنذكر فقط أنها طالت الجبر ذاته ونظرية الأعداد والتحليل العددي، وحل المعادلات العددية وكذلك التحليل الديوفنطي للأعداد النسبية، وحتى منطق وفلسفة الرياضيات. وأريد أن أتوقف هنا عند نظرية المعادلة نفسها لأبرهن بفضل مستندات غير منشورة ومجهولة

---

(٢٥) انظر: M. Youschkevitch, *Les Mathématiques arabes VIIIème - XVème siècles*, traduction par M. Cazenave et K. Jaouiche (Paris: Vrin, 1976), p.52 sq.

(٢٦) المصدر نفسه.

(٢٧) انظر: Rushdi Rashed, «Recommencements de l'algèbre aux XIème siècle,» in: J.E. Murdoch and E.D. Sylla, *The Cultural Context of Medieval Learning* (Dordrecht- Holland: Reidel Pub. Co., 1975), pp. 33-60.

انظر أيضاً:

«Al-Karajî,» in: Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography*.

حتى الآن[٢٨]، أنه خلافاً للرأي السائد فإن الذين أتوا بعد الكَرَجي جرّبوا في الحقيقة حلاً جبريّاً للمعادلة التكعيبية.

لنذكر **أولاً**، مع مراعاة نظرية المعادلات، أننا نجد في كتاب **الفخري** للكرجي زيادة على ما وجدناه عند سنان بن الفتح المعادلات التالية:

$$ax^{2n} + bx^n = c \quad ax^{2n} + c = bx^n \quad bx^n + c = ax^{2n}.$$

لكن الكَرَجي نفسه لا يذكر شيئاً بخصوص المعادلة التكعيبية، غير أن السُلَمي وهو أحد لاحقيه، ألمح إلى أن المسألة شغلت علماء الجبر الحسابيّين من أتباع الكَرَجي، والسلمي نفسه تطرق لنوعين اعتبرهما ممكنين:

$$x^3 + ax^2 + bx = c \quad و \quad x^3 + bx = ax^2 + c,$$

لكنه يفرض الشرط $b = a^2/3$, ويعطي عندها لكل معادلة جذراً حقيقياً موجباً:

$$x = (a^3/27 + c)^{1/3} - \frac{a}{3} \quad و \quad x = (c - \frac{a^3}{27})^{1/3} + \frac{a}{3}.$$

يبدو أننا نستطيع إعادة رسم خطوات السلمي على الشكل التالي:

يردُّ المعادلة بواسطة تحويل أفّيني إلى شكلها المنتظم، لكنه بدلاً من التفتيش عن المميّز، يُعْدِمُ معامل القوة الأولى للمجهول ليردّ المسألة بعد ذلك إلى استخراج الجذر التكعيبي، وهكذا يجري التحويل الأفّيني على المعادلة الأولى مثلاً:

$$x \rightarrow y\text{-}a/3,$$

فتكتب عندها: $y^3 + py - q = 0$

حيث: $p = b\text{-}a^2/3$ و $q = c + a^3/27 + (b\frac{a}{3} - \frac{a^3}{9})$;

لتكن $b = (a^2/3)$. فنحصل على:

$$y^3 = c + a^3/27$$

ومنها نستنتج قيمة x.

---

(٢٨) انظر ملاحظتنا حول حل المعادلات التكعيبية (التي سوف تصدر).

لنذكّر أن دور المميّز كان قد عيّن من قِبَل شرف الدين الطوسي في الحالة الخاصة: $x^3 - bx + c = 0$ [٢٩].

رأينا إذاً في الصفحات السابقة أن الخوارزمي هو مَن شكّل وحدة الجبر، ليس بفضل شمولية الكائن الرياضي الذي عالجه في هذا العلم فقط، بل بفضل شمولية عمليّاته. يتعلق الأمر إذاً بعمليات متعاقبة مكرّسة لردّ مسألة عددية أو هندسية إلى إحدى المعادلات الموضوعة في شكلها المنتظم، وبتلك التي تسمح فيما بعد بالتوصل إلى أشكال الصيغ القانونية للحلول التي، إضافةً إلى ذلك، يجب أن تكون بدورها قابلة للبرهنة والحساب. إن الجبر المعدّ من قِبَلِ الخوارزمي، والذي هو علم المعادلات والحساب الجبري لثنائيات الحدود وثلاثيات الحدود المقترنة بها والعلم القائم بذاته امتلك إذاً بُعْدَهُ التاريخي وحمل بالقوة إمكانية أول تعديل: حَسْبَنَةُ الجبر.

وهكذا يتضح أن مساهمة الخوارزمي لا يمكن إنكارها وهي التي تعود إلى التجديد في نوع عقلانية الرياضيات نفسها. وإذا ما باءت بالفشل دائماً المحاولات لإيجاد مصادر لجبره، فقد يكون ذلك لنقصٍ في بعد النظر في التحليل، أو لنقصٍ في المعلومات التاريخية على حدّ سواء، وقد يصح توجيه اللوم لقصورٍ غير متعمدٍ على صعيد اللغة أو على صعيد الأفكار. وبدلاً من التساؤل فقط عما يمكن أن يكون الخوارزمي قد استطاع قراءته، من الأفضل، برأينا، البحث عن السبب الذي جعله يفكر بما لم يستطع أي ممن سبقه إدراكه.

ثانياً: الكَرَجي[٣٠]

هو الكَرَجي (أو الكَرَخي) أبو بكر بن محمد الحسين (أو الحسن). لا نعرف عن حياته سوى القليل، فحتى اسمه هو موضع شك، وقد عُرف منذ ترجمات ويبك (Woepcke) وهوكْهايم (Hochheim)[٣١] بالكرخي وسوف يُدعى بهذا الاسم من قِبَل

(٢٩) انظر: Rushdi Rashed, «Résolution des équations numériques et algèbre: Al-Tūsi-Viète,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol.12, no.3, pp.244-250.

(٣٠) Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography* (1973), vol.7, pp.240-246.

(٣١) Franz Woepcke, *Extrait du Fakhrî: Traité d'algèbre* (Paris: [n.pb.], 1853), et:

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي، «الكافي في الحساب،» ترجمة أ. هوكايم، «استانبول مكتبة ابراهيم باشا، رقم المخطوط (٨٥٥).»

مؤرّخي الـرياضيـات. لكن جيـورجيـو ديللا ڤيـدا (Giorgio della Vida)[٣٢] اضـطّر للطعن بهذا الاسم عام ١٩٣٣ مستبدلاً اياه بالكَرَجي في جـدالٍ كان يمكن أن يكـون عقيماً بالتأكيد، لولا أنّ بعض المؤلفين حاولوا من خلال الاسم استنتاج المنشـأ: كَرْخ وهي إحدى ضواحي بغداد أو كَرْج وهي مدينة إيرانية، وفي معرفتنا الحالية فـإن حجة ديللاڤيـدا ليست حاسمـة رغم كونها محتملة. امّـا من خلال المخـطوطات المحفـوظـة للمؤلف، فليس من السهـل البتّ في أحد هـذين الاسمين كـما يبيّن الجـدول[٣٣]. ولا تفيدنا في هذا المجال العودة إلى «الشارحين»[٣٤]. وهكذا فالسموأل في كتـابه البـاهر في

---

(٣٢) Giorgio Levi Della Vida, «Appunti e Quesiti di Storia Letteraria Araba, IV,» *Rivista Degli Studi Orientali,* vol.14 (1933), p.264 sq.

(٣٣) لا يعتبر هذا الجدول شاملاً بسبب تبعثر المخطوطات العربية والنقص في تبويبها:

اسم الكتاب	الكَرْخي	الكَرَجي
الفخري	1 - B.N. Paris 2495 2 - Esat Efendi Istanbul 3157 3 - B.N. Le Caire 21	Köprülü Istanbul 950
الكافي	Gotha 1474 Alexandrie 1030	Topkapi Saray Istanbul A. 3135 Damat-Istanbul 855 Sbath le Caire 111
البديع		Barberini Rome 36, 1
الحساب الجبر	Hüsner Pasa-Istanbul 257	Bodleian Lib., I, 968, 3
انباط المياه الخفية	ed. Hyderabad - Deccan 1945 بدءاً من: مخطوطات آيا صوفيا ومكتبة Khuda Bakhsh	

(٣٤) نواجَه بـالصعوبـة نفسها عنـد اعتماد مخطوطات الشـارحين والعلماء العـرب اللاحقـين. وهكذا وفي تعليق الشهرزوري، دامات ٨٥٥ وابن الشقاق طـوبكابي سـراي ٣١٣٥ (وكلاهمـا يستند إلى الكافي) نجد اسم الكَرَجي وفي الاسكندرية رقم ١٠٣٠ اسم الكَرْخي.

الجبر يورد اسم الكَرَجي كما تُبيِّن ذلك مخطوطة آيا صوفيا رقم (٢٧١٨). من هنا فقد فكّر بعض المؤلفين باستخلاص حجة حاسمة لصالح هذا الاسم[٣٥]. في حين أن مخطوطة أخرى للنص نفسه، رقمها (٣١٥٥). لعزّت أفندي[٣٦]، تذكر التسمية الكَرْخي. لكن بما أن اسم الكَرَجي بدأ يفرض نفسه ـ دونما أسباب واضحة ـ وبما أننا لا نريد إضافة التباس جديد إلى الالتباس الكبير اللاحق أصلاً بتسمية المؤلفين العرب، سوف نستعمل من الآن فصاعداً اسم الكَرَجي، غير أننا سنمتنع عن أي تفكير يسمح باستنتاج منشأ للمؤلف من خلال هذا الاسم. يكفينا أن نعرف أنه عاش ووضع أهم نتاجه في بغداد في نهاية القرن العاشر وبداية القرن الحادي عشر، ومن المحتمل أنه غادر بغداد للذهاب إلى «بلاد الجبل»[٣٧]، وقد يكون انقطع عن كتابة أعماله الرياضيّة ليكرّس نفسه لتحرير أعمالٍ في الهندسة كما يدل على ذلك كتابه عن استخراج المياه الخفيّة.

إن مؤلّف الكَرَجي ذو أهمية خاصة بالنسبة إلى تاريخ الرياضيات. ولقد لاحظ ويبك (Woepcke) آنفاً، أن هذا المؤلف «يقدم أولاً النظرية الأكثر اكتمالاً أو بالأصح النظرية الوحيدة في الحساب الجبريّ عند العرب التي نعرفها حتى الآن»[٣٨]. فالحقيقة أن الكَرَجي بدأ بطريقة جديدة كليّاً على تقليد الجبريين العرب أمثال: الخوارزمي وابن الفتح وأبي كامل، وذلك بعرضٍ لنظرية الحساب الجبري[٣٩]. وكانت غاية هذا العرض الواضحة تقريباً، البحث عن سبلٍ لتحقيق إستقلالية وخصوصية الجبر كي يصبح بمقدوره،

---

(٣٥) انظر: أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي، كتاب البديع في الحساب، تحقيق عادل أنبوبا، الجامعة اللبنانية، قسم الدراسات الرياضية، ٢ (بيروت: الجامعة اللبنانية، ١٩٦٤)، ص ١١.

(٣٦) انظر: Rushdi Rashed, «L'Arithmétisation de l'algèbre au XIème siècle,» dans: Actes du XIIIème congrés d'histoire des sciences, Moscou, 1971.

أنظر أيضاً: Al-Samaw'al Ibn Yahaya Abbas al-Maghribi, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al,* notes et introduction par Rushdi Rashed et Salah Ahmad (Damas: Université de Damas, 1972).

(٣٧) حسب المعاجم العربية، تشمل بلاد الجبل المدن التي تقع ما بين «أذربيجان، العراق، خورستان، ايران وبلاد الديلم (اسم بلد قريب من بحر قزوين)».

(٣٨) انظر: Woepcke, *Extrait du Fakhrî: Traité d'algèbre,* p.4.

(٣٩) Rashed, «Algèbre et linguistique: L'Analyse combinatoire dans la science arabe,» in: Cohen, *Boston Studies in The Philosophy of Sciences,* pp.383-399.

بشكل خاص، الاستغناء عن التمثيل الهندسي للعمليات الجبرية، فالقضية تتعلق في الواقع ببداية جديدة للجبر وذلك بتطبيقٍ منهجيٍّ لعمليات الحساب على]∞ ، 0[. حَسْبَنة الجبر هذه تستند إلى جبر الخوارزمي المطوّر من قِبل أبي كامل وكثيرين غيره، بالإضافة إلى كتاب المسائل العددية لديوفنطس المشروح والمطوّر من قبل الرياضيين العرب أمثال أبي الوفاء البوزجاني[٤٠]. بالاختصار، فإن اكتشاف وقراءة مؤلَّف ديوفنطس في ضوء التصورات والوسائط الجبرية الخاصة بالخوارزمي وغيره من الجبريّين العرب مكّنت من انطلاقة جديدة في الجبر مع الكَرَجي كاتب أول عرضٍ جبري في كثيرات الحدود.

في بحثه الجبريّ الفخري يعطي الكَرَجي في البدء دراسة منهجية للأسس الجبرية وينتقل بعدها إلى تطبيق العمليات الحسابية على المفردات والعبارات الجبرية ويفضي أخيراً إلى العرض الأول في جبر كثيرات الحدود. فهو إذ يدرس المتتاليتين[٤١]:

$$x, x^2, \ldots, x^9, \ldots ; 1/x, 1/x^2, \ldots, 1/x^9,$$

يصيغ بالتتابع القواعد التالية:

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \ldots \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x} \ldots = \frac{1}{x^{n-1}} : \frac{1}{x^n} = \frac{x^n}{x^{n-1}} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{n+m}} \qquad (3) \\ \frac{1}{x} \cdot x^2 = \frac{x^2}{x}, \frac{1}{x} \cdot x^3 = \frac{x^3}{x}, \ldots, \frac{1}{n^n} \cdot x^m = \frac{x^m}{x^n} \qquad (4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

ولكي نقدر أهمية هذه الدراسة، علينا أن نرى كيف استفاد منها من أتوا بعد الكَرَجي مباشرة؛ وهكذا نلاحظ أن السموأل استطاع انطلاقاً من عمل الكرجي استعمال تماكل الزمر $([x^n ; n \in Z], \times)$ و $(Z, +)$ كي يفضي وللمرة الأولى إلى القاعدة المكافئة بكل عموميتها: $x^m x^n = x^{m+n}$، حيث: $m, n, \in Z$.[٤٢]

---

(٤٠) V.M. Medovoi, in: *Istoriko Matematisheskei Isseldovainya* (1960), pp.253-324.

(٤١) Woepcke, *Extrait du Fakhrî: Traité d'algèbre*, p.48.

(٤٢) Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*, p.20 sq, وما يليه من النص العربي.

وفيما يتعلق بتطبيق العمليات الحسابية على المفردات والعبارات الجبرية، فقد اهتمّ الكَرَجي في البدء، في تطبيق هذه القواعد على وحيدات الحدّ ثم اشتغل على «الكميات المركبة» أو كثيرات الحدود. وبالنسبة إلى عملية الضرب فقد أشار إلى القواعد التالية:

$$(a/b).\ c = ac/b, \quad [2]\ a/b.\ c/d = ac/bd, \qquad [1]$$

حيث $a, b, c, d,$ هي وحيدات حد. ثم عالج عملية ضرب كثيرات الحدود وأعطى القاعدة العامة لها، واتّبع الطريقة نفسها مبدياً الاهتمام نفسه بالتناظر بالنسبة إلى عمليتي الجمع والطرح، ومع هذا فإن جبر كثيرات الحدود ذو قيمة متفاوتة. وفيما يتعلق بالقسمة واستخراج الجذور لم يتوصل الكَرَجي إلى الشمولية التي وصل إليها في العمليات الأخرى، فبالنسبة إلى القسمة لا يأخذ بالاعتبار سوى قسمة وحيدة حدٍ على وحيدة حدٍ أخرى، أو قسمة كثيرة حدودٍ على وحيدة حد. وهذه النتائج سمحت لمن أتوا بعده وبصورة خاصة السموأل بدراسة قابلية القسمة في الحلقة $[Q(x) + Q(1/x)]$ وتقريب الكسور التامّة بعناصر من الحلقة ذاتها[43] وذلك للمرة الأولى على حد علمنا. وفيما يتعلق باستخراج الجذر التربيعي لكثيرة الحدود، توصل الكَرَجي ـ للمرة الأولى في تاريخ الرياضيات ـ إلى إعطاء طريقة عامة في حال المعاملات الموجبة فقط، وهذه الطريقة مكّنت السموأل من حلّ المسألة لكثيرة حدود ذات معاملات نسبيّة أو على الأصح مكّنته من تحديد الجذر لعنصر مربع من الحلقة[44] $[Q(x) + Q(1/x)]$. تتلخص طريقة الكَرَجي في المقام الأول بإجراء التحليل على: $(x_1 + x_2 + x_3)^2$ حيث x_1, x_2, x_3 هي وحيدات حد ويقترح لها الشكل القانوني التالي:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + (x_2^2 + 2x_1x_3) + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

وهذه العبارة الأخيرة هي بحد ذاتها، في هذه الحالة، كثيرة حدود مرتّبة بحسب القوى المتناقصة. بعدها يطرح الكَرَجي المسألة العكسية: إيجاد الجذر لخماسية الحدود. فيعتبر إذاً أن لكثيرة الحدود هذه شكلاً قانونياً ويقترح طريقتين: تتلخص الأولى بأخذ حاصل جمع جَذْري حدّي الطرفين الأول والأخير ـ إذا وجدا ـ وخارج الحد الثاني على ضعفي جذر الأول أو خارج الحد الرابع على ضعفي جذر الحد

(٤٣) المصدر نفسه.

(٤٤) المصدر نفسه، ص ٦٠ من النص العربي.

الأخير[٤٥]. أما الطريقة الثانية فقوامها أن نطرح ضعفي ضرب جذر الحد الأول بجذر الحد الأخير من الحد الثالث. وأخيراً إضافة جذر باقي عملية الطرح إلى جذريّ حدّي الطرفين الأول والأخير.

يجب أن ننوّه هنا بأن هذا الشكل ليس محصوراً بالمثال الخاص وبأن طريقة الكَرَجي هذه، كما يمكن أن نراها في كتابه البديع هي طريقة عامة[٤٦].

ويتابع الكَرَجي، وغايته توسيع الحساب الجبري دائماً، درْس تطبيق العمليات الحسابية على المفردات والعبارات الصّماء: «كيف يمكن استخدام الضرب والقسمة والجمع واستخراج الجذور [لكميّات جبرية صمّاء]؟»[٤٧]، تلك كانت المسألة المطروحة من قبل الكَرَجي وقد استخدمت من قِبَل السموأل كعنوان للفصل ما قبل الأخير من مؤلفه حول استعمال الوسائل الحسابية لكمياتٍ صمّاء. لقد وسمت هذه المسألة مرحلة مهمة من مجمل مشروع الكَرَجي، وبالتالي من توسيع الحساب الجبري. وكما طبَّق الكَرَجي بوضوح منهجية عمليات الحساب الأوليّ على الكميات النسبية أراد، كي يبلغ أهدافه، توسيع هذا التطبيق ليشمل الكميات الصمّاء، ويبرهن أنها تحتفظ بخصائصها. هذا المشروع المصمم على أنه نظري بحت، أفضى إلى معرفةٍ أفضل بالبنية الجبرية للأعداد الحقيقية، وفي الواقع، كان هذا تقدماً واضحاً، لكن كي يصبح ممكناً، كان لا بدّ من مواجهة تراجعٍ ما - تراجع قد يصدم البعض في الوقت الحاضر - بمعنى أنه لم يَبْنِ العملية على الأرض الصلبة لنظرية الأعداد الحقيقية. لقد اهتم الجبريون الحسابيون فقط بما يمكن أن نسمّيه جبر مجموعة R ولم يحاولوا بناء حقل الأعداد الحقيقية. لكن التقدم أصاب مجالاً جبرياً آخر، جدّده لاحقاً، الخيّام وشرف

---

(٤٥) وهكذا مثلاً، حسب الطريقة الأولى، لإيجاد جذر:

$$x^6 + 4x^5 + (4x^4 + 6x^3) + 12x^2 + 9.$$

نأخذ جذور x^6 و 9 ثم نقسم $4x^5$ على x^3 أو نقسم $12x^2$ على 3. ونحصل في الحالتين على $4x^2$ فيكون الجذر المطلوب إذاً $(x^3 + 2x^2 + 3)$.

أما حسب الطريقة الثانية، لتكن: $x^8 + 2x^6 + 11x^4 + 10x^2 + 25.$

نأخذ جذور x^8 و25. وهي بالتتالي x^4 و5. ونجري عملية الطرح كما أشير سابقاً فنحصل على x^4 وجذره x^2. فيكون الجذر المطلوب إذاً $(x^4 + x^2 + 5)$. انظر:

Woepcke, *Extrait du Fakhrī: Traité d'algèbre*, p.55, et

الكرخي، كتاب البديع في الحساب، ص٥٠ من النص العربي.

(٤٦) Al-Samaw'al, Ibid.

(٤٧) انظر: الكرخي، المصدر نفسه، ص ٣١ من النص العربي.

الـدين الطوسي[٤٨]. وضمن تقليـد هـذا الجـبر استـطاع الكـرجي والسمـوأل تـوسيـع عملياتها الجبرية لتطول الكميّات الصماء دون أن يتساءلا عن أسبـاب نجاحهـا أو أن يبرّرا هذا التـوسيع. ولأنّ نقصـاً في التبريـر مزعجـاً كهذا يعـطي انطبـاعاً بـأن هناك تراجعاً مـا، فقد اعتمـد الكَرَجي في آنٍ معاً التعريفـات الواردة في الجـزأيـن السابـع والعـاشر من كتاب **الأصـول** لإقليدس. وفي حـين استعار من الجـزء السابـع تعريف العدد كـ «كثرة من وحدات» والوحدة ـ التي ليست عدداً بَعْـدُ ـ الذي «قيـاساً عليـه، يُـدعى كـل شيء واحـداً»، حـدّد بمـوجب الجـزء العـاشر مفـاهيم «غـير المشـاركـة» والصّمائية. وبالنسبة إلى إقليدس كما بالنسبة إلى شارحيه فإن هذه المفاهيم لا توافق إلاّ المواضيع الهندسية أو بحسب تعبير بابوس (Pappus) هي «ميزة بجـوهرهـا هندسيـة»[٤٩]. ويتابع «فلا غير المشاركة ولا الصـمائية بـإمكانها أن تـوجد بـالنسبة إلى الأعـداد لأن الأعداد نسبيـة ومشتركة»[٥٠].

ولأن الكرَجي استخدم بوضوح التعريفات الإقليدية كنقـطة انطلاق، كـان من الأجدى له لو تمكن من تبرير استخدامها بالنسبة إلى الكميات غير المشاركـة والصّماء. وعبثاً تبحث عن شرحٍ كهذا في مؤلفه، أما التبريـر الوحيـد الذي يمكن أن نعـثر عليه فهـو عَرضي وغـير مباشر ومبني عـلى تصوّره الخـاص للجبر. ولأنّ الجـبر يـوافق قـطع الخـطوط المستقيمة والأعـداد على السـواء فبإمكـان عمليات الجـبر أن تـطبق عـلى أي موضوع، هندسياً كان أم حسابياً. فالأعداد الصّماء كما الأعداد النسبية يمكن أن تكون هي المجهول بالنسبـة إلى العمليات الجـبرية لأنها، عـلى وجه الـدقة، تتعلق بـالأعداد والمقادير الهندسية على السواء. يبدو أن غياب أي تفسير جوهـري يشير إلى أن تـوسيع الحساب الجبري ـ وبالتالي الجبر ـ يتطلب كيْـما يتقدم إغفـال المسائـل المتعلقة ببنـاء R وتجاوز كل حـاجز ضمنيّ كي يتم الـتركيز عـلى البنية الجـبرية. إنها قفـزة غير مـبرّرة، بالتأكيد، لكنها مؤاتية لتطور الجـبر. وهذا مـا يقصده الكَـرَجي بالضبط عنـدما يكتب مباشرة بعد رجوعه إلى تعريفات إقليدس وبلا تمهيد: «وأنا أريـك نقل هـذه الألقاب [غـير المشاركة والصّماء] إلى العدد وأزيد فيها لأنه لا يُكتفى بها في الحساب»[٥١].

---

(٤٨) انظر: شرف الدين الطوسي، مخطوطات: India Office 80th 767 (I.O. 461).

(٤٩) انـظر: Alexandria Pappus, *Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*, Half-Little, Harvard Semitic Series, VIII (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1930), p.193.

(٥٠) المصدر نفسه.

(٥١) انظر: الكرخي، كتاب البديع في الحساب، ص ٢٩ من النص العربي.

إن إحدى نتائج هذا المشروع التي ليست أقلها هي التفسير الجديد للجزء العاشر من كتاب **الأصول**[٥٢]. هذا الجزء الذي اعتبر حتى ذلك الوقت، من قبل غالبية الرياضيين، بمن فيهم مؤلّف بمكانة ابن الهيثم، كتاباً هندسياً فقط. بالنسبة إلى الكَرَجي تتعلق هذه المفاهيم بالمقادير عامة، العددية منها والهندسية، وهكذا فإنها تشكل جزءاً من الجبر. ولكي يتمكن الكَرَجي من بسط مفاهيم الجزء العاشر من كتاب **الأصول** على كل الكميّات الجبرية بدأ يزيد عددها وكتب: «فأقول إن المقادير المفردة بلا نهاية. فأولها المنطق بالإطلاق مثل خمسة، والثاني المنطق بالقوة مثل جذر عشرة، والثالث المعروف بإضافته إلى مكعبه مثل ضلع عشرين والرابع الموسط وهو المعروف بإضافته إلى مال ماله مثل جذر جذر عشرة والخامس ضلع مال الكعب، ثم ضلع كعب الكعب وعلى هذا ينقسم إلى ما لا نهاية له»[٥٣]. وكذلك يمكن لوحيدات الحد التكاثر إلى ما لا نهاية. وفي هذا المجال كما في مجالات أخرى تابع السموأل عمل الكَرَجي. لكن هناك مساهمة خاصة به وحده هي: تعميم القسمة لكثيرة الحدود ذات المعاملات النسبية[٥٤]، وهكذا وسّع الكَرَجي حساب الجذور الذي أدخله سابقوه. وفي كتاب **البديع**[٥٥] نجد نصوص القواعد أولاً بالنسبة إلى وحيدات الحد x_1, x_2، حيث m, n هي أعداد طبيعية موجبة بالتدقيق، هذه القواعد تسمح بحساب كلٍ من:

(1) $$x_1\sqrt[n]{x_2}\ ;\ \sqrt[n]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2}\ ;\ \sqrt[n]{x_1}\cdot\sqrt[m]{x_2}$$

(2) $$\sqrt[n]{x_1}\ /\ \sqrt[n]{x_2}\ ;\ \sqrt[n]{x_1}\ /\ \sqrt[m]{x_2}$$

(3) $$\sqrt[n]{x_1}\ \pm\ \sqrt[n]{x_2}.$$

بعدها درس الكَرَجي العمليات نفسها التي أجريت على كثيرات الحدود وأعطى من بين قواعد أخرى، القواعد التي تسمح بحساب عبارات مثل:

---

(٥٢) فيما يخص الكتاب العاشر لإقليدس، انظر:
Bartel Leendert Van Der Waerden, *Erwachende Wissenschaft* (Bâle: Stuttgart, 1956); Jules Vuillemin, *La Philosophie de l'algèbre* (Paris: Presses universitaires de France, 1962), et P. Dedron et Jean Marc Gaspard Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris: [s.pb.], 1969).

(٥٣) الكرخي، المصدر نفسه.

(٥٤) انظر مقدمة: Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al.*

(٥٥) انظر: الكرخي، المصدر نفسه، ص ٣٢ وما يليها من النص العربي، وص ٣٦ وما يتبع من المقدمة بالفرنسية.

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_3}} ; \frac{x_1}{4\sqrt{x_2} + 4\sqrt{x_3}} ;$$

$$\sqrt{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} ; \sqrt{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}$$

ثم حاول، دون أن يُفلح، حساب:

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}}$$

بهذه الروح نفسها استأنف عمله في التحليلات الحدانيّة. والكل يعلم أنه أعطى في كتابه الفخري[٥٦] تحليل المتطابقة $(a + b)^3$، بينما عرض في البديع[٥٧] تلك المتعلقة بـ $(a - b)^3$ وَ $(a + b)^4$. وفي نصٍّ طويل للكرجي يورده السموأل نجد عرضاً لجدول المعاملات الحدانيّة وقانون تشكلها:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

وكذلك للتحليل: $(a + b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$ مهما كان العدد الطبيعي n[٥٨].

لبرهنة القضية السابقة وكذلك القضية $(ab)^n = a^n b^n$، حيث تتبادل a وَ b مهما كان $n \in N$، أعطى السموأل برهاناً هو شكل بالٍ نوعاً ما للاستقراء الرياضي، وقبل أن يبرهن هاتين القضيتين بيّن أن عملية الضرب هي تبديلية وتجميعية:
$(ab)(cd) = (ac)(bd)$ وذكّر بتوزيعية عملية الضرب بالنسبة إلى عملية الجمع $(a + b)\lambda = a\lambda + b\lambda$. ويستخدم عندئذ تمديد $(a + b)^{n-1}$ ليثبت المتطابقة $(a + b)^n$ وكذلك $(ab)^{n-1}$ ليثبت $(ab)^n$. وللمرة الأولى على حد علمنا، نجد دليلاً يمكن أن يعتبر بداية للإستقراء الرياضي.

وفي عودة إلى نظرية الأعداد، يتابع الكَرَجي من جهة أخرى المهمة نفسها في توسيع الحساب الجبري ويبرهن المسائل التالية[٥٩]:

---

(٥٦) انظر: Woepeck, *Extrait du Fakhrî: Traité d'algèbre*, p.58.

(٥٧) انظر: الكرخي، المصدر نفسه، ص٣٣ من النص العربي.

(٥٨) Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*.

(٥٩) انظر: Woepeck, *Extrait du Fakhrî: Traité d'algèbre*, p.59 sq.

$$\sum_{i=1}^{n} i = (n^2 + n) / 2 = n\,(\tfrac{1}{2} + n/2). \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i\,(2n/3 + \frac{1}{3}) ; \quad (2)$$

في الحقيقة، لم يثبت الكَرَجي هـذه المبرهنـة لكنه أعـطاها فقط الشكـل المكافيء التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} i = (2n/3 + \frac{1}{3}).$$

لكن البرهان الجبري يظهر عند السموأل(٦٠):

$$\sum_{i=1}^{n-1} i\,(i + 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) (2n/3 - 2/3). \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2. \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (2i + 1)(2i + 3) + \sum_{i=1}^{n} 2i\,(2i + 2) = \left(\sum_{i=1}^{2n+2} i\right) (2/3[2n + 2] - 5/3) + n. \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} i\,(i + 1)(i + 2) = \sum_{i=1}^{n-1} i^3 - \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i. \quad (6)$$

ويقول الكَرَجي إن استخراج المجهولات انـطلاقاً من مقـدمات معلومـة هي المهمة الخاصة بالجبر(٦١). فغرض الجـبر في الواقـع هو تبيـان كيفية استخـراج الكميّات المجهولة بواسطة الكميات المعلومة عن طـريق تحويـل المعادلات المعـروضة. فـالقضية تتعلق بمهمة تحليلية بشكـل واضح. من هنـا يفهم التوسيـع للحساب الجـبري المجرد ويُفهم أيضاً لماذا لم يلبث أن قُرِن الجبر بعد الكَرَجي(٦٢) بـالتحليل وقـوبل بـطريقة مـا بـالهندسـة محققاً بـذلك استقـلاليته الـذاتية. أوَلَمْ تكن وحـدة الموضـوع الجـبري منـذ الخوارزمي مبنية على وحدة العمليات الرياضية لا على وحدة الكائنات الرياضية؟ فمن جهة، هناك العمليات الضرورية لإرجاع مسألة معينة إلى شكل معادلة، أو بدقـة أكثر إلى أحد النماذج القـانونيـة المنصوصـة من قِبل الخـوارزمي، ومن جهة أخـرى هنالـك

(٦٠) Al-Samaw'al, Ibid., p.64 sq.

(٦١) Woepeck, Ibid., p.36

(٦٢) انظر من النص العربي: Al-Samaw'al, Ibid., p.71 sq.

عمليات ضرورية لإعطاء حلول خاصة، أي قوانين. ويستعيد الكَرَجي[٦٣]، بالطريقة نفسها، المعادلات القانونية الست التالية:

$$ax = b\ ;\ ax^2 = bx\ ;\ ax^2 = b\ ;\ ax^2 + bx = c\ ;$$
$$ax^2 + c = bx\ ;\ bx + c = ax^2,$$

لكي يحلّ بعد ذلك معادلات من درجة أعلى:

$$ax^{2n} + bx^n = c\ ;\ ax^{2n} + c = bx^n\ ;\ bx^n + c = ax^{2n}\ ;$$
$$ax^{2n+m} = bx^{n+m} + cx^m.$$

ويستعيد، على خطى أبي كامل خاصة، دراسة نظم معادلات خطيّة[٦٤]، ويحلّ مثلاً النظام التالي:

$$x/2 + w = s/2,\ 2y/3 + w = s/3,\ 5z/6 + w = s/6,$$

حيث: $s = x + y + z$ و $w = 1/3(x/2 + y/3 + z/6).$

لقد كشفت له ترجمة الأجزاء السبعة لكتاب **المسائل العددية** لديوفنطس فائدة مجالين على الأقل. لكن على العكس من ديوفنطس، أراد الكَرَجي إعداد الموضع النظري للمجالين المعنيين. بإمكاننا القول إذن أن قراءة ديوفنطس إنطلاقاً من تصورٍ مجدّدٍ بعد الخوارزمي، وبمساعدةٍ نظرية في الحساب الجبري أكثر تطوراً، كل هذا، سمح للكرجي بتفسيرٍ جبري لكتاب **المسائل العددية** لديوفنطس. ففي **الفخري** كما في **البديع** يقصد الكرجي بالتحليل اللامحدود أو «الاستقراء»[٦٥]: «أن ترد عليك جملة من جنس أو جنسين أو من ثلاثة أجناس متوالية (أي كثيرة حدود أو عبارة جبرية) وتكون تلك الجملة غير مربعة من جهة ما يدل عليه اللفظ وتكون في المعنى مربعة وأنت تريد أن تعرف جذرها»[٦٦]. إذاً يقترح الكَرَجي كحلٍّ في مجموعة Q لكثيرة حدودٍ ذات معاملات نسبية أن يبحث عن قيمة x في Q حيث $P(x)$ هي مربع عددٍ نسبي. وبهذا المعنى كيما نحلّ مثلاً:

$$A(x) = ax^{2n} + bx^{2n-1},\quad \text{حيث}\quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

---

(٦٣) Woepeck, Ibid., p.64 sq.

(٦٤) المصدر نفسه، ص ٩٠ ـ ١٠٠.

(٦٥) المصدر نفسه، ص ٧٢. انظر أيضاً: الكرخي، كتاب البديع في الحساب، من النص العربي.

(٦٦) انظر مع تحسينات على الترجمة بدءاً من مخطوطة (B.N.)، في: Woepeck, Ibid.

نقسم على x^{2n-2} كي نعود إلى الشكل: $ax^2 + bx,$ الذي يجب أن نعادله بكثيرة حدودٍ مربعة حيث وحيدة الحد ذات الدرجة القصوى هي $ax^2,$ وحيث جذر المعادلة هو عدد نسبي.

ويذكر الكَرَجي أن المسائل من هذا النوع لها عدد لانهائيّ من الحلول ويأخذ على عاتقه حلّ مجموعةٍ كبيرة منها، بعضها مستعار من ديوفنطس، والبعض الآخر يعود إليه شخصياً، ولا مجال هنا لتعدادٍ شامل لهذه المسائل. سوف نعرض فقط أهم النماذج للعبارات الجبرية أو كثيرات الحدود التي بالإمكان معادلتها بمربع(٦٧).

١ ـ معادلات ذات مجهول واحد

$$ax^2 = u^2$$

$ax^2 + bx = u^2$ وشكله العام $ax^{2n} + bx^{2n-1} = u^2$

$ax^2 + b = u^2$ وشكله العام $ax^{2n} + bx^{2n-2} = u^2$

$ax^2 + bx + c = u^2$ وشكله العام $ax^{2n} + bx^{2n-1} + cx^{2n-2} = u^2$

$ax^3 + bx^2 = u^2$ وشكله العام $ax^{2n+1} + bx^{2n} = u^2$

حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$

٢ ـ معادلات ذات مجهولين

$$x^2 + y^2 = u^2 \qquad x^3 \pm y^3 = u^2 \qquad (x^2)^{2m} \pm (y^3)^{2m+1} = u^2$$

$$(x^{2m+1})^{2m+1} - (y^{2m})^{2m} = u^2$$

٣ ـ معادلة ذات ثلاثة مجهولات

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm (x + y + z) = u^2$$

٤ ـ معادلتان بمجهول واحد

$\begin{cases} a_1x + b_1 = u_1^2 \\ a_2x + b_2 = u_2^2 \end{cases}$ وشكلها العام: $\begin{cases} a_1x^{2n+1} + b_1x^{2n} = u_1^2 \\ a_2x^{2n+1} + b_2x^{2n} = u_2^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = u_1^2 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = u_2^2 \end{cases}$$

(٦٧) المصدر نفسه، والكرخي، المصدر نفسه.

٥ ـ معادلتان بمجهولين

$$\begin{cases} x^2 + y = u^2 \\ x + y^2 = v^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y = u^2 \\ y^2 - x = v^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^2 = u^2 \\ x^3 - y^2 = v^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^3 = u^2 \\ x^2 + y^3 = v^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = u^2 \\ x^2 + y^2 \pm (x + y) = v^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + x^2 = u^2 \\ x + y + y^2 = v^2 \end{cases}$$

٦ ـ معادلتان بثلاثة مجهولات

$$\begin{cases} x^2 + z = u^2 \\ y^2 + z = v^2 \end{cases}$$

٧ ـ ثلاث معادلات بمجهولين

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u^2 \\ x^2 + y = v^2 \\ x + y^2 = w^2 \end{cases}$$

٨ ـ ثلاث معادلات بثلاثة مجهولات

$$\begin{cases} x^2 + y = u^2 \\ y^2 + z = v^2 \\ z^2 + x = w^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y = u^2 \\ y^2 - z = v^2 \\ z^2 - x = w^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y + z) - x^2 = u^2 \\ (x + y + z) - y^2 = v^2 \\ (x + y + z) - z^2 = w^2. \end{cases}$$

وبالطريقة نفسها نستطيع العثور في عمل الكرجي على تنويعات أخرى حول عدد المعادلات والمجهولات، ودراسة العبارات الجبرية وكثيرات الحدود التي يمكننا معادلتها بمكعبٍ، وينجم عن المقارنة بين المسائل التي حلّها الكَرَجي وتلك التي حلّها ديوفنطس أن «أكثر من ثلث مسائل الكتاب الأول لديوفنطس، ومسائل الكتاب الثاني انطلاقاً من الثامنة ومسائل الكتاب الثالث بأكمله تقريباً كلها كانت مدرجة من قبل الكَرَجي في مصنفه»(٦٨). بإمكاننا أن نضيف إلى ذلك مسائل الكتاب الرابع كما نعرفها نحن في النسخة العربية.

وهكذا يظهر نَسَقَان من الاهتمام في حلول الكرجي: محاولة إيجاد طرقٍ عامة أكثر فأكثر، وتوسيع عدد الحالات حيث يجب درس شروط الحلّ، وهكذا، فبالنسبة إلى المعادلة: $ax^2 + bx + c = u^2$ وعلى الرغم من أنه يفترض كشرطٍ ضروري لحلّها أن يكون a و c مربعين موجبين، فهو يفترض الحالات المختلفة حيث a هي مربع و b هي

(٦٨) Woepeck, Ibid., p.21.

مربع، حيث a ليست مربعاً و b ليست مربعاً في: $ax^2 - b = u^2$ ولكن b/a هي مربع. وأكثر من هذا فقد برهن أن: $\pm (bx - c) - x^2 = u^2$ ليس لها حلٌّ نسبي إلاّ إذا كان $1/4b^2 \pm c$ هي مجموع المربعين[69].

والاهتمام نفسه ظهر في حلِّه لنظام $y^2 + x = v^2, x^2 + y = u^2$ حيث يهتم أولاً بتحويل: $x = at$ و $y = bt,$ حيث $a>b,$ ليفرض بعدها: $(a - b) t = \lambda$ ؛ $a^2t^2 + bt = u^2$ ؛ $b^2t^2 + at = v^2$، ويحلّ المسألة إنطلاقاً من المتطابقة المبرهنة:

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{u-v}{\lambda} + \lambda\right)^2 - \left(\frac{u-v}{\lambda} - \lambda\right)^2\right] = u-v.$$

وبإمكاننا العثور على العديد من الأمثلة الأخرى التي تظهر دون شك هذا الإهتمام بالتعميم والتوسيع في البحث عن الحلول، وكذلك أيضاً بالنسبة إلى عدد كبير من البحوث الأخرى والنتائج الرياضية. ومع هذا تبقى الأهمية الكبرى لعمله، في تلك البداية الجديدة للجبر وفي تلك الحسبنة للجبر المستندة إلى اكتشافه لديوفنطس، فيما كان يمتلك جبر الخوارزمي. وسوف تصبح هذه البداية الجديدة مُدْركة جيداً ومطورة من قبل ورثة الكرجي المباشرين أمثال السموأل. من هذا التقليد، كما هو واضح استقى ليونارد دوبيز (Leonard de Pise) بعض معارفه. وقد يكون الأمر كذلك بالنسبة إلى ليفي بن جرسون (Levi ben Gerson)[70].

مؤلفات الكرجي

إلى جانب الأعمال الورادة في هذا الجدول والمنشورة كلها ما عدا علل حساب الجبر، فقد ذكر المفهرسون العرب والكَرَجي نفسه، نصوصاً أخرى لم يعثر عليها حتى الآن. هكذا يكون لدينا في الفئة الأولى:

١ ـ **كتاب العقود والأبنية.**

٢ ـ **كتاب المدخل في علم النجوم.**

وفي الفئة الثانية نجد الأعمال التالية مذكورة في **الفخري**.

---

(٦٩) المصدر نفسه، ص ٨.

(٧٠) انظر المقارنة، في: المصدر نفسه. انظر أيضاً:

George Sarton, *Introduction to the History of Science,* Carnegie Institution of Washington Publication, no.376 (Baltimore, Mad.: Wilkins, 1927), p.596.

١ - كتاب نوادر الأشكال.

٢ - كتاب الدور والوصايا.

وفي البديع نجد:

١ - في الاستقراء.

٢ - كتاب في الحساب الهندي.

وأخيراً يشير السموأل إلى كتاب للكرجي استخرج منه نصه حول المعاملات وفكّ ذوات الحدّين.

ثالثاً: بدايات الجبر في القرنين العاشر والحادي عشر(٧١)

يروى تاريخ الجبر الكلاسيكي أحياناً كتتابع لثلاثة أحداث منفصلة هي: تشكيل نظرية المعادلات التربيعية، والحل العام تقريباً للمعادلة التكعيبية، وإدخال وتوسيع الرمزية الجبرية.

يُقرن الحدث الأول غالباً باسم الخوارزمي، ويُربط الحدث الثاني برياضيي المدرسة الإيطالية وبصورة خاصة ترتاغليا (Tartaglia) وكاردان (Cardan)، وأخيراً يربط الحدث الثالث باسميّ ڤيت (Viète) وديكارت (Descartes).

هذا وبرهنت أعمال ويبك (Woepcke) حول الكَرَجي والخيّام في القرن التاسع عشر، ومؤخراً أعمال لوكي (P.Luckey) حول الكاشي، أن الصورة السابقة هي صورة ناقصة، ورؤية غير دقيقة. فكشف الأول من خلال ترجمته لجبر الخيّام بصورة خاصة، أنه قبل القرن السادس عشر بكثير استطاعت نظرية المعادلات التكعيبية انجاز تقدمٍ حقيقي. ويُستشف من خلال هذين المؤرخين أنه لا يمكن إعادة رسم تاريخ الجبر بمعزلٍ عن الحساب الجبري المجرد.

لكن رغم هذه الدراسات فقد استمر بعض المؤرخين باعتماد التصور نفسه للجبر الكلاسيكي. يبقى أن هذا الوضع لا يتحمل مسؤوليته الوحيدة المؤرخون فقط، فهو ناجم جزئياً على الأقل، عن مسألة أن جبر الكَرَجي والخيّام وبصورة خاصة جبر الكاشي تظهر وكأنها غير مندرجة ضمن التقاليد الرياضية الحقيقية. فالمعلومات

---

(٧١) Murdoch and Sylla, *The Cultural Context of Medieval Learning,* pp.33-60.

الجزئية والناقصة عن الرياضيات العربية، أظهرت حتى عهدٍ قريب، بشكل أو بآخر، كأن هذه الأعمال هي أعمال فردية بسبب الجهل بالتقاليد الرياضية التي تندرج ضمنها. ضمن هذه الظروف يفهم الإتجاه الطبيعي جداً بالنسبة إلى المؤرخ في طرح السؤال المتنازع حوله عن أصل هذا الجبر ومنشئه الذي غالباً ما يتحول إلى سؤال حول الأصالة.

نعود في هذا العرض وبشكل سريع إلى هذه التقاليد الرياضية نفسها كي ندعم فكرة أن الجبر الكلاسيكي أدخل عليه تجديد منذ نهاية القرن العاشر، وأن هذا التجديد لم يظهر كتجديد نشاطٍ للجبر المقرّ فقط، بل كاستئنافٍ فعلي أو كاستئنافات بكل ما في الكلمة من معنى.

بإمكاننا التعرف إلى تقليدين رياضيين يرتبط بهما الجبر: الأول هو التقليد الحسابي ـ «الصناعة العلمية» كما كان يقول الرياضيّون والمفهرسون العرب ـ نظرية الأعداد وصناعة الحساب ـ أو اللوجيستيقا ـ وكلاهما مرتبط بشدة بالآخر. هذا التطوير كان من عمل الرياضيين العرب أنفسهم وكانت وراءه أيضاً ترجمة المسائل العددية لديوفنطس. ولتجديد هذا العلم استفاد الكرجي ولاحقوه في آنٍ معاً من التطوير ومن معرفتهم بالجبر والطريقة التي طُبق بها منذ الخوارزمي. والتقليد الثاني مرتبط بأعمال بعض من عملوا بالهندسة، بخاصة أولئك الذين اشتغلوا بالتحديدات المتناهية في الصغر وأولئك الذين حاولوا تطوير الجبر بواسطة الهندسة. وقد توصل الخيّام وشرف الدين الطوسي، ممثلا هذا التقليد كما سنرى فيما بعد، إلى الدراسة الجبرية للمنحنيات: لقد وضعا الأسس للهندسة الجبرية.

لتبرير هذه الإدعاءات، فإن هذه الدراسة السريعة لا ترشّح نفسها إلاّ لمهمة الإجابة عن الأسئلة التالية: ما هي هذه البدايات؟ وما هي وسائلها وأسبابها المحتملة؟

ـ ١ ـ

إذا أردنا تمييز مهمة الجبريين باختصار، أو على الأقل الرعيل الأول منهم، فبإمكاننا القول إن مشروعهم كان حَسْبنة الجبر كما كان قد شكّله الخوارزمي وطوّره لاحقوه أمثال أبي كامل (٨٥٠ ـ ٩٣٠)، فالمقصود صراحة كما كتب السموأل فيما بعد «التصرف في المجهولات بجميع الأدوات الحسابيّة كما يتصرف الحاسب في المعلومات».

المهمة واضحة إذاً، والجبر يكتسب مدلوله الذي هو من الان فصاعداً، خاص به. فمن جهةٍ يقصد تطبيق عمليات الحساب الأولي وبشكل منهجي على العبارات الجبرية ـ أي المجهولات الجبرية ـ ومن جهة أخرى النظر إلى العبارات الجبرية بمعزلٍ عما يمكن أن تمثله كي يصار إلى تطبيق هذه العمليات العامة عليها كما تطبق على الأعداد.

كما هو واضح آنفاً في عمل الكَرَجي (المتوفى في بداية القرن الحادي عشر) المتابَع والمحسَّن من قبل لاحقيه، قاد تحقيق هذا المشروع، كما أمكن التبيّن، بعد قرن من الزمن مع السموأل (المتوفى في ١١٧٥) إلى توسيع الحساب الجبري المجرد، وتنظيم البحث الجبري حول التطبيق المتتالي لمختلف عمليات الحساب. وللإقتناع بذلك يكفي تصفح كتاب **الفخري** للكرجي، أو **الباهر** للسموأل. فالنتيجة الأساسية لهذين البحثين الجبريين هي إعطاء معرفة جيدة عن البنية الجبرية للأعداد الحقيقية. لكن، بما أن هذه النتيجة وغيرها من النتائج الأقل أهمية التي توصل إليها هذان الجبريّان، غالباً ما نُسبت إلى رياضيين متأخرين أمثال شوكيه (Chuquet) وستيفل (Stifel)، وبما أن هذه النتائج تعبّر بدقةٍ عن تغييرٍ في العقلانية الجبرية فليسمح لنا باستعادة ما عرضناه سابقاً كيما نرسم بسرعة سعي مؤلِّفَيْنا ونبرهن التأكيدات التي تقدمنا بها.

يبدأ الكَرَجي كتابه **الفخري** بدراسة مختلف «قوى المجهول» بعد أن سبق وأورد النص شفهياً، أي بطريقة غير رمزية، بأن: $x^m=x^{m-1}x$ حيث $m=1, 2, \dots, 9,$ ويَلْحَظُ أن «الأمر كذلك حتى اللانهاية» وأنه عندما نضرب إحدى هذه القوى بعددٍ معينٍ من الجذور فالحاصل هو من مستوى القوة التالية. بالإمكان القول إذاً ان الكرجي حدد: $x^n=x^{n-1}x$ مهما كان العدد الصحيح الموجب n. ويحاول الكَرَجي بعد ذلك توسيع مفهوم القوة الجبرية لكمية ما، وهي قوة محددة بمبدأ الاستقراء الرياضي لتطول مقلوب القوة. ويعطي بعض النتائج المهمة مثل:

$$(1/x^n)\cdot(1/x^m)= \ =1/x^{n+m}.$$

ولسوف يُدقِّق هذا التعميم ويُكمِّل من قِبل من أتوا بعد الكَرَجي والذين استطاعوا أخيراً وبفضل تحديد القوة المعدومة $x^0=1$ حيث $x\neq 0,$ نص قاعدة مكافئة لِـ: $x^n x^m=x^{n+m}$، مهما كانت $m, n\in \mathbb{Z}.$.

وعلى أثر هذا التعميم لمفهوم القوة الجبرية بُذِلَ الجهد لتطبيق عمليات الحساب

على العبارات الجبرية. ومن النتائج المباشرة لهذا التطبيق، أولى دراسات الجبر حول «كثيرات الحدود».

لم يكتفِ الكَرَجي في كتابه الفخري بدراسة عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة واستخراج جذر وحيدات الحد، بل درس أيضاً العمليات المتعلقة بكثيرات الحدود. ومع هذا فرغم أنه ينصّ جيداً، في حالة كثيرات الحدود، القواعد العامة لكل من الجمع والطرح والضرب، لا يفعل الشيء نفسه بالنسبة إلى القسمة أو إلى استخراج الجذر، إذْ إنه لا يدرس إلاّ قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد. وإذا استخرج الجذر التربيعي فهو يحصر نفسه في جذر كثيرة حدود ذات معاملات نسبية موجبة.

بإمكاننا على أي حال فهم صعوبات الكَرَجي من خلال تصوره الخاص لهيكلية الأعداد السالبة. فعلى الرغم من أنه كتب في الفخري: يجب اعتبار الكميّات السالبة كحدود يبدو أن التقليد حكم هذه المعرفة بالأعداد السالبة بأن تبقى معرفة خجولة. وإذا ما قَبِلَ دون تحفظ طرح عددٍ موجبٍ من آخر، فإنه لم يقبل مباشرة أن:

$$x-(-y)=x+y.$$

ونفهم ضمن هذه الظروف صعوبة إعطاء قواعد عامة بالنسبة إلى القسمة واستخراج الجذر التربيعي لكثيرات الحدود ذات المعاملات النسبية. غير أن الذين أتوا بعد الكَرَجي في القرن الثاني عشر صاغوا قواعد الإشارات بكل عمومية:

$$x \leqslant 0, y \geqslant 0 \Rightarrow xy \leqslant 0 \quad (1)$$
$$x \leqslant 0, y \leqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0 \quad (2)$$
$$x \leqslant 0, y \geqslant 0 \Rightarrow x-y \leqslant 0 \quad (3)$$
$$x \leqslant 0, y \leqslant 0, |x| \geqslant |y| \Rightarrow x-y \leqslant 0 \quad (4)$$
$$x \leqslant 0, y \leqslant 0, |x| \leqslant |y| \Rightarrow x-y \geqslant 0 \quad (5)$$
$$x \geqslant 0 \Rightarrow 0-x \leqslant 0 \quad (6)$$
$$x \leqslant 0 \Rightarrow 0-x \geqslant 0 \quad (7)$$

أو كما كتب السموأل: «إن ضرب الناقص في الزائد ناقص، وفي الناقص زائد، وأمّا إذا نقصنا عدداً زائداً من عدد ناقص، بقي مجموع العددين ناقصاً، وإذا نقصنا عدداً ناقصاً من ناقص أكثر منه، بقي تفاضلهما ناقصاً، وإن كان الناقص أقل من المنقوص بقي تفاضلهما زائداً، وإذا نقصنا الناقص من الزائد بقي مجموعهما زائداً، وإذا نقصنا زائداً من مرتبة خالية بقي فيها ذلك العدد بعينه ناقصاً، وإذا نقصنا الناقص من مرتبة خالية بقي فيها ذلك العدد زائداً».

وقد استطاع لاحقو الكرجي، مجهّزين بهذه القواعد، إكمال المهمة واقتراح

نظرية قابلية قسمة كثيرات الحدود واستخراج الجذر التربيعي لكثيرة حدود ذات معاملات نسبية. والطريقة المقترحة من قبل السموأل ليست سوى توسيع خوارزمية إقليدس بالنسبة إلى قسمة الأعداد الطبيعية لتشمل العبارات من نوع:

$$f = \sum_{k=-m}^{n} a_k x^k \qquad m, n \in \mathbb{Z}_+ \cdot$$

وبشكل دقيق ليس المقصود إطلاقاً القسمة العادية في حلقة كثيرات الحدود $K[x]$، حيث K هو حقل بل في حلقة مثل $A[x] = [Q(x) + Q(1/x)]$. ولم يهتم السموأل بشكل صريح بدرجة الباقي. ورغم ذلك فنتائج القسمة صحيحة لأن قسمة f على:

$$g = \sum_{k=-m'}^{n'} b_k x^k, \;\; m', n' \in \mathbb{Z}_+$$

تعود في الواقع إلى قسمة $x^\alpha f$ على $x^\alpha g$، حيث $\alpha = \sup(m, m')$ ونصل عندئذ إلى مسألة القسمة في $K[x]$.

هل تجب الملاحظة أيضاً أنه قد استمر بإجراء القسمة في الحلقة $A[x]$ حتى القرن السابع عشر على الأقل؟ وأحياناً كان السموأل يأخذ عوضاً عن عناصر هذه الحلقة $A[x]$ كثيرات حدود بالمعنى الدقيق: وعندها يحدّد الطريقة للقسمة مع باقٍ. وفي كل الحالات ـ وهذا ما يؤكد أيضاً تصوره المجهّز بشكل كافٍ لمسعاه ـ فهو يعرض كل عنصر من عناصر القسمة في جداول ـ أي عناصر من الحلقة $A[x]$ أو $K[x]$ ـ بحسب تتالي معاملاتها الموجبة أو السالبة.

وليست أقل أهمية في هذا الجبر قضية تقريب الكسور التامة بالعناصر من الحلقة $A[x]$. فلدينا مثلاً:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{20x^2 + 30x}{6x^2 + 12} \approx \frac{10}{3} + \frac{5}{x} - \frac{20}{3x^2} - \frac{10}{x^3} + \frac{40}{3x^4} + \frac{20}{x^5} - \frac{80}{3x^6} - \frac{40}{x^7}$$

حيث يحصل السموأل على نوعٍ من البَسْط المحدود لـ: $\varphi(x) = f(x)/g(x)$.

هذا التقريب صالح فقط حيث تأخذ x قيماً كبيرة وهذا ما لم يحدّده المؤلف بدقة.

وكما استطاع جبريّونا توسيع القسمة العادية حتى كثيرات الحدود، فإنهم اتبعوا

مساراً مشابهاً بالنسبة إلى إستخراج الجذر التربيعي لكثيرة الحدود. فالكَرَجي كان قد اقترح طريقتين لاستخراج الجذر التربيعي لكثيرة حدود ذات معاملات تنتمي إلى Q_+، وكلا الطريقتين مبني على بَسْطِ:

$$(x+y+\cdots+w)^2=x^2+(2x+y)\,y+\cdots+(2x+2y+\cdots+w)\,w.$$

وطريقة الكرجي معممة في كتاب **الباهر** حيث يجري استخراج الجذر التربيعي لكثيرة حدود ذات معاملات تنتمي إلى Q، أو بدقة أكثر استخراج الجذر لعنصر مربع من الحلقة $A[x]$. وهكذا لاستخراج الجذر التربيعي لِـ:

$$B=25x^6-30x^5+9x^4-40x^3+84x^2-116x+64-\frac{48}{x}+\frac{100}{x^2}-\frac{96}{x^3}+\frac{64}{x^4}$$

بواسطة طريقة الجداول، يكتب:

$$\begin{aligned}B&=25x^6+(10x^3-3x^2)(-3x^2)+(10x^3-6x^2-4)(-4)\\&\quad+\left(10x^3-6x^2-8+\frac{6}{x}\right)\frac{6}{x}+\left(10x^3-6x^2-8+\frac{12}{x}-\frac{8}{x^2}\right)\left(-\frac{8}{x^2}\right)\\&=\left(5x^3-3x^2-4+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}\right)^2\end{aligned}$$

حيث يحصل على الجذر. يعرض السموأل هذا المثال كتوضيحٍ للطريقة العامة، «طريق عام» حسب تعبيره.

وعلى اثر توسيع الحساب الجبري ذي العبارات النسبية يتابع الكرجي ولاحقوه تحقيق المشروع نفسه بهدف برهنة «كيف يمكن إجراء الضرب والقسمة والجمع والطرح واستخراج الجذور» على المقادير الجبرية الصّماء. يطرح السموأل السؤال بالعبارات نفسها تقريباً: «في كيفية استعمال الأدوات الحسابية في المقادير الصمّ».

عدا عن النتائج الرياضية البحتة التي يمكن الحصول عليها بواسطة هذا التوسيع فإننا نلج في دراسة مهمة بشكل خاص بالنسبة إلى تاريخ الرياضيات. نقصد بذلك التفسير الجبري للنظرية التي يحتويها الكتاب العاشر من **الأصول** والمعتبر حتى ذلك الحين كتاباً هندسياً من قِبَلِ الرياضيين من تقليد بابوس (Pappus)، وحتى ممن هم بأهمية ابن الهيثم، وبعد ذلك أخذت هذه المفاهيم تستند مع جبريّينا إلى المقادير

بشكل عام، العددية منها والهندسية، وأخذت النظرية مكانها بواسطة الجبر في مجال نظرية الأعداد.

ودون التساؤل ـ لحسن الحظ ـ حول وجود حقل الأعداد الحقيقية انطلق الكَرَجي ولاحقوه من تحديدات الكتاب العاشر كي يضعوا أنفسهم مباشرة على مستوى أعم. وكيما يعطي نفسه الشروط، التي بواسطتها يستطيع التعرف إلى أن العبارات الحاصلة من توافيق (Combinaisons) عدة جذور هي عبارات صمّاء، اتبع الكَرَجي طريقة إقليدس في كتابه العاشر، لكن بفارق أنه وسّع المفاهيم لتشمل كل كمية جبرية، فكتب في **البديع**: «فأقول إن المقادير المفردة بلا نهاية، فأولها المنطق بالإطلاق مثل خمسة، والثاني المنطق بالقوة مثل جذر عشرة والثالث المعروف بإضافته إلى مكعبه مثل ضلع عشرين، والرابع الموسط وهو المعروف بإضافته إلى مال ماله مثل جذر جذر عشرة أو الخامس ضلع مال الكعب، ثم ضلع كعب الكعب، وعلى هذا ينقسم إلى ما لا نهاية».

وعلى غرار وحيدات الحد تنقسم ثنائيات الحدود حتى اللانهاية. وبعد هذا الشرح يعطي الرياضيّون القواعد العامّة لمختلف العمليات وخاصة:

$$x^{1/n}y^{1/m} = (x^m y^n)^{1/mn}$$

$$x^{1/n}/y^{1/m} = (x^m/y^n)^{1/mn}$$

$$(x^{1/m} \pm y^{1/m}) = [y\,[(x/y)^{1/m} \pm 1]^m]^{1/m}$$

ويستعيدون، كالسموأل، عدداً لا بأس به من مسائل الكتاب العاشر ليعطوا حلولاً جبرية مكافئة لحلول إقليدس أو حلولاً أخرى جديدة.

ضمن هذا التقليد إذاً تشكل الجبر الخاص بكثيرات الحدود وأمكن الوصول إلى معرفة أفضل بالبنية الجبرية للأعداد الحقيقية. لنسجل إضافة إلى ذلك عودة جديدة إلى نظرية الأعداد التي قدّمت لعلم هؤلاء الجبريين الأدوات التي كانت تنقصه. هذه العودة كانت موجهة: فالأفضلية، من الآن فصاعداً، معطاة للبراهين الجبرية، وفي هذه المناسبة بالتحديد نلمح ظهور نوع من البراهين بواسطة الإستقراء الرياضي المنتهي.

في فصل من كتاب **الفخري** معنون «مما يعين على استخراج المسائل بالجبر والمقابلة» وكذلك ضمن نص أورده له السموأل، يستعيد الكرجي بعض المسائل من نظرية الأعداد كمسألة مجموع الأعداد الأولى الطبيعية n. ومجموع مربعاتها ومجموع مكعباتها وصيغة الحدانيّة. وإذا ما بقي بعض هذه المسائل عند الكرجي دون برهان

فعليّ، وإذا ما عرضت كذلك دون برهان في الكتب الحسابية ككتاب البغدادي (المتوفى سنة ١٠٣٧) مثلاً ـ في التكملة ـ في القرن الثاني عشر، فقد أُثبتت بالمقابل جبرياً. ومن بين خصائص أخرى كثيرة يقصد التالية:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \quad (2)$$

وكلتاهما مثبتتان، كما بيّنا في مكان آخر بشكل من الاستقراء الرياضي غير متين، والمسمّى «الإرتداد». وكذلك:

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad n \in N \quad (3)$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad (\text{يتبادلان } b \text{ و } a) \text{ ، } \quad n \in N \quad (4)$$

وكلتاهما مثبتتان بشكل من الإستقراء الرياضي الذي ظلّ متّبعاً بطريقة ما حتى القرن السابع عشر.

لكن الكَرَجي ولاحقيه لم يتتجوا فقط في الدراسات الجبرية التي رأيناها، إذ اتسعت أعمالهم لتشمل مجالات أخرى كثيرة منها: نظرية المعادلات المزدوجة التربيع (Bicarrées)، التحليل غير المحدّد، نظم المعادلات الخطيّة. وفي الفصل الأخير مثلاً حلّ السموأل نظاماً من ٢١٠ معادلات بعشرة مجاهيل. وعدا عن مجموع هذه النتائج والطرائق الجديدة المرتبطة بحسبنة الجبر، بإمكاننا الكشف عن وجود تفكير ما حول الرياضيات، أو بالأحرى فلسفة ما لم تصدر عن فيلسوف بل عن عالم رياضيات. هذا التفكير أو هذه الفلسفة رغم كونها متعلقة بهذا الموضوع أو ذاك لا تبني نظاماً فلسفياً رغم كونها، إذا ما قورنت بالنظم الميتافيزيقية الشهيرة في القرون الوسطى، تبدو ذات بنية موجزة وتدليل ضعيف، إلّا أن ميزتها على الأقل هي نتاج الرياضيّ أثناء ممارسته علمه. ومن الجائز أنها لهذا السبب لم تذكر من قِبَل من أرّخوا للفكر في العصر الوسيط الذين استحوذت عليهم الفلسفة التقليدية أو علم الكلام، أو ردة الفعل التقليدية على هذه الاتجاهات الممثلة بابن حزم وابن تيميّة. ومهما يكن من أمر ورغم كون هذا الفكر يستعير موضوعه عرضياً من بابوس (Pappus) أو بروكليس (Proclus) فالانقلاب الحاصل في الجبر الجديد واضح وجلي، فهو يعطي المواضيع محتويات مختلفة.

انطلاقاً من الجبر إذاً بدأ التأمل حول هذا العلم وصلاته بالهندسة، وطريقته وتصنيف المسائل والقضايا، لنذكر في هذا الخصوص أن السموأل بعد أن ماثل بجلاء بين الجبر والتحليل ـ معدّلاً بذلك هذه المسألة التي بقيت أساسية خلال قرون طويلة في فلسفة الرياضيات، أي: التحليل والتركيب، يرجع السموأل من جهة أخرى إلى مؤلف مكرّس بكامله لهذه المسألة لم يُعثر عليه مع الأسف. والكل يعلم ما كان لهذه المماثلة من أهمية في القرن السابع عشر. والأكثر من ذلك أن السموأل، مسترجعاً محتوى مختلفاً، أعطى بلغة ومنطق عصره تصنيفاً للقضايا الرياضية مهمّاً وصعب التبرير في آن معاً، وهكذا فقد صنّف القضايا إلى:

١ ـ ضرورية.
٢ ـ ممكنة.
٣ ـ مستحيلة

١ ـ القضايا الضرورية

أ ـ صف جزئيّ أوَّل

(١) «القضايا» أو المسائل التي «يكون مطلوبها موجوداً في جميع الأعداد» أو بعبارة أخرى المتطابقات؛ مثل:

إذا كان: $z=x+y$ فإن $z/x+z/y=(z/x)\cdot(z/y)$.

(٢)«ما يكون مطلوبه غير موجود في كل الأعداد ولكنه يوجد في أعداد لا نهاية لها». أو بعبارة أخرى، قضايا لها عدد لا نهائيّ من الحلول، دون أن تكون متطابقة، مثل: $x+10=a^2$

وَ $x-10=b^2$

(٣) «ما له أجوبة كثيرة متناهية» وتصلح كأمثلة، مسائل عديدة غير محددة.

(٤) «ما له جواب واحد». مثل:

$$xa=u^2,\ xb=u \Rightarrow u=a/b^2.$$

ب ـ صف جزئي ثانٍ

يصنف المؤلف مرة ثانية القضايا «الضرورية» بحسب عدد الشروط التي يجب أن تتوافر فيها، أي شرط واحد أو أكثر.

(١) شرط واحد، مثل: ليكن a وَ b عـددين معطيـين، حدِّد x وَ y بحيث: $x^2+y^2=a$ وَ $xy=b$. فنجد كشرط ضروري أن $a\geqslant 2b$.

(٢) شروط كثيرة، مثـل: نـظام مؤلف من n معـادلـة بِـ m مجهـول حيث $m\leqslant n$.

٢ ـ القضايا الممكنة

المقصود بها، القضايا التي لا نعـرف أن نبرهن صحتهـا ولا خطأهـا أو كما كتب السموأل: «كل قضية ومسألة ينظر فيها الحاسب أو المهندس فإنه إذا بحث عنها لا يخلو من أن يقع له برهان على وجودها فيسمّيها واجبة، أو على امتناعها فيسميها ممتنعـة ومستحيلة، أو لا يجد بـرهانـاً على وجودها ولا على عدمها أو امتناعها فهو إذاً جاهل بها فيسميها ممكنة، لأنه لم يبرهن عـلى وجودهـا وعـدمها لأن ذلـك مؤدٍ إلى أن الموجـود معدوم والـواجب ممتنع وهـذا محال». ولا نعـرف لمـاذا لا يعطي السموأل للأسف أي مثال فهو يذكر فقط أنه يجب عـدم الخلط بين المسـائل الممكنة والمسائل غير المحددة إذ إن الأخيرة هي ضرورية.

٣ ـ القضايا المستحيلة

يقصد بها القضايا التي «متى فرضت موجودة أدّى وجودها إلى المحال».

أقل ما يمكننا قوله عن هذا التفكير حول الممارسة الرياضية وبصورة خاصة الجبر الجديد، انـه قاد الـرياضيَّ إلى إخضـاع المفاهيم الأرسـطيّة حـول الضروري والممكن والمستحيـل لتصبح مفـاهيم حول قـابلية الحسـاب (Calculabilité) وحول الـلاتقريـر المتعلق بالمعنى. بالإضافة إلى ذلك وضعت هذه المفـاهيم في علاقـة مع مفهـوم قابليـة حل المعادلة وبشكل أعم مع قابلية الحساب.

عندما يتحدث السموأل عن قضية ضرورية A فهـو يقصد إثبـات A أو نفي A بينما يقصد بالقضية الممكنـة A أن A لا تقرر أو أننـا لا نملك أية طـريقة لـبرهنة A أو لنقض A.

من هنا نرى كيف أمكن لـمـارسة الـرياضيّ أن تقـود إلى تفكير مـا حول فلسفـة الرياضيات. إن مؤرخ الفلسفة العربية في العصر الوسيط قد ارتكب، باعتقادنا، خطأً بتجاهله هذه الفلسفة.

- ٢ -

لقـد رأينا فيـما سبق كيف أن مشروع الجبريّين الحسابيين يندرج مبـاشرة تحت

سمة التوسيع: توسيع مجال تطبيق العمليات الحسابية. وليست النتائج الحاصلة بواسطة هؤلاء الرياضيين مهمة بحد ذاتها فقط، بل لكونها سمحت ببداية أخرى جديدة للجبر. وهذه البداية ليست مرتبطة بالحساب بل هي متعلقة بالهندسة. إنها تبدو للوهلة الأولى تحت سمة التوسيع أقل بكثير مما هي سمة الانتظام (Systématicité): المقصود تنظيم دراسة المعادلات التكعيبية وإعداد النظرية الخاصة بها، ولفهم مغزى هذه المهمة علينا العودة إلى تاريخ نظرية المعادلات التكعيبية، أي أولاً إلى الدراسة التي قام بها الخيّام نفسه (١٠٤٨ ـ ١١٢٣) فقد كتب الخيّام في مؤلفه الجبري:

«وإن فيها [أي صناعة الجبر والمقابلة] أصنافاً يُحتاج فيها إلى أصناف من المقدمات معتاصة جداً متعذر حلها على أكثر الناظرين فيها. أما المتقدمون فلم يصل إلينا منهم كلام فيها، لعلهم لم يتفطنوا لها بعد الطلب والنظر أو لم يضطر البحث إياهم إلى النظر فيها أو لم ينقل إلى لساننا كلامهم فيها. وأما المتأخرون فقد عنَّ للماهاني منهم تحليل المقدمة التي استعملها أرشميدس مسلمة في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتابه في الكرة والاسطوانة، بالجبر، فتؤدي إلى كعاب وأموال وأعداد متعادلة فلم يتفق له حلّها بعد أن فكر فيها مليّاً، فجزم القضاء بأنه ممتنع حتى نبغ أبو جعفر الخازن وحلها بالقطوع المخروطية».

ويتابع الخيّام:

«ثم افتقر بعده جماعة من المهندسين إلى عدة أصناف منها. فبعضهم حلَّ البعض، وليس لواحد منهم في تعديد أصنافها وتحصيل أنواع كل صنف منها والبرهان عليها كلام يعتدّ به إلاّ صنفين سأذكرهما. فإني دوماً لم أزل، كنت شديد الحرص على تحقيق جميع أصنافها وتمييز الممكن من الممتنع في أنواع كلّ صنف ببراهين».

في هذا النص المهم بالنسبة إلى تاريخ الجبر يؤكد الخيّام إذن:

(١) أنه لم يصل من اليونانيين أي شيء يتعلق بنظرية المعادلات التكعيبية وأنه إذا كان أرخميدس قد طرح مسألة هندسية بالإمكان إرجاعها إلى معادلة تكعيبية فلا هو ولا شارحوه استطاعوا بالمقابل صياغة هذه المسألة بطريقة جبرية، إذ إن هذه المهمة تعود إلى الماهاني كما أن حلّها يجب أن ينسب إلى الخازن. لكن لا الأول ولا الثاني ولا سابقوهما ولا معاصروهما حاولوا إعداد نظرية فعلية للمعادلات التكعيبية.

(٢) علينا التمييز ليس فقط، بين مسألةٍ هندسية يمكن إرجاعها إلى معادلة تكعيبية وترجمتها جبريّاً، بل بين حلٍّ هذه أو تلك من المسائل وإعداد نظرية للمعادلات التكعيبية.

إن مسألة مكانة هذه النظرية تتحدّد في: هل أن تقويم مؤلّفها الخاص الذي وضعه الخيّام يتعلق بالتاريخ الفعلي كما نعرفه على الأقل؟ كلّنا يعلم أن الرياضيين اليونانيين واجهوا مسألتي تضعيف المكعب وتثْليثُ الزاوية، وكلتاهما مسألة من الدرجة الثالثة. بالإضافة إلى ذلك فقد عرف الرياضيون العرب وناقشوا كثيراً القضية المساعدة التي استخدمها أرخميدس لكن البرهان عليها ليس موجوداً في كتابه في **الكرة والاسطوانة**. ونعرف أيضاً أنه بالإمكان إرجاع هذه القضية إلى معادلة تكعيبية من نوع: $x^3-cx+a^2b=0$ التي كانت قد حُلّت من قبل إيتوسيوس (Eutocius)، وفيما بعد من قِبَل الرياضيين العرب مثل ابن الهيثم، وكانت الوسيلة إلى هذا الحل تقاطع القطع المكافىء $x^2=ay$ مع القطع الزائد $y(c-x)=ab$. ولم يفكر الرياضيون إطلاقاً قبل الماهاني بإرجاع هذه المسألة أو أية مسألة أخرى كتضعيف المكعب $(x^3=2)$ إلى عباراتها الجبرية.

إن ازدياد الاتجاه نحو ترجمة المسائل من الدرجة الثالثة جبرياً، خلال القرن العاشر لذو دلالةٍ وذلك لسببين على الأقل: التقدم الظاهر لنظرية المعادلات من الدرجة الثانية والحاجات التي فرضها علم الفلك. فالتقدم في هذه النظرية أعطى الجبريّين مثالاً للحلول الجبرية ـ بواسطة الجذور ـ فأرادوا إخضاع المعادلات من درجة أعلى إلى هذا المثال، وخاصة المعادلة التكعيبية. وطرح علم الفلك مباشرة مسائل متعددة من الدرجة الثالثة فقد كان الماهاني نفسه (المتوفى ٨٨٤ ـ ٨٧٤؟) عالم فلك. لكن البيروني (٩٧٣ ـ ١٠٤٨) بشكل خاص، ولكي يحدّد أوتار بعض الزوايا ويتمكن من بناء جدول الجيب، صاغ بوضوح المعادلتين التكعيبيتين:

$x^3-3x-1=0$ حيث x هو وتر زاوية ٨٠°

وَ $x^3-3x+1=0$ حيث x هو وتر زاوية ٢٠°

وقد حُلّت هاتان المسألتان بطريقة التجريب.

هذه الترجمات الجبرية لمسائل من الدرجة الثالثة التي تمت بواسطة الماهاني والبيروني وغيرهما من الرياضيين المعاصرين لهذا الأخير مثل أبي الجود بن الليث طرحت مسألة لم تخطر ببال أحد من قبل وهي: هل بالإمكان إرجاع هذه المسائل إلى معادلات تكعيبية؟ وبالتالي هل بالإمكان تصنيف مجموع المسائل من الدرجة الثالثة؟ وإن لم تكن طريقة حلّها تضاهي بلياقتها حل المعادلة من الدرجة الثانية، أي بطريقة الجذور، وهل يمكن على الأقل إعطاء حلول بطريقة منهجية؟ هذان السؤالان لم يكن

ليفكّر بها دون تطوير نظرية المعادلات المضاعفة التربيع ودون الحساب الجبري المجرّد أي دون التجديد الأول للجبر مع الكَرَجي. فلا الرياضييون اليونان ولا العرب كان باستطاعتهم طرح السؤال قبل هذا التجديد. هذه المسألة وسعي الخيّام لإيجاد حل لها سوف يشكلان بداية أخرى للجبر.

قبل السعي لإيجاد الحل بدأ الخيّام بإعطاء تصنيف للمعادلات من الدرجة الثالثة وما دون. لقد شبِّهت هذه الدراسة أحياناً بنظرية هندسية للمعادلات التكعيبية، فإذا قصدنا بالنظرية الهندسية استعمال الأشكال الهندسية لتعيين الجذور الحقيقية الموجبة لهذه المعادلات، فهذه المقارنة تخفي الكثير من المبالغة دون شك، لأن الشكل الهندسي لا يلعب إلّا دوراً مساعداً في جبر الخيّام وبخاصة جبر لاحقه شرف الدين الطوسي (المتوفى حوالى ١٢١٣). وبعيداً عن الالتزام بهذه الأشكال، فقد فكّر الرياضيون بالدالّة ودرسوا المنحنيات بواسطة معادلاتها. وفي الواقع إذا كانت حلول هذه المعادلات قد تمت بواسطة تقاطع منحنيات مخروطية، يبقى أنّ تقاطعها قد بُرهن في كل مرة جبرياً، أي بواسطة معادلات المنحنيات.

وهكذا ففي مؤلف الخيّام وكذلك في مؤلف الطوسي خاصة، ودون الدخول في تفصيل برهانيهما، نجد من بين العديد من الأمثلة تلك، الأمثلة التالية:

— الطريقة المتّبعة لحلّ: $x^3+ax=b$ تعود إلى حل المعادلتين التاليتين في آنٍ معاً:

(معادلة دائرة) $$\left(x-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$$

(معادلة قطع مكافىء) $$x^2=\sqrt{a}\,y$$

حيث $\sqrt{a}$ هو ضعف وسيط القطع المكافىء وَ b/a هو قطر الدائرة. هذا يعطينا المعادلة: $x(x^3+ax-b)=0$. بحذفنا الحل المبتذل نحصل على المعادلة المطلوبة.

— الطريقة المتّبعة لحل: $x^3=ax+b$ تعود إلى حل المعادلتين التاليتين في آنٍ معاً:

(معادلة قطع مكافىء) $$x^2=\sqrt{a}\,y,$$

(معادلة القطع الزائد القائم) $$x\left(\frac{b}{a}+x\right)=y^2$$

حيث $\sqrt{a}$ هو ضعف وسيط القطع المكافىء وَ b/a هو القطر المستعرض للقطع

الزائد. ومن هنا نحصل على: $x(x^3-ax-b)=0$. فإذا ما حذفنا الحل المبتذل حصلنا على المعادلة المطلوبة.

بإمكاننا مضاعفة الأمثلة لكي نبيّن أن كتابة تاريخ الهندسة الجبرية لا يمكن أن تتم دون دراسة ما قدّمه هذا التيار الجبري لهذا العلم.

وما يضاهي بأهميته هذه الدراسة هو إدراك وتعبير الطوسي لأهمية المُميِّز في المناقشة للمعادلات التكعيبية. وهكذا كيما يفترض وجود الجذور الموجبة في المعادلة: $x^3+a=bx$ حيث $(a, b\geqslant 0)$ يلاحظ أولاً أن كلّ حلٍّ (موجبٍ) لهذه المعادلة يجب أن يكون أصغر أو مساوياً لـ$b^{1/2}$ لأنه إذا كان x_0 جذراً، نحصل على:

$$x_0^3 + a = bx_0$$

أي: $$x_0^3 \leqslant bx_0$$

أي: $$x_0^2 \leqslant b$$

كما يجب أن يحقق هذا الجذر، من ناحية أخرى، المعادلة: $bx-x^3=a$ ويفتش الطوسي عن القيمة التي تبلغ بها $y=bx-x^3$ حدّها الأقصى. ويجد بعد أن يُعدم المشتق الأول أن $x=(b/3)^{1/2}$ ، فيصبح الحد الأقصى إذن:

$$b\,(b/3)^{1/2} - (b/3)^{3/2} = 2\,(b/3)^{3/2}.$$

هناك إذن جذر موجب، إذا وفقط إذا كان:

$$a \leqslant 2\,(b/3)^{3/2} \Leftrightarrow \frac{b^3}{27} - \frac{a^2}{4} \geqslant 0.$$

وهكذا فإن دور المميِّز: $D = b^3/27 - a^2/4$ قد أُثبت وأُعدَّ جبرياً لدراسة المعادلة التكعيبية.

وعلى الرغم من حصر دور المميِّز، إلاّ أنه لم يعمّم ولم يدخل بعد في الحلول القانونية أي في الحلول الجذريّة. ولمعالجة هذه الصعوبة طوَّر الرياضيون أنفسهم طريقة لحل المعادلات العددية تتعلق بها، بشكل أساسي، الطريقة المدعوّة «طريقة ڤيت أو طريقة روفيني ـ هورنر» كما بيّنت في مكان آخر.

نعلم في الحقيقة أن الخيّام كان قد وجد طريقة كهذه لحل المعادلات $x^n=q$.

ونعلم أيضاً أن البيروني قبل الخيّام انشغل بالمسألة نفسها. لكن لم يبقَ من دراسة البيروني إلّا عنوانها بينما لا نملك من دراسة الخيّام إلّا خلاصة موجزة تسمح بمعرفة أن هذه الطريقة اتخذت أساساً لها فكّ $(a+b+c+\cdots k)^n$ حيث $n\in N$ ، وبفضل دراسة المعادلات للطوسي، نعلم الآن بوجود تلك الطريقة ليس فقط للمعادلات من نوع $x^n = q$ ولكن للحالة العامة أيضاً. طُبقّت هذه الطريقة من قبل الطوسي على المعادلات كافة، ويمكن أن تعرض بسرعة على الشكل التالي:

لتكن: $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = N$

لنعتبر أن: $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$

حيث الدالّة f قابلة للإشتقاق عدة مرّات. بإمكاننا التعرف إلى أيّ مجالٍ ينتمي الجذر، ليكن $x\in[10^r, 10^{r+1}]$ ، إن x تكتب على النحو التالي:

$$\rho_0\ 10^r + \rho_1\ 10^{r-1} + \ldots + \rho_r$$

بحيث إن $r = [m/n]$

وحيث m هي المرتبة العشرية لِـ N وَ $[m/n]$ هي القسم الصحيح من m/n

— نحدّد $x_1=\rho_0 10^r$ إمّا بالقسمة أو بالتفتيش عن العدد الصحيح الأكبر بقوة n^e الموجود في N.

— نعتبر أن: $N_1=N-f(x_1)$ وَ $x=x_1+x_2$ ، $N_1=g(x_2)$ حيث g هي كثيرة حدود لِـ x_2 ودرجتها $n-1$. فنحصل على قيم تقريبية لِـ x_2, x'_2 محددة بواسطة:

$$N_1 = nx_1^{n-1}x'_2 + a_1(n-1)\,x_1^{n-2}x'_2 + \cdots + 2a_{n-2}x_1x'_2 + a_{n-1}x'_2. \qquad (1)$$

ونتعرف هنا على المشتق f' عند النقطة x_1. فتكون:

$$x'_2 = \frac{N_1}{f'(x_1)}.$$

ونجري بعدها إعادات متتالية.

لنفترض أننا قد حدّدنا قيم: $x_1, x'_2, \ldots, x'_{k-1}$

حيث: $x = x_1 + x'_2 + \cdots + x'_{k-1} + x_k$ ، $k = 2, \ldots, n.$

وتعطى القيمة التقريبية x_k، حيث:

$$x'_k = \frac{N_k}{f'(x_{k-1})} \qquad (2)$$

وبحيث: $N_k = N - f(x_1 + x'_2 + \cdots x'_{k-1})$

وَ: $x_{k-1} = x_1 + x'_2 + \cdots x'_{k-1}.$

كقيمة تقريبية لـ x نجد: $x_1 + x'_2 + \cdots + x'_n$ حيث القيم x'_i معطاة بواسطة الصيغة (2)

وإذا لم يطبق الطوسي هذه الطريقة إلاّ على الغرض الذي كرّس بحثه له أي المعادلات من الدرجة الثالثة وما دون، فمع هذا كل شيء يدل أنه أدركه بطريقة عامة. وعلى كل حال، فالخلاصة الموجزة للخيّام كانت قد عرضت المسألة بكل عموميتها.

طريقة حل المعادلات العددية، ودراسات المنحنيات بواسطة المعادلات وحصر دور المميِّز في حل المعادلات التكعيبية، كلها فصول من الجبر المجدَّد. والمسافة المجتازة منذ الخوارزمي لا تقاس فقط بما يتعلق بتوسيع علم الجبر وحده، ولكن أيضاً بتغيير المنحنى للمعرفة الجبرية. وإذا ما توطّد الجبر كعلمٍ للمعادلات الجبرية التي ليست مرتبطة فقط بأعدادٍ وبقطع مستقيمة، بل أيضاً بمنحنيات في المستوى، فقد دمج الجبر إذن التقنيات الموروثة والتي شاركت بنشاط في تجديده. بإمكاننا أن نورد بين هذه التقنيّات استعمال التحويلات الأفَينية من قِبَل مُطبّق للمتناهي في الصغر كإبراهيم بن سنان.

وهكذا بواسطة تحويل أفَيني $x \to x+a$ أو $x \to a-x,$ حوّل الطوسي المعادلات المطلوب حلّها إلى معادلات أخرى يعرف طريقة حلّها.

وكي يتمكن من حل هذه المعادلات، درس الطوسي أكبر قدر ممكنٍ من العبارات الجبرية. وقد أخذ بطريقة منهجية ولكن دون أن يسمّيه المشتق الأول لهذه العبارات التي يعدمها (عادلها بالصفر) ويبرهن أن جذر المعادلة الناتجة عن ذلك، إذا ما عُوِّض في العبارة الجبرية، أخذت هذه الأخيرة نهايتها العظمى. وبمجرد أن يجد واحداً من جذور المعادلة التكعيبية، ولكي يعيّن الجذر الآخر، يحصل أن يدرس معادلة من الدرجة الثانية التي هي عبارة عن حاصل قسمة المعادلة التكعيبية مضروباً بـ $(x-r)$ حيث r هو الجذر الذي سبق أن حصل عليه. وبعبارة أخرى إنه يعرف أن

كثيرة الحدود ax^3+bx^2+cx+d تقبل القسمة على $(x-r)$ إذا كان r هو جذرٌ للمعادلة : $ax^3+bx+cx+d=0.$

وأخيراً بعد أن درس المعادلة يحاول تعيين الحد الأعلى والحد الأدنى لقيم جذوره الحقيقية.

وإذا كنا مصرّين على التذكير بهذه النتائج، فليس هدفنا فقط عرض وقائع تاريخية ما زالت مجهولة، لكننا نودّ بشكل خاص تبيان المستوى التقني والنظري لهذا الجبر وتعقّد المسائل التاريخية التي يطرحها، حالما نكف عن تعداد نتائجه ونعمل على فهم تاريخه. وبهذه الطريقة نجد أنه ظهر مع هؤلاء الجبريين استخدام المشتق خلال مناقشة المعادلات الجبرية وأثناء حل المعادلات العددية. ومع هذا فالكل يعلم أن استعمال المشتق الأول إذا ما رُبط بالبحث عن النهاية العظمى لم يكن جديداً. ومع أنه كان يثار مع هذا أو ذاك من الأمثلة، إلّا أن هذا الاستعمال بقي عارضاً ولم يحدث أن اصبح مفهوم المشتق جزءاً لا يتجزأ من حل المعادلات الجبرية والعددية إلّا مع هؤلاء الجبريين وعلى الأخص الطوسي. وتعميم هذا الاستعمال للمشتق أصبح ممكناً في الواقع على أثر تعميم نظرية المعادلات التي حاول إعدادها من جهة، ومن خلال أبحاث الرياضيين الذين كانت نشاطاتهم تنصبّ في مجالات أخرى، من جهة ثانية.

والحقيقة أن أعمال بني موسى وابن قرّه وحفيده ابراهيم بن سنان وابن الهيثم وغيرهم كثيرين ممن لم يكونوا جبريّين حول تحديدات المتناهيات في الصغر، مهّدت بطريقة غير مباشرة لمساعي هؤلاء الجبريين. إذ برفضهم معالجة العمليات الجبرية بطريقة هندسية كما هو واضح عند بنو موسى، ومثبتٌ لدى لاحقيهم، وباكتشاف قوانين حسابية جديدة لحساب المساحات والأحجام، أعطوا لهؤلاء الجبريين تقنيات مجرّبة فيما يتعلق بالبحث عن النهاية العظمى. لكن مجرد التعداد والتصنيف للمسائل من الدرجة الثالثة الضروريين لإعداد نظرية المعادلات التي سبق واختلط الجبر بها، والتفتيش عن طريقة لحل المعادلات التكعيبية، كل هذا وسّع مجال التطبيق لتقنيات المشتغلين على المتناهيات في الصغر، وبالتحديد البحث عن المشتق الأول. هذا المشتق الذي وُجد بفضل هؤلاء وتوسع بواسطة الجبريين، حُكِمَ عليه بالتواري بسبب ضعف الرموز الجبرية وهذا ما يفسّر حسب رأينا استعماله المنهجي رغم بقائه دون تسمية أو عنوان.

- ٣ -

منذ ما يقارب نصف قرن كتب تانّيري (P.Tannery) أن الجبر العربي «لا يتجاوز

بشكل من الأشكال المستوى الذي بلغه ديوفنطس» من حقنا أن نتعجب دون شك من رأي كهذا، طُرِحَ بعد أعمال ويبك (Woepcke)، لكن الأنكى من أي دهشة أننا نرى في هذا الرأي الكثير من ايديولوجية المؤرخ أكثر مما نرى استنتاجاتٍ فعليةً لبحثه التاريخي. ومع ذلك ففي حالة تانّيري تبدو هذه الايديولوجية بشكل سافر، لكنها غالباً ما تبدو أقل وضوحاً عند غيره من المؤرخين أمثال زوتين (Zeuthen) وحديثاً مع بورباكي (Bourbaki).

وإذا كنتُ أصرُ على التذكير برأي تانّيري فذلك لإظهار الصعوبة البالغة في الدراسة السوسيولوجية للعلم في سيرورته التاريخية أكثر بكثير من تصويب خطأ حاصل في تاريخ الجبر. فبالنسبة إلى تانّيري مثلاً، ليست هذه الدراسة سوى الجواب عن السؤال: ما هي الظروف الثقافية التي بقي الجبر على أثرها دون أي تقدم يذكر عن الحالة التي كان عليها عند الأقدمين؟ ونظراً إلى انعدام التساؤل عن ظروف الانتاج الجبري، فهو منشغل بغيابه، غير أن الملخص الذي قدمناه يظهر جيداً أننا سائرون بالضرورة إلى التساؤل عن كيف ولماذا تجدّد الجبر، ليس بالنسبة إلى الأقدمين فقط - هذا إذا افترضنا أنه كان لديهم جبر ما - بل بالنسبة إلى الجبريين العرب الأوائل أمثال: الخوارزمي وأبي كامل.

ولأن طريقة طرح السؤال محددة من خلال ايديولوجية المؤرخ، فلا يمكن والحالة هذه إلاّ أن تستتبع أجوبة متناقضة. ولأن هذه الايديولوجية واضحة على مستوى السؤال لا بدّ وأن توجد في صياغة الجواب. ولنفترض للحظة أن السؤال الثاني هو الصحيح إجمالاً، فلا شيء يمنع أن يصار إلى التفتيش عن الجواب في اتجاهات مختلفة. وهكذا انطلاقاً من تطورٍ للجبر لا يقارن بالنسبة إلى الرياضيين اليونانيين. ورياضيي العصر الوسيط اللاتيني، فكّر كلٌ من أرنالدز (M.Arnaldz) وماسّينيون (L.Massignon) بأن العربية كلغة ساميّة «كان من نتيجتها أن حوّلت المعارف التي عبّرت عنها باتجاه الفكر التحليلي، والذرّوي (Atomistique) والمناسباتي والحكمي». وفي دراسة حديثة حول «الارتداد الدلالي للمفهوم» يعرض كيف أن اللغات السامية تميل إلى التأليف المختصر والمجرد «المتجبرن» على نقيض الميل «الآريّ المُهندس». وبحسب هؤلاء المؤلفين فإن البنية الألسُنيّة هي المسؤولة عن تطور «علم البناءات الجبرية». من الواضح إذاً انه حتى لو كان السؤال في موضعه الصحيح فلا شيء يحمي الجواب من الوقوع في شرك ايديولوجية أخرى، تعود في المثل السابق، إلى أرنست رينان (Ernest Renan).

إن التساؤل عن الأسباب التاريخية للنتاج الجبري يجب أن يمر أولاً في رفض الايديولوجية على أكثر من صعيد: على صعيد السؤال وعلى صعيد عناصر الجواب. لكن معرفة العلم موضوع البحث هي شرط ضروري وإن لم يكن كافياً بالتأكيد للحياد الايديولوجي. فبالنسبة إلى مؤرخ العلوم العربية تبقى هذه المعرفة مجتزأة وناقصة. وتبيّن هذه الواقعة البسيطة أننا ما زلنا بعيدين عن هدف هذه المناقشة وأنه من السابق لأوانه في الوقت الحاضر طرح السؤال حول الشروط الاجتماعية للإنتاج العلمي.

هناك عنصران آخران يعززان موقفنا الذي نعترف صراحة بسلبيته. ففي الحقيقة بالنسبة إلى الجبر موضوع البحث هنا، لا يمكن طرح مسألة جبرية إلّا بطريقة جوهرية. وقد سبق أن بُحِثَتْ استقلالية الجبر وأُكدّت على مستوى إنتاج المبرهنات وإنشاء القضايا أما حصة الفلسفات والايديولوجيات فقد أقصيناها إلى مرحلة أخرى لاحقة. هذه الإحاطة المعرفية تَسِمُ أي علمٍ مكوّن حقاً، وقبل أن تُقترح مسألة شروط الإنتاج يجب أن تُتوسَّط وتتجزّأ. وهذا التوسُّط يتطلب المرور بالعلوم كافة - الحساب، وعلم المثلثات والأرصاد الفلكيّة... - التي يرتبط بها هذا العلم. كما تتطلب التجزئة معرفة القيم المتبادلة للعوامل الثقافية التي بإمكانها بطريقة أو بأخرى التأثير في الإنتاج العلمي. وفي حال عدم التمكن من الدخول في التفاصيل، نقع بالضرورة على أحد هذين التوهمين: أحدهما ترستندالي والآخر تجريبيّ. التوهم الأول يأخذ وسائل طرح الموضوع على أنها الموضوع بعينه وهكذا فمذهب دوركهايم (Durkheimienne) أو مذهب ڤيبر (Weberienne) أو حتى الماركسية تصبح هي التفسير نفسه. ويصبح لدينا في الغالب اعتبارات عامة لا تحيط أبداً بالوقائع التي نحن بصدد شرحها. أما التوهم التجريبي فيسمح بالاعتقاد أن تعداد العناصر الثقافية هو الجواب الكافي. هذان التوهمان يسودان حتى الآن التفسيرات لظاهرة الإنتاج العلمي.

ولا يسعهما على أي حال إلّا أن يتعززا في الحالة التي نحن بصددها هنا بسبب ندرة الدراسات العلمية التي تتناول الخلافة الإسلامية وبخاصة نظامها أو أنظمتها الإقتصادية.

ولكن هل من الضروري الاحتماء بهذا الموقف السلبي والوقوف في وجه أي تفحّص للموضوع المقترح في هذه المناقشة؟ إن موقفاً متزمتاً يقودنا نحو ما يمكن تسميته حقاً بالإستنكاف، وترك المجال لأكثر الاعتبارات إبهاماً. واعتقد أنه يهمنا هنا

المجازفة باستغلال الإمكانية المتبقية، أي صياغة تخمينات محتملة لكنها لا تدّعي مطلقاً الحلول مكان الجواب الحقيقي، والإشارة إلى فرضية أو عدة فرضيات للبحث. يجب الإلتزام إذاً بتوسّط السؤال للتحديدات الاجتماعية للجبر الجديد. وعوضاً عن أخذها كنقطة انطلاق، علينا الرجوع إلى العلوم التي شاركت بنشاط في ولادة هذا العلم.

من بين هذه العلوم هناك علمان ساهما في تكوين هذا العلم الجديد: الحساب ومختلف فروع الأرصاد الفلكية، تدخّل الأول في تحويل الجبر القديم كما رأينا وذلك بنقل عملياته إلى الجبر حالما تم استخلاص هذه العمليات ومنهجتها إضافةً إلى تعميم بعض التقنيات على مستوى العبارات الجبرية كخوارزميات إقليدس فيما يتعلق بالقسمة واستخراج الجذر التربيعي. أما الفلك فانطلاقاً من حاجاته الخاصة دفع الجبريَّ إلى استعادة مسألة المعادلات العددية ودرس المنحنيات بواسطة المعادلات.

إن مسألة التحديدات الإجتماعية للجبر الجديد تتحدد وتطرح نفسها للوهلة الأولى بالارتباط مع مختلف فروع علم الفلك والحساب وما يعنينا هنا هو الحساب فقط.

وإذا ما عدنا إلى أعمال الحُسّاب الذين سبقوا ولادة هذا الجبر، وهم جبريّون في غالب الأحيان، نتحقق من وجود انشغال مزدوج لديهم: توسيع علمهم وإعطائه «حقل تمرين». ونعني بذلك حقلاً من الأمثلة دون ربط ضروري بينها حيث يلجأ إلى تطبيق الأداة الرياضية لإخضاع الممارسة التجريبية للمعايير العقلية. أي ليحلّ نظرياً مسائل تطبيقية. من هنا يمكن قياس أهمية الأداة الرياضية بمعزل عن أهمية المثال المختار أو فعّالية الحل الذي تم الحصول عليه.

إن التطوير النظري والتطبيق الحسابي لإخضاع الممارسة التجريبية للمعايير العقلية كانا المهمتين الموكلتين على الدوام إلى الرياضيين في أبحاثهم الحسابية. ولقد سمحا بتحديد بعض الاتجاهات الخاصة بالبحث. إن تكوين وتوسع الخلافة العباسية قابل وواجه عدة نظم حسابية، ومنها اثنان أحدهما حساب اليد والآخر حساب الهند، طرحا على الرياضيين مسائل نظرية وعملية في الوقت نفسه. مدعومون من دوائر الدولة بشكل خاص، حاول الرياضيون توسيع كلٍّ من هذين النظامين الحسابيين بمساعدة معارف رياضية أخرى، والتحقق من صحة قواعد كلٍّ منهما ومقارنتهما بشكل ضمني تقريباً، وتأليفهما بما يسمح بتأسيس وتسهيل استعمالهما بجعلهما في كتيّب خاص بالموظف وأحياناً كان الرياضي نفسه يؤلف بحثاً خاصاً كالكَرَجي مثلاً.

أن تكـون الأبحاث الحسـابية قـد أُثـيرت في جـزءٍ منهـا عـلى الأقـل من قبـل، كحاجات المؤسسات، فهذا الأمر مشهود به من قِبَل المؤلفين أنفسهم.

يقـدم البوزجـاني مؤلفه: «فيـما يحتـاج إليـه الكتّـاب [أي كتّـاب الـدواوين وأُمنـاء السر والموظفين... إلخ] والعمّال [أي الولاة، وأهل الحسبة، وجباة الضرائب...] وغيرهم على أنه كتاب يشتمل على جميع ما يحتاج إليه الكامل والمبتدىء والتابع والمتبوع من الحساب وصناعة الكتابـة وأعمال الخراج ومسائـل الأنواع التي تجـري في معامـلات الدواوين من: النسبـة والضرب والقسمة والمسـايح والـطوق والمقاسـات والتصريف وغير ذلـك مما يتعـامـل بـه النـاس في طبقـاتهم ويحتـاجـون إليـه في معايشهم».

ويبدو هذا الاهتمام نفسه في بحث الكـرجي **الكافي** ونصـادفه ولكن مشـاراً إليه فقط في مؤلفات الحساب الهندي. وهكذا فإبن اللبّان (حوالى ١٠٠٠) كتب كخلاصـة لكتابه «هذه الأصول... كافية في جميع الحساب (كذا) النجوميـة والمعامـلات التي تخرج بـين أهل العـالم». أمّا تلميـذه النسوي (حـوالى ١٠٣٠) الذي بـدأ بتأليف بحث حسـابي باللغـة الفارسية لـدائرة الـريّ، قدمهـا بعد ذلـك في النسخة العـربية لهـذا الكتاب عـلى أنها الطريقة التي تمكّن الناس من استخدامه في مختلف الأعمال الجارية فيما بينهم والفلكيّون في فنهم.

وبإمكاننا مضاعفـة الأمثلة المستعارة من ريـاضيي ذلك الجيـل، أي منذ أواخـر القرن التاسع، وهي في الحقيقة مرحلة الخلافة العباسية حيث نشهد:

(١) تعزيز وتطوير الإنشاءات الإدارية على مستوى الخلافة ككل.

(٢) مضـاعفة النـماذج المصغّرة عن هـذه الإنشاءات في المقـاطعات عـلى أثـر ضعف سلطة الخلفاء.

(٣) ظهـور فئة اجتـماعية هي فئـة «الكتّاب» أو المـوظفين المـرتبطة بمضـاعفـة الإنشاءات أي «الدواوين» والنماذج المصغرة عنها.

إن الوجود المستقل لهذه الفئة الإجتماعيـة ووزنها الإجتماعي أدهش مؤرخي تلك الحقبة، فالطبري والصّولي والمسعودي وخاصة الجهشياري في كتابه **الـوزراء والكتّاب** أعطوا وصفاً مفصلاً عنها. من المعروف على كل حال أن تعريب الدواوين بدأ بشكلٍ مبكّرٍ نسبيّاً أي بين ٧٠٠ وَ ٧٥٠ بحسب المقاطعات، كما يـذكر الجهشيـاري والكندي المؤرخ.

وفي نهاية الخلافة الأموية رسم أحد هؤلاء المـوظفين، هـارون بن عبد الحـامد،

النموذج المثالي لزملائه من خلال نصٍّ حفظه من قبل الجهشياري ونقله ابن خلدون ونفهم منه أن يكون متعلماً، يجيد الحساب عدا عن صفاته الأخلاقية والاجتماعية، وعليه أن يمتلك معارف في اللغة العربية والتاريخ والحساب والعلوم الدينية وفقاً لمتطلبات عمله. وبهذا المعنى كتب ميتز (A.Metz) أن الوالي أو موظف الدولة «هو ممثل الثقافة الأدبية، وأنه لا يعالج العلوم الدينيّة إلاّ وفقاً لمقتضيات عمله وثقافته» ويضيف: «هذه الفئة من الموظفين هي ما يميّز غالباً الدولة الإسلامية عن أوروبا في بداية القرون الوسطى».

وهكذا فوجود هذه الفئة الاجتماعية وإعداد أفرادها هو الذي حثَّ إلى حدٍّ ما على كتابة الأبحاث، ليس في الحساب فقط، لكن في الجغرافية الاقتصادية أيضاً كالكتاب الشهير لقدامة بن جعفر عن الضرائب العقارية ومعاجم اللغة الفلسفية والاقتصادية والعلمية في تلك المرحلة، ككتاب الخوارزمي **مفاتيح العلوم**. ولن نتمكن من وصف تلك الطبقة بأفضل مما قاله كاهين (C.Cahen) عندما كتب يقول إنها:

«بيروقراطية أي نظام يسيطر عليه جيش من الكتبة المتخصصين الذين أصبحوا عبارة عن فئة تستمر وإن تغيّر الخلفاء والوزراء. و[ورّاقة] أي نظام فيه يكتب كل ما يمكن كتابته بالتفصيل حسب قواعد فنية وأساليب معينة لا يعرفها أحد سواهم، والتي تضمن لهم احتكار هذه المهن». دواوين المال ودواوين الجيش ودواوين البريد (الاستخبارات العامة) ودواوين المراسلات (القنصليات)، وعدد لا بأس به من الدواوين الأخرى، كلها كانت بحاجة إلى الحساب المالي، وتتطلب أبحاثاً من الحساب الدقيق سهل الاستعمال.

إن ما اصطُلح على تسميته «حقل التمرين» في الحساب مكوّن بالتحديد من هذه المسائل المطروحة على موظفي الدواوين. وهكذا فقد تكرّس الفصلان الرابع والخامس من كتاب أبو الوفا للمسائل المالية كما هي، في حين أن الفصل السادس يختص بمسائل تنظيم الثروات ومدفوعات الجنود ومعاشاتهم والضمانات والأرصدة وإجازات المرور، عقدها ونقضها، بالنسبة إلى السفن التجارية التي تسافر عبر الأنهر، وإلى التجار المسافرين وتصريحات المراسلات وسعاة البريد، وكل الأعمال الأخرى التي تديرها الدواوين.

ويفهم منذ البدء، من خلال مقارنة الحسابيْن أن السهولة والسرعة في الاستعمال أصبحتا معيار الأفضلية. وفي الحقيقة، ولكي يبيّن أهمية الحساب الهندي، قدّم الإقليدسي هذه القيم العملية وكتب:

«وإن أكثر الحسّاب مضطرون إلى العمل به لما فيه من الخفة والسرعة وقلة الحفظ وحصر الزمان فيما يحاول من الجواب وقلة شغل القلب بما يعانيه ويراه مضطراً بين يديه... فإنا نقول إنه

علم وعمل يحتاج فيه إلى آلة كما يحتاج الكـاتب والصانع والفارس إلى مـا يعمل بـه، فإنـه متى عدم الصانع ما يعمل به أو تعذّر عليه، لم يمكنه الوصول إلى ما يحتاج إليه من العمل. وليس في اتخاذ ذلك صعوبة ولا تعذر ولا مؤونة تثقل على مستعد له، ذلك لما فيه من قلة التعب وكثرة المنفعة».

فيبدو إذاً انه، استجابةً لحـاجتين جـديدتـين ووفقاً لهـذه القواعـد الجديـدة عاد الـرياضي إلى الحسـاب الهندي أو حسـاب اليد. والـتزم التحقق من صحة قـواعدهمـا وتنظيم تفصيلهما. هذه العودة والمواجهة الضمنية على الأقـل، أظهرت بـوضوحٍ أكـثر من ذي قبل الشمولية والطبيعة المجردة لمفهوم العملية الحسابية. منظورة بهذه الـطريقة وممنهجـة بطريقـة ما، أصبحت العمليـات منذ ذلـك الحين وسـائـل لتنـظيم العـرض الحسابي. كان من نتائج وجود أنواعٍ عدة من الحساب أن تُظهر نسبيّـة أنظمـة الترقيم لتبيّن بالتالي أن الجوهري هو في اختيار الاساس وفي العمليـات التي يجب تطبيقهـا، إذ لم يتردد الإقليدسي في التصريح «ولو جعلت (الحروف التسعة) بحروف الجمل أو يصطلح عليها قوم فيما بينهم كان جيداً». هذه الفكرة غـدت عامـة لدرجـة أن الخوارزمي الكـاتب تمكن من القول في كتابه المذكور: «وقد يكتب بهذه الحروف كـما يكتب حسّاب الهنـد، وهو أن يكتب بتسعـة أحرف منهـا من الألِف إلى الطاء وتـوضع هـذه العلامـة في المواضـع الخاليـة مكان الصفـر في حساب الهندكي يحفظ بها الترتيب فقط».

وبمعنىً آخر، ما ان يتم اختيار الأساس، حتى نستطيع استبـدال أرقام الحسـاب الهندي بأي نظامٍ آخر من العلامات، وضمن هذه الشروط لا ترتبط العمليات مطلقاً مـع أية كتـابة خـاصة لنـظام الترقيم. ويميـز الكـرجي بشكـل عـام بـين نـوعـين من المعطيات: المقادير النسبية والصمّاء من جهة، وعمليات الضرب والقسمـة والرفـع إلى قوة والجمع والطرح من جهة ثانية.

لكن هذه العمليات بالتحديد هي التي سمحت بتنظيم العرض بطريقـة منهجية في بداية الحساب الهندي، وإذا ما لعبت دوراً في حساب اليـد فبطريقـة تضاهيهـا من النـاحية المنهجيـة، ولكن أقل منهـا اكتمالاً. وهكـذا فشروح الاقليـدسي وابن اللبّـان والنسـوي تمتلىء بعمليـات الجمع والـطرح والضرب والقسمة واستخراج الجذر، بينـما حسـاب اليد لا يحتـوي سوى الضرب والقسمـة بشكلٍ أسـاسي، واحيانـاً استخـراج الجذر فقط، على اعتبار أن قانوني التشكيل +، −، افتُرِضا معروفين.

إن العمليات، مدركـة بطريقـة أكثر شمـولية وتجـريداً عنهـا في الماضي ومتخـذة كمحور لتنظيم الأبحاث، قد أصبحت مهيئة لتطبيقات أخرى. وبهذه الطريقة ظهرت لكلٍ من يريد توسيع الحساب الجبري، إذ تمكنه من أن يعمِّم في الجبر النتائج الحاصلة

من تطبيق هذه العمليات على الحساب. ويعود إلى الكَرَجي ولاحقيه، الشهرزوري والسموأل أمر هذه المهمة.

مناقشة

رشدي راشد: إن أحد موضوعات هذه الندوة هو مسألة العلاقة بين العلم والمجتمع في تاريخ الفكر العلمي. وبما أن ما يهمّني هو الجبر، فعليّ أولاً أن أصف بأدق ما يمكن حالة هذا العلم: الأسئلة التي ستطرح عن العلاقة بين العلم والمجتمع تتحدد بنفسها بالمعرفة المكوّنة لدى المؤرخ عن حالة هذا العلم. وهذه الصعوبة تبدو أنها تزداد أكثر عندما يتعلق الأمر بالرياضيات عموماً وبالجبر خصوصاً. ما أود قوله هو أن الجبر حقل مميّز وقسري في آنٍ معاً. فهو تميّز بالمقدار الذي يسمح في حال وجود علاقات بين العلم والمجتمع محدّدة بما يمكن أن أسميه بـ«الإنغلاق المعرفي» في الإنتاج الرياضي. أود القول ببساطة فيما يخص «الإنغلاق المعرفي» أنه انطلاقاً من عتبة معينة أو مرحلة ما من تطور العلم، تُنْتَجُ مبرهنة في الجبر، تنتج فقط، بواسطة سلسلة من المبرهنات الأخرى التي كانت موجودة من قبل، وبلا أسباب خارجة عن الرياضيات. هذا الإطار يسمح بجعل هذه العلاقة علم مجتمعٍ أكثر بداهة وجعلها أكثر وضوحاً عنها في العلوم الأخرى التي لا تمتلك المقدرة المفهومية ذاتها. لكن هذا «الإنغلاق المعرفيّ» هو قسري لأنه لو وجدت صلات ما بين العلم والمجتمع أو الجبر والمجتمع، لوجب مضاعفة العلوم الواقعة في الوسط كيما يفهم على أي صعيدٍ وبأية كيفيةٍ يتحدد موقع هذه الصلات. أود أن أُبيّن أنه لا يمكننا على الإطلاق درس الصلات بين الجبر والمجتمع (أو الظروف الاجتماعية) دون المرور على الأقل بالحساب وعلم الفلك أي دون تعداد الفروع المختلفة للحساب ولعلم الفلك.

غاني (J. Gagne): لقد أكدّت لتوّك أن «الإنغلاق المعرفي» جعل العلاقة التي تدرسها جليّة، وهذا ما أودّ توضيحه، فقد قلتَ: إنه يجعل العلاقة أكثر جلاءً وأنا أتساءل ما إذا كان يجعلها على العكس، أكثر غموضاً.

راشد: أفضل استعمال الكلمتين «مميّزاً وقسرياً» فإذا كان الجبر قد تطوّر انطلاقاً من حلّ مسائل عملية، مثلاً، على هذا المستوى البسيط، فيمكننا أن نرى مباشرة تدخل هذه الأسباب العملية وهذه المسائل العملية. فإذا كان الجبر قد تطوّر من أجل تحديد أو تقسيم المواريث، فهذا يندمج في نظامٍ اقتصادي بالإمكان تحديده وباستطاعتنا رؤية هذه العلاقة بطريقة مباشرة. إذ يمكن لتقسيم الميراث أن نستعين بالجبر لكن الجبر في تطوره - وهذا ما أحاول تبيانه - ليس بحاجة إطلاقاً إلى تقسيم الميراث، وهذا يعني أنه لا يوجد إنتاج مبرهنات ابتدعت من أجل أسبابٍ خارجة عن العلم.

ڤيكتور (S. Victor): منذ أن أصبح الجبر علماً. استمر كعلمٍ مستقلٍ وهنا أنا موافق تماماً، ولكن عندما نتذرع بهذه الأسباب للقول إنه لم يكن هناك إطلاقاً أية علاقة بين توزيع الميراثات وبداية الجبر، فأنا لا أُوافق أبداً، لأن صلة كهذه قد وجدت بالفعل في بدايات الجبر.

راشد: يمكن لهذا الأمر أن يكون صحيحاً بالنسبة إلى البدايات الأولى للجبر مع الخوارزمي. وأبي كامل... إلخ، لكنه لم يكن كذلك في القرنين الحادي عشر والثاني عشر.

بوجوان (G. Beaujouan): هناك مشكلة الإنطلاق، وعندما ينطلق علم ما فهو يتابع بقاءه وفقاً لمنطقه الداخلي وبحساسية أقل بكثير تجاه الحوافز الخارجية التي كانت تدفعه في بداياته.

راشد: لم أقل إنه لم يكن هناك من «إنغلاق معرفي» عند الخوارزمي أو أبي كامل. أنا أتحدث عن القرنين الحادي عشر والثاني عشر.

موردك (J. Murdoch): لكنك قد أقصيت نوعاً واحداً من العلاقة الاجتماعية إذا صحّ القول. أي أنك أقصيت تأثير شيءٍ ما خارجيّ أو اجتماعي على اختراع أو اكتشاف أو انتاج مبرهنة ما. وكما يبدو لي، *إن ذلك يتجاهل نوعاً من الأشياء المعروفة كثيراً. فبعد اكتشاف وإثبات مبرهنة ما، ما هي العوامل الاجتماعية التي تعمل لتطبيق واستعمال هذه المبرهنة.*

راشد: أنا موافق بالنسبة إلى مسألة التطبيقات، لكن لو عُدنا إلى تكوين الجبر نفسه لرأينا كيف أن العناصر الاجتماعية تدخلت ليس في الجبر كجبر لكن بواسطة الحساب وعلم الفلك وبواسطة علوم أخرى ليست من الجبر.

موردك: أنت تقول إنه لتطبيق الجبر على أشياء خارجية، عليك أن تلجأ إلى الحساب، حَسَناً، لنأخذ الحساب مثلاً - ولننسَ الجبر في الوقت الحاضر - هل أنّ تطبيقه بحاجةٍ إلى وسيلة أخرى؟ فنسأل لماذا؟ صحّ الأمر أم لم يصح.

راشد: هذا يتعلق بحالة الحساب، ولذا قلت إنه يجب معرفة أي حساب نقصد. أما الآن فأنا أحاول أن أبينّ ببساطةٍ الصعوبة الخاصة بالجبر، فما الذي نقصده إذن بالشرط المميّز والقسري في هذه العلوم التي تسمح بطرح مشكلة العلاقة بين العلم والمجتمع؟ «متميزة» بالقدر الذي يسمح بالقول إن العلاقة إذا وجدت فهي أكثر تحديداً وأكثر جلاءً من تلك التي بين العلم والمجتمع بالنسبة إلى الميتافيزيقا، أو بالنسبة إلى فيزياء القرون الوسطى حيث يمكن أن تتدخل مجموعة من الايديولوجيات. لكن الأمر مختلف مع الجبر، إذ إنه علم امتلك حياده تجاه الايديولوجيات. يمكننا إذن أن ندرس مباشرة، العلاقة بين العلم والمجتمع. لكننا مقيدون من جهة أخرى بالمستوى نفسه لهذا العلم بسبب أنه قد غدا علمياً فتبدو أيدينا مقيدة عند النظر في مسألة تدخل عناصر اجتماعية في تكوينه.

موردك: إنك تؤكد مع هذا أن أيدينا تكون أقل تقييداً عند أخذنا بعين الاعتبار تأثير العوامل الإجتماعية على الحساب.

سيلاّ (E. Sylla): أليس هذا واقعاً تاريخيّاً: إنه عند النظر في الأعمال الجبرية لا ترى صلات إجتماعية، بينما ترى هذه الصلات عند النظر في الأعمال الحسابية التي تخبرك عن تطبيقاتها؟

راشد: إنه لواقع تاريخي، لكن هناك شيئاً أبعد من هذا الواقع، لديك على الأقل ثلاثة أنظمة من الحساب - الهندي وحساب اليد والستيني - وهكذا ينشأ السؤال: لماذا جربوا في وقت ما توحيد الحساب، ماذا يعني وكيف تمَّ لهم هذا التوحيد؟ ما هي المتطلبات التي أدّت إلى فعل ذلك؟ التخمين الذي سمح بالإجابة عن مثل هذه الأسئلة بسيط جداً؛ هو وجود فئة اجتماعية جديدة. فئة من الكتّاب، كمنظمة إجتماعية مثلاً تسعى إلى توحيد نوع من الحساب لأنها بحاجة إلى هذا النوع من التوحيد في إجراء الحسابات. لقد تم تطوير الحساب مع هذه الفئة الجديدة خاصة، وبسبب هذا

النوع من الحاجة الإجتماعية التي يمكن إثباتها بواسطة كتب الحسابيّين الذين عالجوا فيها ذاك النوع من المسائل أمثال أبو الوفا والكرجي والشهرزوري والسموأل. . . إلخ.

صبرا **(A.Sabra)**: يمكنك بطريقة حسيّة أن تبيّن ذلك بصورة أفضل، كأن تقول أو أن تظهر نوع المسائل التي شغلت أولئك الناس وأولئك الكتّاب، كيف ولماذا التمسوا هذا النوع من الحساب الموحّد. على أي حال وفيما يخص العوامل الاجتماعية التي عرضت فأنا أستغرب أن يكون بإمكاننا الذهاب إلى أبعد من ذلك خاصة أن تقديراتنا هي في أحسن الأحوال غامضة.

موردك: نعم. لكن رشدي جعلها أقلّ غموضاً عندما اعتبر أن السبب الاجتماعي المساعد قد حدّد تطور الحساب وهذا شكّل ضرورة تطورٍ في الجبر وقد أتى التطور الأخير نتيجة وجودٍ ضروري داخل التيار العام.

صبرا: أنا موافق، لكن ما كنّا بصدد بحثه كان الجبر وليس الحساب، ما نتج عن نقاشنا وما قاله رشدي نفسه هو: إن الفترة التي كان يعمل فيها على موضوع تطور الجبر تعتبر من داخل الجبر نفسه، وهذا معقول. لكن المرء يتساءل عمّا حدث في الفترة ما بين الخوارزمي وأبي كامل، أنت لا تتحدث عن ذلك، ولا يعرف أحد الكثير عن تلك الفترة مما يجعل معالجتها صعبة إلى حدٍّ ما.

راشد: صحيح، أنه أمر صعب ولا يمكن الإجابة عنها كمعظم مسائل الأصل، حتى أنني أعتبر من الخطأ التساؤل عنها في الوقت الحاضر. فقد نحصل على نادرة تاريخية في أحسن الأحوال.

صبرا: لا أعتقد أن النظر في الأصول يقود بالضرورة إلى اكتشاف نوادر في التاريخ. أنا لا أرى في الواقع كيف أن مؤرخ الحساب يستطيع تجنب مسألة الأصول ولا يمكنني القول انك تستطيع كذلك تجاهلها، أنها تعطيك بعد كل هذا منهاجاً للبحث، قد يستطيع أحدنا أن يرى بعض الشبه بين مبرهنة عند هؤلاء المؤلفين مثل الكاشي وبين شيءٍ ما من الصين، سيكون من الخطأ دون شك القول «أنظر، إلى هذا الشبه، لا بدّ أن هذا الشيء قد أتى من ذاك». يكون الأمر مرغوباً إذا قادك ذلك إلى السؤال عن إمكانية حدوث الإنتقال. عندها يصبح الأمر مثمراً وتستطيع أن تعمل كمؤرخ. إنها مشكلة وأنا لا أقول ان التاريخ يبلغ نهاياته بذلك.

راشد: يجب التنبه مع كل هذا إلى خطر تحوّل مسألة الأصول، إذ ما وجدت حلاً، إلى مسألة الأصالة.

بوجوان **(G.Beajouan)**: إن كانت الأصالة، نكون قد وقعنا من جديد في إشكالية السابقين.

صبرا: هذا ما كنت أحاول فعله لأحمي نفسي من قوله، فما الذي يمكنك فعله تجاه مسألة الأصل بعد كل هذا. لنقل إن مجمل الأسئلة المعنيّة بمفهوم الأصالة ما زال قائماً وغير واضح. خذ عمل كندي (Kennedy) مثلاً، فقد شغله موضوع الإنتقال، يقول في إحدى مقالاته: «في كلّ مرّة يكون لديك مبرهنة، يواجهك شيء ما ذو قيمة جوهرية، وكلما أصبح الأمر أكثر تعقيداً كلما غدا أكثر تشويقاً». لقد تأثرت كثيراً بهذا القول لإنه حقيقي. المهم بالنسبة إلى المؤرخ هي القيمة الجوهرية التي تكمن في مبرهنة جديدة أو اكتشاف جديد ولا أعتقد بإبعاد المؤرخ لمرحلة لاحقة، لأن استدعاء الأسئلة حول المنشأ يجعل من مسألة الأصالة والقيمة الجوهرية مسألة أكثر تعقيداً وتصبح كذلك أكثر

تشويقاً وغنى تاريخياً، ويبدو لي أنك إذا رميت بها بعيداً تكون قد أوقفت العمل من ناحيته التاريخيّة وملت به باتجاه شيءٍ من فلسفة العلوم. أنا أقول ان مسائل المنشأ والأصالة تبقى موضوعاً مطروحاً.

راشد: لكن مسألة الأصل تطرح سؤالين على الأقل: السؤال الأول يتعلق بالموقف، أي طرح سؤال الأصل دون تحويله إلى سؤال عن الأصالة. والسؤال الآخر الذي يقوم في عدم الخلط بين التكوين التاريخي والبنية المنطقية لهذه النظرية التي نحن بصدد درسها. هذان السؤالان يختلطان في الغالب مما يسمح بالقول بوجود جبر عند إقليدس ونظرية معلومات عند أرسطو وهكذا دواليك. إنه إذاً سؤال قرارٍ واستراتيجية، لكنّ هذا يتعلق بتاريخ العلوم أيضاً وبمدى معرفتنا لهذا التاريخ. ففي تاريخ العلوم عند العرب مثلاً، لا نعرف من المخترع وماذا اخترع. وعندما يتحدث لوكي (Lukey) وكثير غيره كما تفضلت عن الكاشي فهم لا يعرفون مطلقاً أن السموأل والطوسي يعود إليهما القسم الأكبر من الاكتشافات المنسوبة إلى الكاشي. ولوكي ولاحقوه المهتمون بالسؤال عن الأصل راحوا يفتشون عنها في الصين وهذا الخطأ ليس منطقيّاً فقط بل تاريخياً أيضاً. إلى هنا يقودنا السؤال عن الأصل في الوقت الحاضر على الأقل.

صبرا: ما تقوم به الآن هو العمل على برنامج دراسة تاريخ ردم الثغرات.

راشد: لقد ذكرت ببساطة الشروط الضرورية من أجل عملٍ مجدٍ فيما يتعلق بالأصول، يمكن لهذه الشروط أن تلتزم برفض الحلول السهلة فيما يخص الاستمرارية. هل يجب التذكير بأن الاستمرارية التاريخية ليست بالضرورة استمرارية منطقية. إن التصويب التاريخي لمؤلف ما يعني أولاً تحليلنا لفهم بنيته المنطقية. إن دراسة نصٍّ للكَرَجي كجبري مثلاً دون فهم المساهمة الأساسية التي حملها الكرجي يتطلب على الفور بحثاً حول الأصول وهذا يضيّع الجوهري ويضيّع مساهمة الكرجي. إن البحث عن مصادر جبر الكرجي هو العودة حكماً إلى جبر الخوارزمي وأبي كامل. ولنفرض أننا نعرف جميع سابقي الكرجي، فلن يمكننا أن نفهم، إذا ما وقفنا عند ذلك فقط ما هو أساسي في عمله، أي الانطلاق الجديد للجبر بفضل ما أسميته حسبنة الجبر. قد نتمكن من البحث بشكل صحيح عن المصادر إذا ما فصلنا التكوين التاريخي عن البنية المنطقية، عندها سوف يتبدل السؤال عن الاصول كليّاً.

صبرا: ما تقوله ليس في الحقيقة معاكساً لهذا البرنامج. فأنت تقول فقط إنه إذا كان عليك تنفيذه فعليك بالتأكيد تنفيذه بشكل جيد.

موردك: قد يقول أحدهم: إن عدم سرورك بما يتم في تاريخ الرياضيات له علاقة بالطرق المتبعة عادة في كتابة هذا التاريخ، مثالاً على ذلك، إذا سأل أحدهم ما هي التكوينات التي علينا أن نحاول ملء الفراغ فيما بينها في غالبية تاريخ الرياضيات ـ كانتور (Cantor)، وتروفك (Tropfke) مثلاً ـ إذ إن ما يفعلونه ليس سوى التركيز على النتائج أو المبرهنات أو نوعٍ خاص من الأمثلة. هذا ما هو مرسوم. وإنه لغاية في الصعوبة إيجاد من يتتبع داخل الجبر مثلاً، استخدام قاعدة الخطأين، ليس لمجرد معرفة أين حصلت بل لماذا، أو من استعمل نظرية التناسب، أين ولماذا؟ هذا يعني تتبع الطرق والتصورات زيادة على النتائج. أما الآن، فإن هذا النوع من الأمور يبدو لي مثمراً بشكل لا يصدّق.

رابعاً: الاستقراء الرياضي: الكَرَجي والسموأل(٧٢)

- ١ -

لقد نُقّح تاريخ الاستقراء الرياضي وأعيدت كتابته مراتٍ عديدة منذ عام ١٩٠٩. إنَّ مرةً واحدة لا تشكل عادة في تاريخ العلوم. وهكذا، فقد بدأ الأمر برأي بسيط قصير جداً؛ ثلاث صفحات من (Bulletin of American Mathematical Society)، زعزع بواسطتها ڤاكا(G.Vacca)(٧٣) تأكيداً مقبولاً بالإجماع تقريباً من قِبَل المؤرخين ومفاده: أن الإستقراء الرياضي هو من منجزات القرن السابع عشر ويجب أن يُنسب بالدرجة الأولى إلى باسكال (Pascal). لكن في البدء كان هناك مورَوليكو (Maurolico) لا باسكال، فمورَوليكو هو «المكتشف الأول لمبدأ الاستقراء الرياضي». (The First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction). لم يكن هذا في كتاب المثلث الحسابي إذن وليس كما قيل بمعزل عن هذا الكتاب في أعمال جاك برنوللي (Jacques Bernoulli)(٧٤) حيث نجد مبدأ الاستقراء الرياضي مصاغاً للمرة الأولى، ولكن بالضبط في أعمال رياضيٍّ من القرن السادس عشر هو مورَوليكو. منجذبون باكتشاف ڤاكا، أدخل بعض المؤرخين، وليس أقلّهم أمثال كانتور (Cantor)، وغانتر (Günther)، وبورباكي (Bourbaki)، دون أي فحص إضافي هذا القادم الجديد: مورَوليكو.

بمعزل عن الشكوك التي يمكن أن نكوّنها حيال مقالة ڤاكا من حيث قيمتها الذاتية، يجب على الأقل أن نعترف بأنها وضعت موضع التساؤل وبطريقة غير مباشرة تأكيدات المؤرخين وطرحت من جديد مسألتين في آن معاً: **الأولى** تاريخ مبدأ الاستقراء الرياضي، **والثانية** طريقة كتابة هذا التاريخ.

---

(٧٢) *Archive for History of Exact Sciences*, vol.9, no.1 (1972), pp.1-21.

(٧٣) G.Vacca, «Maurolycus, the First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction,» *Bulletin of American Mathematical Society*, vol.16 (1909), pp.70-73,

مقتنعاً بأهمية اكتشافه، أعاد ڤاكا إصداره في العديد من المنشورات الأخرى. أنظر:

La Revue de métaphysique et de morale, vol.19 (1911), pp. 32-35, et *Bolletino bibl. stor. mat.*, vol.12 (1910), pp.33-35.

(٧٤) Florian Cajori, «Origin of the Name «Mathematical Induction,» *American Mathematical Monthly*, vol.25, no.5 (1918), p.197 sq.

الجواب الأكثر براعة عن هذه المسألة جاء بعد ٤٤ عاماً بشكل نقد لڤاكا. فبعد فحصٍ مفصّلٍ لعمل موروليكو بيّن فريدونتال (M.Freudenthal)[(٧٥)] أن هنالك ثلاثة أماكن كحدٍّ أقصى بإمكاننا التعرّف من خلالها إلى شكل مهزوز من الاستقراء الرياضي، بينما نجد عند باسكال مبدأ الاستقراء الرياضي، مصاغاً للمرة الأولى بشكل مجرد. وعلى الرغم من أن فريدونتال يردُّ الاعتبار إلى باسكال، فالأطروحة تحتمل بعض الفوارق: موروليكو يعرف بوجود شكلٍ قديمٍ من الاستقراء الرياضي، وباسكال ككثيرين غيره عمل انطلاقاً من هذا الشكل قبل أن يتجاوزه ويتمكن من إدراك مبدأ الإستقراء الرياضي في شكله المجرد.

منذ دراسة فريدونتال، واستناداً إليها على أيّ حال، استعاد مؤرخان آخران على الأقل هذه القضية، أحدهما هارا (M.Hara)[(٧٦)] وهو باسكاليّ النزعة فتناسى تحفظات فريدونتال جاعلاً من باسكال بدايةً مطلقةً للإستقراء الرياضي في التاريخ، والثاني هو رابينوڤيتش (M.Rabinovitch)[(٧٧)] الذي يُرجع بطريقةٍ دقيقةٍ الإستقراء إلى ليڤي بن جرسون (Levi Ben Gerson) ويبيّن أن هذا الأخير هو «أول كاتب عُرف باستخدامٍ منهجيٍّ للإستقراء الرياضي بكلّ عمومية وعرفه كوسيلةٍ رياضية مميَّزة».

«The earliest writer known to have used induction systematically in all generality and to have recognized it as a distinct mathematical procedure».

هذه الأبحاث الأخيرة تؤكد أن القضية المطروحة عام ١٩٠٩ تحرَّكت، بالتأكيد لكن كي يُعاد طرحها من جديد بالعبارات نفسها.

من جهتنا سوف نعرض عناصر لم تنشر سابقاً وستزيد من التعقيد وتبيّن أن محاولات أكثر أهمية وسابقة ليس لموروليكو فقط، بل أيضاً لليڤي بن جرسون موجودة عند رياضيَّين، أحدهما لديه أعمال معروفة من قِبَل المؤرخين وهو الكَرَجي[(٧٨)] والآخر

---

(٧٥) Hans Freudenthal, «Zur Geschichte der Vollständigen Induction,» *Archive international d'histoire des sciences,* vol.6 (1953), pp.17-37.

(٧٦) Kokiti Hara, «Pascal et l'induction mathématique,» *Revue d'histoire des sciences,* vol.15, nos.3-4 (1962), pp.287-302.

(٧٧) N.L. Rabinovitch, «Rabi Levi ben Gershon and the Origins of Mathematical Induction,» *Archive for History of Exact Sciences,* vol.6, no.3 (1970), pp.237-248.

(٧٨) الكرجي (أو الكرخي) عُرف منذ ترجمة ويبك (Woepcke) لكتابه في الجبر، وترجمة هوكايم لكتابه الكافي في الحساب. لا نعرف الكثير عن حياته سوى أنه عاش في بغداد في نهاية القرن =

اكتُشفت أهميته حديثاً وهو السموأل[79]. لكن من الممكن أن هذا التعقيد بالذات سيجعل مسألة تاريخ الإستقراء الرياضي قابلة لإجابة أكثر دقة. من هنا نستطيع طرح السؤال المنسيّ فيما يخص مورروليكو وليفي بن جرسون: لماذا لجأ الكَرَجي والسموأل إلى طرق جديدة من البراهين؟ وكلّما استطعنا تقديم إجابة عن هذا السؤال كلّما أمّلنا بتأكيد حضور أو غياب مبدأ الاستقراء الرياضي. إذ بغياب هذا السؤال يختلط تاريخ المسألة بتاريخ النص النادر. على كلٍّ حال فإن مؤرخاً مطّلعاً ومجرّباً مثل إيتار (M.Itard)[80] يجد الإستقراء الرياضي حتى عند إقليدس بينما فريدونتال الذي لا يقلّ عنه إطلاعاً وتجريباً يردُّ هذه المحاولات المختلفة إلى ما قبل تاريخ المفهوم، وبما أن تاريخ العلوم ليس علم آثار تجريبياً، فيجب عليه ليس فقط معرفة تحديد نصٍّ ما لكن أيضاً معرفة في أية لغة وبأي أسلوب كُتِب هذا النصّ. لنبدأ كمرحلة أولى بإيراد النص.

- ٢ -

في نصٍّ للكرجي يعرضه السموأل في كتابه **الباهر** نجد للمرة الأولى في التاريخ - على حد علمنا - صيغة ثنائية الحد وجدول معاملاتها ونلاحظ وجود نموذج

= العاشر وبداية القرن الحادي عشر. عن سيرة الكرجي العلمية، انظر مقدمة كتاب: الكرخي، **كتاب البديع في الحساب**. انظر أيضاً مقالتنا حول الكرجي، في:

Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography*.

(٧٩) انظر سيرة السموأل بن يحيى بن عبّاس المغربي (المتوفى عام ١١٧٥) الذاتية في كتابه **إفحام اليهود**، ترجمة ونشر مرسي برلمان (نيويورك: المجمع الأميركي للبحوث اليهودية، ١٩٦٤)، ج ٣٢. أما عن السيرة العلمية للسموأل، انظر:

Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*.

ولقد استندنا في هذه الدراسة على مخطوطي: «آيا صوفيا (٢٧١٨)،» و«عزّت أفندي (٣١٥٥)،» حيث رقمت الصفحات وفق المخطوطة الأولى.

(٨٠) انظر: Jean Marc Gaspard Itard, *Les Livres arithmétiques d'Euclide* (Paris: Hermann, 1961), p.73.

حيث كتب: «ومع هذا نستطيع أن نجد بعض البراهين بطريقة الإستقراء الرياضي أو بطريقة الإستقراء التام. ولا نقع إطلاقاً على اللازمة الحديثة المدعيّة بعض الشيء «تحققنا من الخاصية ٢ وبرهنّا أنه إذا كانت صحيحة بالنسبة لعدد ما، فهي صحيحة بالنسبة للعدد الذي يليه، إذن إنها صحيحة بشكل عام» وأولئك الذين لا يجدون الإستقراء التام إلاّ مصاحباً بلازمته يحق لهم القول إنهم لم يجدوه في كتاب **الأصول**. وفيما يخصّنا فإننا نجده في القضايا ٣، ٢٧، و٣٦ من الكتاب السابع؛ ٢، ٤، و١٣ من الكتاب الثامن، و٨ و٩ من الكتاب التاسع».

من البرهان الذي سوف نسميه R_1 والذي سوف نورد مراحله المتتالية.

يبدأ المؤلف ببرهنة بعض القضايا المتعلقة بالتبادلية والتجميعية لعملية الضرب ولتوزيعية الضرب على الجمع.

قضية ١: «كل أربعة أعداد فإن ضرب مسطح الأول والثاني في مسطح الثالث والرابع مساوٍ لضرب مسطح الأول والثالث في مسطح الثاني والرابع»(٨١).

$$[(ab)(cd) = (ac)(bd)] \Leftrightarrow$$

البرهان: «فنفرض أربعة أعداد أ ب جـ د. ولنضرب أ في ب وليخرج هـ ولنضرب أ في جـ وليخرج ز، ولنضرب جـ في د وليخرج ط < ولنضرب ب في د وليخرج ح >، فأقول إن ضرب هـ في ط مساوٍ لضرب ز في ح. وبرهانه: أن عدد أ ضرب في عددي ب جـ فخرج من الضرب عدد هـ و ز. فنسبة هـ إلى ز كنسبة ب إلى جـ وأيضاً فإن عدد د ضرب في عددي ب جـ فخرج من الضرب عددا ح ط، فنسبة ح إلى ط كنسبة ب إلى جـ، وقد كانت نسبة هـ إلى ز كنسبة ب إلى جـ، فنسبة هـ إلى ز كنسبة ح إلى ط، فمسطح هـ في ط مساوٍ لمسطح ز في ح، وذلك ما أردنا أن نبين»(٨٢).

مقدمة: مهما كانت الأعداد الثلاثة المعطاة: $a, b, c,$ فإن $(ab)c = (ac)b$.

يذكر المؤلف بالإضافة إلى ذلك بتوزيع الضرب على الجمع.

قضية ٢: «إن حاصل ضرب العدد $\overline{AB}$، $(\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB})$ كما بيّن ذلك إقليدس في الكتاب الثاني الشكل (١)، يقول السموأل) بأيّ عددٍ يساوي حاصل ضرب $\overline{AC}$ بذلك العدد زيادة على حاصل ضرب $\overline{CB}$ بذلك العدد نفسه»(٨٣).

---

(٨١) Al-Samaw'al, Ibid., p.43.

(٨٢) المصدر نفسه.

(٨٣) المصدر نفسه، ص ٤٤ (ظهر الورقة).

وهذا يكافىء : $[(a+b)\lambda=(a)\lambda+(b)\lambda]$

بواسطة هذه القضية وغيرها من القضايا المتعلقة بالجمع والضرب يتولّى السموأل برهان العبارتين التاليتين:

$$1)\ (a+b)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$2)\ (ab)^n=a^n b^n, \quad n\in\mathbb{N}$$

كي يبرهن المتطابقة الأولى يفترض السموأل معرفة القارىء بمفكوك $(a+b)^2$ المعطى في كتاب البديع للكَرَجي والمذكور من المؤلِّف في فصل سابق، ثم يتولّى برهان المتطابقة في حال $n=3$. ويحتوي برهانه على المرحلتين التاليتين:

١ ـ

$$1.1.\ (a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=(a+b)^3$$

مستخدماً هنا مفكوك $(a+b)^2$

$$1.2.\ (a+b)^3=a^2(a+b)+(2ab)(a+b)+b^2(a+b)$$

مستخدماً القضية (٢):

$$1.3.\ \quad =a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$

مستخدماً القضيتين (١) وَ (٢):

$$1.4.\ \quad =a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

مستخدماً تجميع الحدود المتشابهة:

٢ ـ وبالطريقة نفسها يبرهن المتطابقة في حال $n=4$ مستخدماً مفكوك $(a+b)^3$. وسننقل برهانه كما ورد حرفيّاً:

«كل عدد يقسم بقسمين فإن مربع مربع العدد المقسوم مساوٍ لمربع مربع كل واحد من القسمين وضرب كل واحد من القسمين في مكعب الآخر أربع مرات وضرب مربع واحدهما في مربع الآخر ست مرات»[٨٤].

مثاله: ان عدد أب قسم بقسمين، وهما أحـ حـ ب فإن مربع مربع أب مساوٍ لمربع مربع أحـ ومربع مربع حـ ب وضرب أحـ في مكعب

(٨٤) المصدر نفسه، ص ٤٤ (ظهر الورقة)، وص ٤٥ (وجه الورقة).

حـ ب أربع مرات وضرب حـ ب في مكعب ا حـ أربع مرات وضرب مربع ا حـ ومربع حـ ب ست مرات.

برهانه: «ان مال مال ا ب هو من ضرب ا ب في مكعبه، وقد بيّنا في الشكل الذي قبل هذا ان مكعب ا ب مساوٍ لمكعب ا حـ ومكعب حـ ب وضرب ا حـ في مربع حـ ب ٣ مرات وضرب حـ ب في مربع ا حـ ثلاث مرات، ومضروب ا ب في كل عدد مساوٍ لمضروب ذلك العدد في ا حـ وفي حـ ب، فمضروب مكعب ا حـ في ا حـ وهو مال مال ا حـ وفي حـ ب ومضروب مكعب حـ ب في حـ ب وهو مال مال حـ ب وفي ا حـ وضرب مسطح مربع حـ ب في ا حـ ثلاث مرات في ا حـ وفي حـ ب مثل مال مال ا ب. لكن ثلاثة أمثال ضرب سطح مربع ا حـ في حـ ب في ا حـ ثلاثة أمثال ضرب مكعب ا حـ في حـ ب وأيضاً فإن ثلاثة أمثال مسطح ضرب مربع ا حـ في حـ ب ثلاثة أمثال ضرب مربع ا حـ في مربع حـ ب وأيضاً فإن ثلاثة أمثال ضرب مسطح مربع حـ ب في ا حـ مساوٍ لثلاثة أمثال ضرب مربع ا حـ في مربع حـ ب وثلاثة أمثال ضرب مسطح مربع حـ ب في ا حـ في حـ ب مساوٍ لثلاثة أمثال ضرب مكعب حـ ب في ا حـ. فمال مال ا ب مساوٍ لمال مال ا حـ ومال مال حـ ب وضرب ا حـ في مكعب حـ ب أربع مرات وضرب حـ ب في مكعب ا حـ أربع مرات وضرب مربع ا حـ في مربع حـ ب ست مرات وذلك ما أردنا أن نبيّن»(٨٥).

٣ ـ وهو لم يُقم البرهان في حال $n = 5$ لكنّه كتب: «ومن فهم ما قلناه فقد يمكنه أن يبرهن على أن كل عدد يقسم بقسمين فإن مال كعب مساوٍ لمال كعب كل واحد من قسمين، وضرب

---

(٨٥) المصدر نفسه.

كل واحد منهما من مال مال الآخر خمس مرات ومربع كل واحد منهما في مكعب الآخر عشر مرات وما يتلو ذلك مضاعفاً. . .»[٨٦].

٤ ـ ويعطي عندها جدول معاملات ذات الحدّين المستخلصة من مؤلف للكَرَجي[٨٧] كوسيلةٍ للتعرّف على «العدد بمفكوك المربّعات والمكعّبات لغاية الحدّ المطلوب». وجدول المعاملات هذا مقدّم على الصورة التالية:

$n=1$	$n=2$	$\dots$	$n-1=11$	$n=12$
1	1		1	1
1	2		C_{n-1}^{1}	C_n^1
	1		C_{n-1}^{2}	C_n^2
			$\vdots$	$\vdots$
			$\boxed{C_{n-1}^{m-1} \\ C_{n-1}^{m}}$	C_n^m
			$\vdots$	$\vdots$
			1	C_n^{n-1}
				1

ومن جهة أخرى فإن حساب C_n^m يفترض معرفة معامل ذات الحدّين من رتبة $(n-1)$، إذ إن قاعدة إنشائها المعطاة عند الكَرَجي تكافىء: $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m}$.

لقد ذُكِرَتْ هذه الطريقة للعدد n مهما كان كبيراً[٨٨]. وبعبارات السموأل

---

(٨٦) المصدر نفسه، ص ٤٥ (ظهر الورقة).

(٨٧) كان السموأل قد ذكر هذا المؤلف وهو يورد حرفياً (in extenso) النص الذي أوردناه هنا.

(٨٨) هذا النص، كما ذكرنا، هو الأول، على حدّ علمنا، الذي ستذكر فيه هذه القواعد بهذه العمومية، حسب نيدهام:

Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, 6 vols. in 12 (Cambridge, [Eng.]: University Press, 1954-1986), vol.3, p.135.

إن كتاب يونغ هي (Yang Hui) ١٢٦١ متأخر قرناً ونصف على الأقل عن نص الكرجي. من المحتمل أن الخيّام (١٠٤٨ ـ ١١٣١)، على أثر الكرجي ـ أو بمعزل عنه ـ كان يمتلك هذه القواعد. فيما بعد أي في القرن الثالث عشر نعثر على النتائج نفسها عند: نصير الدين الطوسي، «قوام الحساب،» تقديم أحمد سعيدان، **الأبحاث**، السنة ٢٠، العدد ٢ (١٩٦٧)، ص ١٤٥، ومع فارق بسيط هو أن صيغة ذات الحدّين تكتب دائماً لفظاً:

$$= (a + b)^n - a^n = \sum_{m=1}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m.$$

نفسها[89]: «ولنذكر الآن أصلاً يعرف به عدد المرات التي [تلزم] لضرب هـذه المراتب بعضهـا عند بعض في كل عدد يقسم بقسمين ∴.

قال الكرجي: إذا أردت ذلك وضعت على التخت واحداً وواحداً تحتـه، ثم نقلت الواحـد إلى سطر آخر وضممت الواحد إلى الواحد الذي تحته يكون اثنين وضعته تحته، ثم وضعت الواحد الآخر تحته فيصير واحداً واثنين وواحداً فهذا يـدلك أن كـل عدد مؤلف من عـددين إذا ضربت كل واحـد منها في نفسه مرة واحدة لكون الطرفين واحداً وواحداً وضربت أحد العددين في الآخر مرتين لكـون الواسطة ٢ بلغ مربع ذلك العدد. ثم نقلنا الواحد من السطر الثاني إلى سطر آخـر، وضممنا الـواحد إلى الاثنين يصير ثلاثة، كتبنـاه تحت الواحـد، وضممنا الاثنـين إلى الواحـد الذي تحتهـا فتصير ثـلاثة كتبناها تحت الثلاثة فيخرج من ذلك سطر ثالث تكـون آحاده واحـداً وثلاثـة وثلاثـة وواحداً. فهـذا يعلمك أن مكعب كل عدد مؤلف من عددين هو أن يكعب كل واحد منها ويضرب كـل واحد منهـا في مربع الآخر ثلاث مرات. ونقلنا الواحد الذي في السطر الثالث إلى سطر آخر، ثم ضممنا الواحد إلى الثلاثة التي تحته تكون أربعة كتبتها تحت الواحد، ثم ضممت الثلاثة إلى الثـلاثة التي تحتهـا يكون ٦ كتبتها تحت الأربعة ثم ضممت الثلاثة الثانية إلى الـواحد يكـون أربعة كتبتهـا تحت الستة ثم نقلت الـواحد إلى تحت الأربعـة فيأتلف من ذلـك سـطر آخـر يكـون اعـداده واحـد وأربعـة و٦ [وأربعـة] وواحداً، فهذا يعلمك تركيب مال مال من عدد مؤلف من عددين وهو أن تجعل كل واحد منهـا مال مال لكون الواحد في الطرفين ثم ضربت كل عدد في مكعب الآخـر أربع مـرات لكون الأربعـة تاليـة للطرفين اللذين هما واحد [و] واحد، لأن الجذر في المكعب يكون مال مال، ثم ضربت مربع أحدهما في مربع الآخر ست مرات تكون الستة واسطة ولأن المربع في المربع مال مال. فإن نقلت الـواحد من السطر الرابع إلى سطر خامس ثم زدت الواحد على الأربعة التي تحته والأربعة على ٦ التي تحتها والستة على الأربعة التي تحتها والأربعة على الواحد الذي تحتها وكتبت ما ارتفع من ذلك تحت الواحد المنقول على الولي المذكور وكتبت بعد ذلك الواحد الباقي إئتلف من ذلك سـطر خامس < سـطر خامس > اعداده واحد و٥ وعشرة وعشرة و٥ وواحد. فهذا يعلمك أن كل عدد يقسم بقسمين فـإن مال كعب مساوٍ لمال كعب كل واحد من قسميه لكون الطرفين واحداً وواحداً ولمضروب كل واحد من العـددين في مال مال الآخر خمس مرات لكون الخمسة تالية للطرفين المتقدمـين من الجانبـين وضرب مربـع كل واحد منها في مكعب الآخر عشر مرات لكون العشرة تالية للخمستين وكل واحد من هـذه الجمل من جنس مال كعب لأن الجذر في مال مال والمكعب في المال يرتفـع من كل واحـد منها مـال كعب وبهذا

= نجد هذه القواعد أيضاً في القرن الخـامس عشر، في: غياث الـدين جمشيد، مفتـاح الحسـاب، تحقيق أحمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفنى الشيـخ، مراجعـة عبدالحميـد لطفي (القـاهرة: دار الكاتب العربي للطباعة والنشر، ١٩٦٧). انظر أيضاً:

Paul Luckey, *Die Rechenkunst bei Ğamšid b. Mas'ūd al-Kāši* (Weisbaden: Steiner, 1951), p.24.

لمزيد من التفـاصيـل، انـظر: **Rashed, «Algèbre et linguistique: L'analyse combinatoire dans la science arabe,» in: Cohen, *Boston Studies in the Philosophy of Sciences*, vol.10**

(٨٩) المصدر نفسه، ص ٤٥.

العمل يعرف عدد المرات في التمويل والتكعيب إلى أى نهاية شئنا وهذه صورة ذلك[٩٠]:

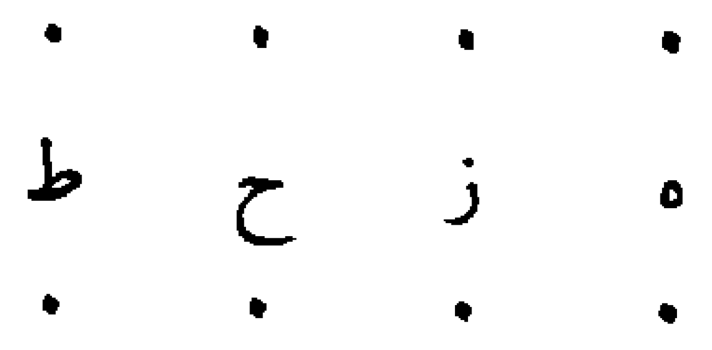
شيء	مال	كعب	مال مال	مال كعب	كعب كعب	مال مال كعب	مال كعب كعب	كعب كعب كعب	مال مال كعب كعب	مال كعب كعب كعب	كعب كعب كعب كعب
١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
	١	٣	٦	١٠	١٥	٢١	٢٨	٣٦	٤٥	٥٥	٦٦
		١	٤	١٠	٢٠	٣٥	٥٦	٨٤	١٢٠	١٦٥	٢٢٠
			١	٥	١٥	٣٥	٧٠	١٢٦	٢١٠	٣٣٠	٤٩٥
				١	٦	٢١	٥٦	١٢٦	٢٥٢	٤٦٢	٧٩٢
					١	٧	٢٨	٨٤	٢١٠	٤٦٢	٩٢٤
						١	٨	٣٦	١٢٠	٣٣٠	٧٩٢
							١	٩	٤٥	١٦٥	٤٩٥
								١	١٠	٥٥	٢٢٠
									١	١١	٦٦
										١	١٢
											١

المتطابقة الثانية $(ab)^n=a^nb^n$ مبرهنة بالطريقة نفسها. يعتبر السموأل في «مقالات إقليدس العددية» معرفة البرهان في حالة $n=2$. والقضية (١) تجعل، على

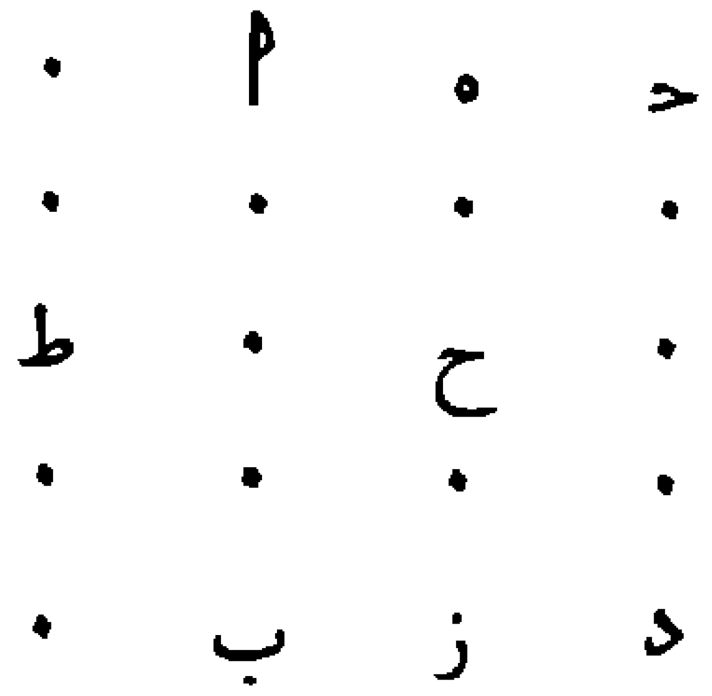
(٩٠) لقد أعدنا كتابة هذا الجدول باستبدال ألفاظ: شيء، مربع، مكعب، . . . بالرموز ($x, x^2, x^3, \ldots$)، انظر: المصدر نفسه، ص ٤٥ (وجه الورقة)، و٤٧ (ظهر الورقة).

كلٍّ حال، برهان العبارة (٢) بديهيّاً : $(ab)(ab)=(ab)^2=a^2b^2$. وكونه يذكر هذه المتطابقة مباشرة بعد القضية (١) الأمر الذي يسمح بالاعتقاد أن البرهان قد أُقيم - لزمرة تبادلية بالنسبة إلى الضرب (a وَب تتبادلان) ومهما يكن من أمر فهو يذكر أنه إذا كان $n = 3$ فحاصل ضرب عددين مكعّبين يعادل مكعّب حاصل ضرب ضلعيهما[٩١].

$$[a^3b^3=(ab)^3] \Leftrightarrow$$



البرهان: «مسطح ضلعي كل مكعبين مساوٍ لضلع مسطحهما، فليكن العددان المكعبان عددي أ ب وليكن ضلعاهما جـ د وليكن مربعاهما ه ز ولنضرب جـ في د وليخرج عدد ح ولنضرب أ في ب وليخرج ط ، فأقول إن عدد ط مساوٍ لمكعب عدد ح . برهانه: أنه قد تبيّن من المقالات العددية، ان عدد ه المربع إذا ضرب في عدد ز المربع خرج من الضرب مربع عدد ح المسطح فإذا ضرب الحاصل في ذلك في مسطح جـ في د ، أعني في عدد ح ، حصل من ذلك مكعب عدد ح ، وهو من ضرب مسطح ه في ز في مسطح جـ في ه لكن الحاصل من ضرب مسطح ه في ز في مسطح جـ في ه مساوٍ للحاصل من ضرب مسطح جـ في ه في مسطح [ز في] د كما بينا في الشكل الذي قبل هذا فالحاصل من ضرب مسطح ه في جـ في مسطح د في ز مساوٍ لمكعب عدد ح . لكن الحاصل من ضرب جـ في ه [أ] ومسطح د في ز هو عدد ب . فمسطح أ في ب أعني عدد ط ، مساوٍ لمكعب عدد ح وذلك ما أردنا أن نبين»[٩٢].



بمعنى آخر كي يبرهن أن $a^3b^3=(ab)^3$ يبدأ من $a^2b^2=(ab)^2$ يضرب الطرفين بـ : (ab) فيحصل على : $(ab)(a^2b^2)=(ab)(ab)^2=(ab)^3$

لكن القضية (١) تعطي : $(ab)(a^2b^2)=(aa^2)(bb^2)=a^3b^3$

---

(٩١) Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*, p.44.

(٩٢) المصدر نفسه.

ثم يبرهن القضية في حال $n = 4$ ويكتب:

«بمثل هذا البيان يُبرهن على أن مال كعب مسطح كل عددين مساوٍ لمسطح مال كعب أحدهما في مال كعب الآخر وعلى هذا فصاعداً»[٩٣]. لا نجد عند هذين المؤلفين هذه الأنواع من البراهين فقط والتي أسميناها R_1، لكننا نجد أنواعاً من التعاريف على النسق نفسه. لنذكر على سبيل المثال تعريف الإساس الجبريّة المعطى في كتابيّ **الفخري والبديع** للكَرَجي التي أعاد تناولها السموأل في **الباهر**. لقد عرضنا الجدول التالي:

$$a = a^1$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a^2 \cdot a$$
$$a^4 = a^3 \cdot a = a^2 \cdot a^2$$
$$a^5 = a^4 \cdot a = a^3 \cdot a^2$$
$$a^6 = a^5 \cdot a = a^4 \cdot a^2 = a^3 \cdot a^3$$
$$a^7 = a^6 \cdot a = a^5 \cdot a^2 = a^4 \cdot a^3$$
$$a^8 = a^7 \cdot a = a^6 \cdot a^2 = a^5 \cdot a^3 = a^4 \cdot a^4$$
$$a^9 = a^8 \cdot a = a^7 \cdot a^2 = a^6 \cdot a^3 = a^5 \cdot a^4$$

«وتزداد هذه القوى بالنسبة ذاتها حتى اللانهاية». أي، x^n معرّفة بـ:

$x^n = x^{n-1} x$ لأيٍّ $n \in \mathbb{N}$[٩٤].

- ٣ -

إن فهم هذا النوع من الإستدلال، يعني أولاً تثبيت الفوارق مع الإستدلالات الأخرى التي تقترب من الإستقراء الرياضي لنعود بعدها إلى مواجهة بعضها ببعض. وقد سبق أن حصلت محاولة في هذا المنحنى. فرويدنتال يميّز طريقتين من الإستدلال غالباً ما يُخلَطُ بينها وبين الإستقراء الرياضي. أحدهما هو ما يدعى بـ «شبه العام» والآخر يدعى «الإرتداد».

ويقصد المؤلف بـ «شبه العام» ذلك البرهان الذي يمكن الوصول به إلى أي عدد n (مع العلم أنه في الواقع - تاريخياً - لم يُجرِ إلاّ على أعداد خاصة). ورغم أن الرياضيّ يسعى إلى خاصيّة صحيحة لأي عدد n، فهو يجري عملياته على أعداد خاصّة. ومع أن هذا الإستدلال يمكن أن يعتبر كتطبيقٍ لمبدأ الإستقراء الرياضي فليس

(٩٣) المصدر نفسه، ص ٤٥ (ظهر الورقة)، و٤٥ (وجه الورقة).

(٩٤) انظر: المصدر نفسه، و Woepcke, *Extrait du Fakhri: Traité d'algèbre*, p.48.

بالإمكان ـ دون تحريف التفسير ـ أن ننسب إلى أولئك الذين يستعملونه إعترافاً صريحاً بهذا المبدأ.

كَمَثَلٍ على هذا البرهان يعطي فرويدنتال التقرير v لموروليكو[٩٥]. وكي يبرهن هذا الأخير أن: $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$ يكتب في حال $n=4$ فقط:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{n} k = n+(n-1)+\cdots+1$$

حيث يحصل على:

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$

وعندها يكتب فرويدنتال: «وبدون شك نجد أمامنا هنا برهاناً شبه عام يكاد أن يكون صحيحاً كما يمكن أن نرغب، فلا نحتاج إلاّ أن نبدل ٤ بـ n حتى يكون عندنا برهان عام حقاً»[٩٦].

في هذا النوع من البرهان، يكون الرياضيّ قد فكّر أحياناً بهذه الطريقة: $P(1)$ صحيح بواسطة برهانٍ شبه عام ـ $P(2)$ هو أيضاً صحيح وكذلك الأمر بالنسبة إلى $P(3)$ و $P(4)$ ويستنتج بشيء من الصواب ـ أن الأمر كذلك بالنسبة إلى كلّ ما يلي[٩٧]. يبدو لنا أن هناك عنصرين لا يجب فصلهما كي نصف هذه الطريقة من البرهان: ١) إعادة البرهان شبه العام لكل قيمة مأخوذة للمتغير. ٢) إمتلاك طريقة مستقلة عن

---

(٩٥) «Omnis radix multiplicata in radicem sequentem, producit duplum trianguli sibi collateralis. Démonstration: Exempli gratia, ducatur quaternarius in sequentem radicem, scilicet quinarium: & producuntur 20. Aio, quod 20. duplus est ad triangulum ipsi quaternario collateralem. Sumantur enim ab unitate ad quaternarium radices:quibus applicetur totide & ordine praepostero ab unitate radices; singulae singulis: Sic enim fiet, ut crescentes cum decrescentibus singuli singulis conjuncti numeri faciant quatuor summas acquaies: hoe est quatuor quinarios, quare carum aggregatum erit planus numerus, qui fit ex ductu quaternarij in quinarium: & idcirco 20, erit talis planus: Duplus autem est planus ipse ad traingulum quaternarij: quandoquidem, per diff. talis traingulus est aggregatum unius dictorum ordinum: quod est dimidium plani: Igitur 20. duplus erit ad triangulum quaternarij. Et similiter in omni casu id quod proponitur demonstrabimus».

ذكره: Freudenthal, «Zur Geschichte der Vollständigen Induktion,» p.21.

نقلاً عن: «Maurolico Arithmeticorum libri duo,» *Opuscula Mathematica* (Venise), (1575).

(٩٦) «Ohne Zweifel haben wir hier einen quasi-allgemeinen Beweis vor uns, wie man sich ihn exakter kaum wünschen kann. Man braucht nur n für 4, n+1 für 5 einzusetzen, um einen echten allgemeinem Beweis zu erhalten»,

في: المصدر نفسه، ص ٢٢.

(٩٧) أي عوضاً عن الإستدلال كالعادة بطريقة شبه عامة بالنسبة إلى عدد n خاص. فهو يعيد الإستدلال نفسه لبضعة أعداد خاصّة.

القيم الخاصة التي يمكن للمتغير أن يأخذها، أي طريقة تسمح ببرهان مماثل لأي عدد n كما هو الحال بالنسبة إلى العدد ٤ مثلاً. نفهم إذن أن هذا البرهان متميّز عن الإستقراء المألوف، ومع هذا لا يمكن الخلط بينه وبين الإستقراء الرياضي. أمّا الطريقة الأخرى من البرهان ـ المسمّاة «إرتداد» ـ فهي تدل على استقراءٍ رياضي بدائي، إذ اشتقّت، بطريقة شكلية نوعاً ما من الإستقراء الرياضي، فهي مع ذلك لا تتطابق معه. إنها إستقراء رياضي يعاد في كل مرّة بالنسبة إلى العدد الذي سبق مباشرة. إنها تكرار للإستقراء الرياضي الذي يجري انطلاقاً من قيمةٍ للمتغيّر إلى أن نصل إلى القيمة الأكثر صغراً التي ما زالت تتحقق فيها الخاصية. يُجرى الإرتداد غالباً بطريقة شبه عامة وهذا يسمح بعدم إعادة البرهان بالنسبة إلى قيمٍ أخرى للمتغير باستثناء تلك التي اختيرت بالأساس. هذا الشكل هو الأقرب إلى الإستقراء الرياضي من أي شكلٍ آخر أو كما كتب فرويدنتال: «يمكننا أن نصف هذا المنهج إن أخذنا بقسط وافر من حرية التعبير بأنه استقراء تام، رغم غياب البنية الصورية الخاصة بالإستقراء التام»(٩٨).

قبل باسكال، لم يكن هناك استقراء رياضي بالمعنى الصحيح لكن كان هنالك فقط هذان النوعان من البراهين، وإذا كان موروليكو قد عرف الإستقراء الرياضي فعلى الأرجح عرفه تحت شكل قديم من الإرتداد. هذه هي أطروحة فرويدنتال بمجملها.

إذن قبل الذهاب بعيداً، نود أن نبيّن أن «شبه العام» و«الإرتداد» لا يمكن أن يستنفدا طرق الإستدلال المعمول بها في هذا المجال قبل باسكال، وإنّ تعميم فرويدنتال لمثال موروليكو يمكن أن يحدّ الفهم لتاريخ الإستقراء الرياضي. لإيضاح هذه الملاحظات سوف نعود إلى بعض الأمثلة المأخوذة من الكَرَجي والسموأل:

بَرْهِنْ أن:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i(i-1)$$

أو كما يكتب: «إذا كانت أعداد مبتدئة من الواحد على النظم الطبيعي، فإن مجموع مربعاتها مساوٍ لمجموع تلك الأعداد مع ضرب كل واحد منها في العدد الذي يليه قبله»(٩٩).

---

(٩٨) «Bei grober liberalität darf man das verfahren vielleicht als vollständige Induction bezeichnen, obwahl der eigenartige formale Aufbau der volständigen Induktion fehlt»,

في: المصدر نفسه، ص ٢٧.

(٩٩) Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As Samaw'al*, p.54.

بيان البرهان:

$$n^2 = n[(n-1) + (n-(n-1))]$$
$$= n[(n-1)+1]$$
$$= n(n-1) + n$$
$$(n-1)^2 = (n-1)[(n-2) + ((n-1)-(n-2))]$$
$$= (n-1)[(n-2)+1] = (n-1)(n-2) + (n-1)$$
$$\vdots$$
$$1^2 = 1\cdot 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1^2$$
$$= [n(n-1) + (n-1)(n-2) + \cdots + 2\cdot 1] + [n + (n-1) \cdots + 1]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i(i-1) + \sum_{i=1}^{n} i.$$

هـذا البيان محـدّد بالنسبـة إلى $n=4$. وهكذا كي يـبرهن القضية السـابقة كتب السموأل بعد أن أعطى النصّ بكل عموميته:

«إذا كانت أعداد مبتدئة من الواحد متوالية على النظم الطبيعي فإن مجموع مربعاتها مساو لمجموع تلك الأعداد مع ضرب كل واحد منها في العدد الذي يليه قبله. مثاله أن أعداد أب بح حد ده مبتدئة من الواحد على النظم الطبيعي فأقول إن مجموع مربعات أعداد أب بح حد ده مساوٍ لعدد أه ولضرب ده حد وضرب دح في حب وضرب حب في بأ برهان ذلك أن مربع ده مساو لضرب ده في حد وفي تفاضل حد ده وهو واحد. لكن ضرب ده في واحد مساو لـ ده فمربع ده مساوٍ لـ ده وضرب حد في ده وكذلك نبين أن مربع حد مساو لـ حد وضرب بح في حد وإن مربع بح مساو لـ بح وضرب بح في أب. وأيضاً فإن أب مساوٍ لمربعه، لأنه واحد، فمربعات أب بح حد ده مثل مجموع أعداد أب بح حد ده، أعني أه مع ضرب ەد في دح وضرب دح في حب وضرب حب في بأ وذلك ما أردنا أن نبيّن».

البرهان:

$$\overline{DE}^2=DE[\overline{CD}+(\overline{DE}-\overline{CD})]=\overline{DE}(\overline{CD}+1)=\overline{DE}\cdot\overline{CD}+\overline{DE}$$
$$\overline{CD}^2=\overline{CD}[\overline{BC}+(\overline{CD}-\overline{BC})]=\overline{CD}(\overline{BC}+1)=\overline{CD}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}$$
$$\overline{BC}^2=\overline{BC}[\overline{AB}+(\overline{BC}-\overline{AB})]=\overline{BC}(\overline{AB}+1)=\overline{BC}\cdot\overline{AB}+\overline{BC}$$
$$\overline{AB}^2=1=\overline{AB}$$

إذن:
$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DE}^2=(\overline{BC}\cdot\overline{AB}+\overline{CD}\cdot\overline{BC}+\overline{DE}\cdot\overline{CD})+(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE})$$

هذا ما أردنا برهانه[١٠٠].

٢ - بَرْهِنْ أنَّ: $\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

«إذا أردنا أن نجمع مكعبات الأعداد المبتدئة من الواحد [وفق الترتيب الطبيعي]. ضربنا مجموعها بنفسه فما خرج من الضرب فهو مجموع مكعباتها»[١٠١].

كي يبرهن هذه القضية يلجأ السموأل إلى برهنة المقدمة التالية:

مقدمة: وإن «كلّ عدد فإن مكعبه مساوٍ لمربعه ولضرب ذلك العدد في مجموع الأعداد المبتدئة من الواحد إلى العدد الذي قبله مرتين».

$$\left[n^3=n^2+2n\sum_{i=1}^{n-1} i\right]\Leftrightarrow$$ [١٠٢]

بيان البرهان:
$$\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{n-1} i=n(n-1)$$
$$\Leftrightarrow 2n\sum_{i=1}^{n-1} i=n^2(n-1)\Leftrightarrow n^3=n^2+2n\sum_{i=1}^{n-1} i.$$

وبلغة **الباهر** «فلتكن الأعداد المبتدئة من الواحد أعداد أب ب ح ح د د ه فأقول إن مربع د ه وضرب د ه في أ ح مرتين مثل مكعب د ه. برهان ذلك أن أ د مساوٍ لضرب ح د في نصف د ه، والمتساوية فأضعافها متساوية فضرب ح د في

---

(١٠٠) المصدر نفسه. في هذه الترجمة كما في غيرها من النوع نفسه، حافظنا على النص مع استبدالنا لكلمات: الجمع، والطرح، والمساواة بالإشارات: +، -، =.
(١٠١) المصدر نفسه، ص ٦١ (وجه الورقة)، و٦٢ (ظهر الورقة).
(١٠٢) المصدر نفسه، ص ٦٢ (ظهر الورقة).

د ه ضعف أد . فضرب أد في د ه مرتين مساوٍ لضرب حـ د في مربع د ه . لكن مكعب د ه يزيد على ضرب حـ د في مربع د ه بمربع د ه . فمكعب د ه مساوٍ لمربع د ه ولضرب أد في د ه وذلك ما أردنا أن نبيّن».

البرهان :

$$\overline{AD}=\frac{\overline{CD}\cdot\overline{DE}}{2} \quad \text{إذن} \quad 2\overline{AD}=\overline{CD}\cdot\overline{DE}$$

بعد ضرب الطرفين بالعدد $\overline{DE}$ نحصل على: $2\overline{AD}\cdot\overline{DE}=\overline{CD}\cdot\overline{DE}^2$

ولكن : $\overline{CD}\cdot\overline{DE}^2=\overline{DE}^2(\overline{DE}-1)=\overline{DE}^3-\overline{DE}^2$

إذن : $\overline{DE}^3=\overline{DE}^2+2\overline{AD}\cdot\overline{DE}$ هذا ما أردنا برهانه(١٠٣).

وعندها يستطيع السموأل أن يبرهن القضية(١٠٤).

بيان البرهان :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)^2+n^2+2n\left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)$$

$$=n^3+\left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)^2 \quad \text{(مقدمة)}$$

$$=n^3+\left(\sum_{i=1}^{n-2} i\right)^2+(n-1)^2+2(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n-2} i\right)$$

$$=n^3+(n-1)^3+\left(\sum_{i=1}^{n-2} i\right)^2 \quad \text{(مقدمة)}$$

$$=\cdots$$

$$=n^3+(n-1)^2+\cdots+1^3=\sum_{i=1}^{n} i^3.$$

بتعابير **الباهر** : «فلتكن الأعداد المبتدئة من الواحد على النظم الطبيعي أعداد أب ب حـ حـ د د ه ، فأقول إن مجموع مكعبات أب ، ب حـ ، حـ د د ه مساوٍ لمربع أ ه ».

---

(١٠٣) المصدر نفسه.

(١٠٤) المصدر نفسه، ص ٦٢ (ظهر ووجه الورقة).

البرهان : $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + 2\overline{DE}\cdot\overline{AD}$

بتطبيق الرسم السابق : $= \overline{DE}^3 + \overline{AD}^2$

$$= \overline{DE}^3 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{AC}\cdot\overline{CD}$$

$$= \overline{DE}^3 + \overline{CD}^3 + \overline{AC}^2$$

$$= \overline{DE}^3 + \overline{CD}^3 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC}\cdot\overline{AB}$$

$$= \overline{DE}^3 + \overline{CD}^3 + \overline{BC}^3 + \overline{AB}^2$$

ولكن : $= \overline{AB}^3 = 1$

إذن : $= \overline{DE}^3 + \overline{CD}^3 + \overline{BC}^3 + \overline{AB}^3$

هذا ما أردنا برهانه.

في المثلين السابقين، كشفنا نوعين من الإستدلال. الأول - R_2 - موضّح ببرهان المقدمة في المثال الثاني. والثاني - R_3 - هو الذي استخدم في برهان القضيتين. فمع R_2 أُقيم برهان السموأل لـ$n=4$ فقط. لكن نص القضية هو عام من جهة، ومن جهة أُخرى لا يتردّد السموأل في استعمال المقدمة نفسها دون برهنتها من جديد في حال $n=2, 3$. كل شيء يُشير إذن أنه بالنسبة إلى الرياضيّ يبقى البرهان هو نفسه لأيّ عدد كما للعدد 4. وكذلك يكتب البرهان نفسه بالنسبة إلى أي عدد n. يمكن إذن اعتبار R_2 كبرهان شبه عام وكتطبيق للإستقراء التام دون أن يكون هناك اعتراف بمبدأ هذا الأخير. أما R_3 فهو مختلف: فالمقصود صراحة تثبيت طريقة الإنتقال من n إلى $(n+1)$ سواء ببرهان المقدمة أو مباشرة لكي يصار بعد ذلك إلى إجراء الإنقاص المتتالي أو الإرتداد. صحيح أن R_2 وَ R_3 قد استعملا معاً كما يمكن أن نلاحظ ذلك بسهولة، ففي المثال الأول يتدخل R_2 على مستوى كل مساواة وفي المثال الثاني يتدخل R_3 على مستوى صيغة ذات الحدّين. وعلى أي حال يمكننا التعرّف مع R_3 إلى شكلٍ قديمٍ من البرهان التكراري. يبقى أن نلاحظ هنا أيضاً أن R_3 هو تقنية متقنة ولم يستعمل فقط في بعض مرّات نادرة كما هو الحال عند موروليكو. ولكي نبيّن بأيّ إتقان طُبِّق الإستدلال الإرتدادي بإمكاننا أخذ برهان السموأال:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

غالباً ما نقرأ في كتب تاريخ الرياضيات أن هذه الصيغة بُرهنت من قِبَل

الكرجي، لكن ليس الأمر كذلك في الواقع، فالكرجي لم يفعل سوى إعطاء صيغة مكافئة لـ: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}\right)$

ولقد برهنت من قَبْل على يد ابن الهيثم مثلاً، وسيعود السموأل هنا إلى البرهان عليها جبريّاً. فقد أراد أن يبرهن أولاً: $(2n+1)\sum_{i=1}^{n} i = 3\sum_{i=1}^{n} i^2$

ومنها يستخلص قيمة: $\sum_{i=1}^{n} i^2$. إنه يبرهن أولاً المقدمات التالية:

مقدمة ١: $(n+2)\sum_{i=1}^{n} i = n\sum_{i=1}^{n+1} i$

إن برهان هذه المقدمة هو من النوع شبه العام وبيانه هو:

$$(n+2)\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,(n+2) = n\left[\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\right] = n\sum_{i=1}^{n+1} i$$

مقدمة ٢: $n(n+1) + (n+1)(n+2) = 2(n+1)^2$ لأي: $n \in \mathbb{N}$

بيان البرهان:

$$n(n+1) = (n+1)^2 - (n+1)$$

$$(n+1)(n+2) = (n+1)^2 + (n+1)$$

نحصل على المقدمة حيث نستنتج أنّ:

$$(n+1)[n + (n+1) + (n+2)] = 3(n+1)^2 \quad \text{لأي: } n \in \mathbb{N}$$

مقدمة ٣: $n\sum_{i=1}^{n+1} i = n\sum_{i=1}^{n-2} i + 3n^2$

يستعمل في البرهان عليها المقدمة السابقة.

قضية: «فليكن أعداد اب ب حـ حـ د د ه ه ز ز ح ح ط مبتدئة من الواحد على النظم الطبيعي، فأقول: إن ضرب اح في ز ط مثل ثلاثة أمثال مربعات اب ب حـ حـ د د ه ه ز ز ح»[١٠٥].

---

(١٠٥) المصدر نفسه، ص ٥٣ (ظهر الورقة).

بيان البرهان:

$(2n+1)\sum_{i=1}^{n} i = n\sum_{i=1}^{n+1} i + (n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i$ تمت برهنتها سابقاً.

من المقدمة الأولى نستنتج: $(n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i = (n-1)\sum_{i=1}^{n} i$

$$= (n-1)\sum_{i=1}^{n-3} i + 3(n-1)^2$$

بسب المقدمة (٣)

ولدينا أيضاً: $n\sum_{i=1}^{n+1} i = n\sum_{i=1}^{n-2} i + 3n^2$

نحصل إذن على: $(2n+1)\sum_{i=1}^{n} i = 3n^2 + 3(n-1)^2 + n\sum_{i=1}^{n-2} i + (n-1)\sum_{i=1}^{n-3} i$

$$= 3n^2 + 3(n-1)^2 + 3(n-2)^2 + 3(n-3)^2 + (n-2)\sum_{i=1}^{n-4} i + (n-3)\sum_{i=1}^{n-5} i$$

وبتطبيق المقدمات نجد:

$$= \cdots$$

$$= 3n^2 + 3(n-1)^2 + \cdots + 3\,2^2 + 3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

وبتعبير السموأل[١٠٦]:

$$\overline{AG}\cdot\overline{FH} = \overline{AH}\cdot\overline{FG} + \overline{AF}\cdot\overline{GH}$$

كما بيّنت ذلك القضية (١٢). ولكنّ:

$$\overline{AH}\cdot\overline{FG} = \overline{AE}\cdot\overline{FG} + 3\overline{FG}^2 \qquad \overline{AF}\cdot\overline{GH} = \overline{AG}\cdot\overline{EF} = \overline{AD}\cdot\overline{EF} + 3\overline{EF}^2$$

إذن: $\overline{AG}\cdot\overline{FH} = \overline{AE}\cdot\overline{FG} + 3\overline{FG}^2 + \overline{AD}\cdot\overline{EF} + 3\overline{EF}^2$

لكنّ: $\overline{AE}\cdot\overline{FG} = \overline{AF}\cdot\overline{ED} = \overline{AC}\cdot\overline{DE} + 3\overline{DE}^2$

وَ: $\overline{AD}\cdot\overline{EF} = \overline{AE}\cdot\overline{CD} = \overline{AB}\cdot\overline{CD} + 3\overline{CD}^2$

إذن:

$$\overline{AG}\cdot\overline{FH} = \overline{AC}\cdot\overline{DE} + 3\overline{DE}^2 + 3\overline{FG}^2 + \overline{AB}\cdot\overline{CD} + 3\overline{CD}^2 + 3\overline{EF}^2$$

لكنّ $\overline{AC}\cdot\overline{DE} = \overline{AD}\cdot\overline{BC} = 3\overline{BC}^2$

---

(١٠٦) المصدر نفسه.

لأن $\overline{AB}=1$ وَ $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{AB}=3\overline{AB}^2=3$

لأن: $\overline{AB}=1$ إذن:

$\overline{AG}\cdot\overline{FH}=3\overline{FG}^2+3\overline{EF}^2+3\overline{DE}^2+3\overline{CD}^2+3\overline{BC}^2+3\overline{AB}^2.$ هذا ما أردنا برهانه.

بإمكاننا في هذا الفصل الذي يعالج فيه بصورة رئيسية مجمل الأعداد الطبيعية الأولى n، وحاصل جمع مربّعاتها، وحاصل جمع مكعّباتها. إيجاد عدد لا بأس به من الأمثلة. إنه غالباً ما يستخدم البرهان بالإرتداد، أي ذلك الشكل من التكرار البدائي.

لو تابعنا إذن تحليل فرويدنتال لما وجب أن نجد سوى نوعين من الإستدلال - R_2 وَ R_3 - قبل باسكال. تبقى الفرضية صحيحة دون شك عندما يتعلق الأمر بعمل موروليكو المدروس من قِبل المؤلف. أما الأمر فمختلف بالنسبة إلى عمل الكَرَجي والسموأل. الإستدلال الأول المدروس أثناء فكّ ذات الحدّين - R_1 - لا نُخْلَطُ إطلاقاً بينه وبين R_2 وَ R_3. فمع R_1 أمكننا أن نرى أن هناك جهداً لكتابة نظام الإنتقال من n إلى $n+1$ بالطريقة نفسها ومهما كان العدد الذي انطلقنا منه والفكرة هي التالية: من واقع أن إجراء الإنتقال من n إلى $n+1$ وحتى لو وضّحنا الإنتقال بعدد خاص من n، هو صحيح، فهو صحيح إذن بالنسبة إلى أي عدد، أو بالأحرى فإن وسيلة الإنتقال هي نفسها مهما كان العدد. كلُّ شيءٍ يُشير إلى أن هذا الإستدلال دون أن يصاغ بقاعدة أو أن يكون منصوصاً بصورة نظرية يختلف ليس فقط عن R_2 وَ R_3 بل يبدو أيضاً وكأنه يعترف ببديهية الإستقراء الرياضي.

- ٤ -

وفيما يتعلق بهذه التجارب - تجارب الكَرَجي والسموأل - هل يمكن الحديث عن استقراء رياضي؟ جوابان متناقضان أعطيا لسؤال مشابهٍ كي يصفا المحاولات حتى التي لم يظهر فيها R_1 أبداً. وهكذا فرغم دراسة فرويدنتال، كتب بورباكي أيضاً في عام ١٩٦٠ أن مبدأ الإستقراء الرياضي «كان قد فُهم بوضوح واستخدم للمرة الأولى في القرن السادس عشر من قبل الإيطالي ف. موروليكو»(١٠٧). ولم يتردد رابينوفيتش في وصف استدلال ليفي بن جرسون بأنه استقرائي بالمعنى الرياضي رغم أنّه كان أقلّ تجهيزاً بهذا

(١٠٧) انظر: Nicolas Bourbaki, *Eléments de mathématiques* (Paris: Hermann, 1960), p.38.

الخصوص من استدلال الكرجي والسموأل[108]. على عكس هذه المواقف، احتفظ آخرون - مع بعض الفروقات كفرويدنتال وبلا تحفظ مثل هارا (M. Hara)[109] بهذا الفضل لباسكال وحده في تطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي.

هذه المواقف التي يطرد بعضها بعضاً، لديها مع هذا نقطة مشتركة، إنها تحول دون فهم أسباب ظهور أشكال جديدة من الإستدلال الرياضي. إن رفض وصف المحاولات المختلفة بأنها استقرائية رياضيّاً والاحتفاظ بهذا الوصف لباسكال هو منعٌ لفهم هذه الأشكال الجديدة من الإستدلال التي ظهرت بالتحديد مع تجديد الجبر في القرن الحادي عشر[110]. على العكس، فوصف كل شيء بأنه استقراء رياضي والقول إن مبدأ هذا الإستدلال حاضر في كل مكان يمنع كذلك تحديد موضع ظهور هذه الأشكال الجديدة عن طريق إخفاء الفوارق. لتجنب هذه الصعوبات ليس نادراً أن

---

(١٠٨) يتعلق الأمر خصوصاً ببرهان صيغة مكافئة لـ: $P_{n+1} = (n+1) P_n$ حيث P_n هي مجموعة تباديل n عناصر متمايزة. وفيما يخص ليفي بن جرسون، انظر:

G. Lange, *Die Praxis des Rechners* (Frankfurt: Herausgegeben u. übersetzt, 1909), p.48 sq; J. Carlebach, *Levi ben Gerson als Mathematiker* (Berlin: [n.pb.], 1910), and *Rabinovitch, «Rabi Levi ben Gershon and the Origins of Mathematical Induction,» p.242.*

(١٠٩) أنظر: Hara, «Pascal et L'induction mathématique,»

حيث يكتب: «للمرة الأولى نشهد لدى باسكال ليس تطبيقاً منهجياً فحسب بل صياغة شبه تامة التجريد للطريقة مع دقة في فهمها». وهكذا يعتقد المؤلف أنه لا يعبّر عن موقفه وحده فقط بل كذلك عن موقف فرويدنتال أيضاً. لكن، يبدو أن الأخير أكثر تحفظاً حيال هذه النقطة إذ أنه يكتب:

«Nicht die Anwendung, auch nicht die systematische Anwendung ist das Auffallende, sondern die fast vollständig abstrakte Formulierung, die übrigens später nocheinmal, an anderen Objekten, wiederholt wird»,

انظر: المصدر نفسه، ص ٣٣.

(١١٠) المقصود تطبيق الحساب على الجبر أو أن تطال الجبر العمليات الحسابية الأوليّة بحيث تطبق هذه العمليات على]∞ ,0]. وكان هدف هذا المشروع المعلن رسم الحدود بين الجبر والهندسة وتحقيق الاستقلالية والتميّز للجبر، وكانت أداته الرئيسية في ذلك توسيع الحساب الجبري المجرد، ومن خلال تحقيق ذلك تمّت لأول مرة في التاريخ الاكتشافات التالية: أ - ضرب وقسمة القوى الجبرية. ب - نظرية قسمة كثيرات الحدود. ج - قواعد الإشارات.

وكذلك أيضاً أثناء وضع هذا المشروع موضع التنفيذ نجد حساب المعاملات الحدانيّة وصيغة ثنائية الحدّين ومختلف مسائل التعداد التي سوف تصنف فيما بعد تحت اسم التحليل التوافيقي. انظر:

Rashed, «L'Arithmétisation de l'algèbre au XIème siècle».

انظر أيضاً المقدمة، في: Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As- Samaw'al.*

يلجأ المؤرخ إلى موقف توفيقي. وهكذا بعد أن أثبت بورباكي الأسبقية لموروليكو كتب: «نجد لدى القدماء تطبيقات واعية نوعاً ما لمبدأ الاستقراء الرياضي»(١١١). وتحاشياً لطرح المسألة، غالباً ما يجري الحديث عن أصل الإستقراء الرياضي نظراً إلى التباس التعبير، فيمكن أن يكون ملائماً، لأن الأصول متعددة ومطمورة في ذاكرة الزمن وتسمح دون أي رقيب بقلب الترتيبين الزمني والمنطقي أحدهما مكان الآخر خلال العمل في «التصويب» التاريخي. أليس المقصود إذن بداية التكوين، حيث يكون الترتيبان متعذّري التمييز؟

صعوبة المسألة، كما نرى، تجعل من المستحيل وجود جواب وحيد: الأمر مرهون بالنقطة التي تمّ اختيارها للعودة نحو الماضي ونحو تاريخنا «التقهقري» بالضرورة. أن نقرر دون همٍّ جديّ أن هذه أو تلك من الصياغات لمبدأ الإستقراء الرياضي كافية، يعرّضنا لأن نحشر في تاريخ هذا المبدأ ما يمكن لخيارٍ آخر أن يخصصه لمتحف ما قبل التاريخ. وتبقى كل مشكلة المؤرخ بالفعل في تحاشي «التقهقر» التاريخي المبتذل الذي يحول دون إعادة إنشاء النشاط الرياضي الذي نحن بصدد التأريخ له.

إذا كنّا نفهم بالإستقراء الرياضي كما بعد بيانو (Peano) ذلك الإستدلال المبني على الإثبات أو أيّ مكافىء له، مثل: إذا كانت P خاصية معرّفة على $\mathbb{N}$ وإذا كانت $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ فإن P *هي صحيحة أياً يكن* $n \in \mathbb{N}$ *سيكون من الصعب اعتبار* المحاولات السابقة لباسكال محاولات استقرائيةً رياضياً. وأكثر من ذلك فإن تجربة باسكال لن توصف بهذه الصفة إلّا بكثير من التساهل. في الواقع، لو تمسّكنا بصرامة الصياغة - التي هي أساسية بالنسبة إلى الاستقراء - فإن أية محاولة لا تنصّ على حجة الإستقراء - $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ - لأي عدد n، بشكل صريح، سوف تُستبعد من الإستقراء الرياضي. ولكن بما أن هذه الصرامة مرتبطة بنظام المسلّمات التام - المعروف كنظام بيانو - الذي يحتوي بالضبط على الصياغة الدقيقة لمبدأ الإستقراء الرياضي فكل صياغة سابقة هي بالضرورة ساذجة.

التساؤل إذن عن الأنظمة المختلفة من التجارب السابقة على صياغة بيانو، يعني على الأقل طرح السؤال: هل تتساوى السذاجات فيما بينها؟ أو هل هناك تدرّج ذو مغزىً في «السذاجة»؟ على كلٍّ، بالنسبة إلى منطقيٍّ معاصرٍ أليست صياغة بيانو ذاتها ساذجة بمعنىً ما؟

---

(١١١) Bourbaki, *Eléments de mathématiques.*

فيما يتعلق بنا، يجب الرجوع بسرعة إلى باسكال. إن نصوص كتاب في المثلث الحسابي المتعلقة بالإستقراء الرياضي معروفة وغالباً ما أعيد نشرها. وسوف نعيد منها الجمل الأكثر مغزىً فقط: «إذا وُجِدَ مثلث حسابي يحتوي على هذه القضية... أقول إن المثلث التالي سيمتلك الخاصية نفسها. من هنا ينتج أن كافة المثلثات الحسابية لها المساواة نفسها لأن المساواة توجد في المثلث الأول حسب المقدمة الأولى (برهان أن في المثلث الأول، مجموع أجزاء صف موازٍ يساوي كافة توفيقات اسِّ الصف في اسِّ المثلث). وهذه المساواة بديهية أيضاً في المثلث الثاني، إذن وحسب المقدمة الثانية فللمثلث التالي المساواة نفسها وننتقل إلى المثلث التالي وهكذا دواليك إلى ما لا نهاية»(١١٢).

من المؤكد أن صياغة باسكال أكثر تجريداً وأكثر إعداداً من أية صياغة معروفة قبله. فقبل باسكال (١٦٢٤) بثلاثين سنة لم يتمكن باشيه (Bachet). من أن يعطي لهذا الإستدلال سوى صياغة أقل إعداداً. إذ كتب: «وهكذا مستعيناً بما بُرهن سابقاً لأعدادٍ ثلاثةٍ ولأربعة، سوف أنجز البرهان بالطريقة نفسها فإذا اقترحت ستة أعداد فسوف استخدم ما سبق أن بُرهن للخمسة، وهكذا دائماً إذا اقترح المزيد منها. إذن وسيلة البرهان عامّة وتطبق على كافة الأعداد»(١١٣).

رغم الفرق بين الصياغة الباسكالية والمحاولات السابقة لها، تبقى هناك عناصر مشتركة إذ تظهر هذه العناصر بوضوح في استخدام باسكال لمبدئه وهنا بالذات نفهم القدرة والحدود لصياغة باسكال.

١ - يطبق باسكال كأسلافه مبدأ الإستقراء الرياضي أساساً على مجاله الأصلي، أي الطرق التوافيقية والمسائل المتعلقة بها، وحتى لو وجدنا هنا وهنالك تطبيقاً لهذا المبدأ أو لإستدلالات مشابهة له على مسائل أخرى من نظرية الأعداد أو الجبر، فإن الطرق التوافيقية تبقى مجالاً متميّزاً لهذا التطبيق. لقد رأينا أن الكَرَجي والسموأل يستعملان R_1 كطريقة برهان في هذا المجال، إذ شكّلت تربة نموذجية لتوضيح تطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي. مع العلم أنه قبل باسكال طبّق ليڤي بن جرسون وكذلك فرينيكل (Frenicle)(١١٤) (١٦٠٥، ١٦٧٥) فيما بعد، شكلاً أكثر بساطة لكنه مكافىء

---

(١١٢) Pascal, «Traité du triangle arithmétique,» dans: *Oeuvres complètes* (Paris: Seuil, 1963), p.57.

(١١٣) Bachet de Méziriac, *Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres* (Lyon: [s.pb.], 1624), p.5.

(١١٤) بالنسبة إلى فرينيكل كما بالنسبة إلى ليڤي بن جرسون من قبل، فالمقصود مسائل التباديل فقد برهن فرينيكل صيغة مكافئة لـ : $P_{n+1}=(n+1)P_n$. إذ بعد أن بيّن أن: $P_3=3P_2=6$; وَ $P_4=4P_3=24$ وَ $P_5=5P_4=120$ ، كتب: «وهكذا دواليك، يجب ضرب =

لـ R_1 في مجال التباديل. وأخيراً فإن باشيه أراد أن يبرهن أنه: «إذا ضُربت أعداد ثلاثة بعضها بالبعض الآخر فالحاصل هو نفسه دائماً مهما كانت الطريقة أو الترتيب المتّبع في ضربها»(١١٥).

التوافيقية (أي التبديل) السابقة بعدد الكثرة المعطاة، وهذا دليل بديهي يستخدم في برهان إنشاء الجدول». انظر:

Frenicle, «Abrégé des combinaisons,» dans: *Mémoires de l'Ac. Royale des Sciences: Depuis 1666 jusqu'à 1699* (Paris: [s.pb.], 1729), vol.5, p.92.

وبالنسبة إلى الدراسات حول فرينيكل، أنظر:

E.Coumet, «Mersenne, Frenicle et l'élaboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du XVIIème siècle,» (Thèse, Université Sorbonne Paris, 1968), p.209 sq.

(١١٥) De Méziriac, Ibid., p.2.

برهان باشيه إلى حد ما هو من نوع R_1. «بعد أن برهن: اقليدس في ١٦ من ٧: أنه في حال عددين، إذا ضُرب الأول بالثاني أو ضرب الثاني بالأول فالحاصل هو نفسه دائماً. أريد أن أثبت هنا أن نتيجةً مشابهةً تحصل في حال ثلاثة أعداد أو أكثر، إذ نقول إن ثلاثة أو عدة أعداد مضروبة بعضها ببعض، يعني أن نضرب عددين منها واحداً بالآخر والحاصل نضربه بعدد آخر ثم نعيد الكرّة مع الحاصل ونستمر هكذا طالما بقيت أعداد.

لتكن أولاً الأعداد الثلاثة المعطاة A.B.C وليكن D حاصل ضرب A بـ B وليكن E حاصل ضرب D بـ C. ومن ثمّ لنغيّر الترتيب ونضرب B بـ C فنحصل على F الذي يعطي G إذا ضُرب بـ A. لنغيّر الترتيب مرّة أخرى ولنضرب A بـ C الذي يعطي H والذي إذا ضرب بدوره بـ B أعطى K (وهذه هي كافة الحالات المختلفة التي تقبلها أعداد ثلاثة مضروبة بعضها ببعض). أقول إن كلاً من E.K.G هي العدد نفسه. لأن B مضروباً بكلا .A.C يعطي D.F ويوجد التناسب نفسه بين A وَ C كما بين D وَ F. إذن يحصل العدد نفسه إذا ضرب A بـ F وضُرب C بـ D (بسبب ١٩ من ٧). ومن كوْن E وَG العدد نفسه. وبالمثل C مضروباً بكلا A وَ B يعطي H وَ F. ويوجد التناسب نفسه بين A وَ B كما بين H وَ F. ويحصل العدد نفسه بضرب A بـ F وَ B بـ H. إذن K.G هما العدد نفسه ونتيجة لذلك فالأعداد الثلاثة .E.K.G هي العدد نفسه. هذا ما وَجُبَ برهانه.

لتكن الآن الأعداد الأربعة المعطاة .A.B.C.D نضرب A بـ B وليكن E حاصل ضربهما بـ C. وليكن K حاصل ضرب E بـ D. لنغيّر الترتيب ونضرب D بـ C وليكن F حاصل ضربهما بـ B، ليكن H حاصل ضرب F بـ A. أقول إن .K.H هي العدد نفسه وإن العدد نفسه ينتج مهما كان أسلوب ضرب مجموعة الأعداد .A.B.C.D لأن ضرب مجموعة الأعداد .A.B.C من جهة وضرب الأعداد .D.C.B من جهة أخرى يعطينا .B.C من كلا الجهتين. لنضرب B.C بعضها ببعض وليكن G حاصل ضربها. ولكن حسب ما سبق أن برهن في حالة ثلاثة أعداد فإن الحاصل E الناتج عن ضرب A بـ B ثم بـ C هو الحاصل E نفسه الناتج عن ضرب B بـ C والحاصل (G) بـ A. وبالمثل نثبت أن F ينتج عن ضرب D بـ G. ثم إن G نفسه يُنتج الحاصل EF بضربه بالعددين A.D. التناسب الموجود بين AD هو نفسه الموجود بين EF. انطلاقاً من العدد نفسه، ينتج العدد نفسه عند ضرب A بـ F وضرب D بـ E، إذن K.H هما العدد نفسه. وبالطريقة نفسها=

إن ظهور هذا الشكل من الاستدلال يمكن أن يبدو حلاً تقنياً مُكيفاً لمسألة نظرية أي البرهنة في هذا المجال لمسائل عامة في التعداد أو مسائل في توزيع عناصر مجموعات منتهية على مجموعات جزئية مرتبة أو غير مرتبة وفق قوانين مختلفة ومصنّفة فيما بعد تحت اسم التحليل التوافقي.

٢ - يعرض باسكال كما فعل سابقوه استنتاج البرهان وفق الفكرة الحدسية المكوّنة لديه عن مجموعة $\mathbb{N}$ وهذا يحدّ من عمومية الصياغة. إذ إن $(\forall n)\ P(n)$ - حيث n عدد طبيعي - مصاغ وفق تصوّر لا يعدو كونه الوصف الحدسي الذي بمقتضاه تكون عناصر $\mathbb{N}$: 0, 1, 2, 3 «وهكذا إلى ما لا نهاية».

٣ - على الرغم من صياغته العامّة والجليّة لدليل الإستقراء الرياضي، يمارس باسكال في التطبيق الذي يجريه ما كان يمارسه سابقوه، إذ على الرغم من أن $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ مصاغ فعلاً بصورة عامّة أي لمطلق عدد وبواسطة المعطى: $P(n)$ صحيح، فلا يتناول باسكال عملياً سوى أعداد خاصة مثل 3 و4 كذلك في حالتي البرهانين الأكثر أهمية حيث يطبق مبدأ الإستقراء الرياضي.

كي يقيم برهان المبرهنة المكافئة لـ: $C_n^p / C_n^{p+1} = (p+1)/(n-p)$ يتحقق منها إذا كان $n=1$، يفترض صحتها إذا كان $n=4$ ويبرهنها إذا كان $n=5$ ويستنتج بصورة تذكّرنا في بعض النواحي بأولئك الذين كانوا يستخدمون R_1. إذ إنه يكتب: «ونبرهنه كذلك لكل الباقي لأن هذا الدليل ليس مبنياً إلاّ على كون هذه القضية موجودة في القاعدة السابقة وأن كل خانة تساوي الخانة التي سبقتها مع التي تليها، وهذا صحيح أينما كان»[١١٦].

والمثل الآخر يكافىء:

$$\phi(a, b) = \sum_{i=a}^{a+b-1} C_{a+b-1}^{i} \Big/ \sum_{k=0}^{a+b-1} C_{a+b-1}^{k}$$

= تثبت دائماً الشيء نفسه لأنه من أربعة أعداد إذا ضربنا ثلاثة من جهة وثلاثة من جهة أخرى نحصل دائماً على اثنين منها تكون هي نفسها في حال أخذنا ثلاثة من جهة وثلاثة من جهة أخرى، وهكذا يعاد البرهان نفسه». انظر: المصدر نفسه، ص ٣ وما يليها.

(١١٦) انظر: المصدر نفسه، ص ٥٣. المقصود النتيجة الثانية عشرة ونصّها: «في كل مثلث حسابي، كل خانتين متجاورتين من القاعدة نفسها تكون العليا بالنسبة إلى التي دونها كما تكون الكثرة من الخانات بدءاً من الأعلى حتى أعلى القاعدة كمثل ما تكون نسبة الخانات بدءاً من السفلى حتى الأسفل ضمناً».

حيث $\phi(a, b)$ حاصل الجمع المنسوب بالرهان للآعب A في لعبة متعادلة من لاعبين A وB حيث يلزم a دور لـ A وb دور لـ B. هنا أيضاً يتحقق من المبرهنة إذا كان $n=2$ ويفترض صحتها إذا كان $n=4$ ويبرهنها إذا كان $n=5$ ويستنتج بأسلوب مشابه للإستنتاج السابق(١١٧).

٤ ـ كسابقيه، لم ينسب باسكال أبداً أي اسم إلى الاستدلال الذي يستخدمه. ويبدو أن غياب الاسم يعني أن هذا الاستدلال ليس سوى طريقة خاصة بمجال، ولم يصبح بعد برهاناً مستقلاً بذاته غير مرتبط بحقل تطبيقه كي يتطلب نعتاً باسم. والملفت أن هذا الإسم لم يظهر إلاّ مع المدرسة الجبرية الانكليزية، باكوك (G.Peacok) ومورغان (Morgan)(١١٨).

٥ ـ إن تقدير المبدأ كطريقة عامّة للبرهان ووضعه في مكانه الصحيح سيتطلب التدقيق في كيفيّة تصوره من قِبل أولئك الذين جاءوا بعد باسكال. فلو تم فهمه باعتباره طريقة عامة لأدّى ذلك إلى إدخال تغييرين على الأقل: التمييز الواضح بين الاستقراء التام والاستقراء غير التام من جهة ورفض أي برهان على طريقة الاستقراء غير التام من جهة أخرى ويبدو أن كلا الأمرين، التمييز والرفض لم يحصلا، فحتى القرن الثامن عشر وكي لا نتناول سوى المثل الفرنسي، يمكننا أن نقرأ في الموسوعة الفرنسية (L'Encyclopédie méthodique) في فقرة «الاستقراء»: يُطال معنى هذا التعبير بشكل ملائم بالمثل التالي:

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^3 +$$

من لا يعرف الطريقة الصحيحة والعامة لبرهنة هذه الصيغة يستطيع استنتاجها إذا ما تحقق منها في حالة $m=1$، $m=2$، $m=3$ ... إلخ. وإقرارها بالاستقراء.

لذا يجب عدم استخدام هذه الطريقة إلاّ في حال تعذّر استخدام طريقة أكثر دقة منها وعدم استعمالها إلاّ مع كثير من الانتباه، فقد يحدث في بعض الأحيان استنتاجات خاطئة.

حتى لو وجد أحياناً، بعد باسكال وبمعزل عنه، هذا التمييز بين الاستقراء التام

---

(١١٧) المصدر نفسه، ص ٦٠ وما يليها.

(١١٨) انظر: Cajori, «Origin of the Name «Mathematical Induction»,».

والاستقراء غير التام كما عند برنولي مثلاً، يبقى أن هذا التمييز سرعان ما يُنتسى حتى من قِبَل واضعه نفسه وهذا يظهر على الأقل أنه في تلك الحقبة كانوا لا يزالون بعيدين عن الفهم الحقيقي لضرورة الإستقراء الرياضي وبالفعل فإن برنولي (Jacques Bernoulli) لم يقم بهذا التمييز فقط بل نقض علمية استخدام الإستقراء غير التام أيضاً. ألم يكتب في نقد لواليس (Wallis): «عدا عن أن طريقة البرهنة بواسطة الإستقراء ليست علمية فهي بالإضافة إلى ذلك تتطلب جهداً خاصّاً لكل سلسلة»[١١٩]. ومع هذا فإن واليس و مونمور (Montmort) وَ دوموافر (Demoivre) و برنولي[١٢٠] نفسه قد استمروا بطريقة أو بأخرى في البرهنة بواسطة الاستقراء غير التام.

تبيّن هذه الحجج المختلفة، كما يبدو لنا، أن باسكال في تطبيقه لمبدأ الإستقراء الرياضي وفي بعض نواحي صياغته لهذا المبدأ، لم يقطع نهائياً كلّ صلة مع استدلال كاستدلال R_1، لهذا السبب فإن مبدأه لم يفرض نفسه بطريقة مستقلة عن المجال الخاص للتطبيق، علماً بأنه كان بإمكان هذا المبدأ أن يستبعد نهائياً أي برهان بمجرد الإستقراء (أي غير التام). وليس المقصود إطلاقاً إنكار التجديد في صياغة باسكال بالمقارنة مع الاستعمالات غير المصاغة لـ R_1، أو حتى الصياغات السابقة عليها، كصياغة باشيه. هذه الجدّة تحديداً هي التي تسمح لقارىء معاصر أن يرى في مبدأ باسكال، رغم نقص الدقة في صياغته، مبدأ سابقاً على مبدأ الإستقراء الرياضي وإن بصورٍ قديمة. وبتعبير آخر، لو انطلقنا من صياغة لاحقة على بيانو فسنجد في صياغة باسكال آثار واضحة تسمح لنا بالتعرف إلى مبدأ الإستقراء الرياضي. لكن لو انطلقنا من صياغة باسكال فسوف ندخل R_1 كاستدلال إستقرائي رياضياً، والإستدلال التراجعي كشكل قديم للإستقراء الرياضي. لكن هذا الإدخال يتحقق بصعوبة انطلاقاً من صياغة بيانو. وهكذا ففي كتابة للتاريخ تعتمد المنحنى التقهقري نجد في محاولة باسكال إتماماً لمحاولتي الكَرَجي والسموأل، بينما تظهر محاولة بيانو كإتمامٍ لمحاولاتٍ شهدت بداياتها مع باسكال. وكي لا يكون المنهج التقهقري في كتابة

---

(١١٩) Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi* (Basel: [s.pb.], 1713), p.95.

(١٢٠) وهكذا بعد نقده لواليس مباشرة يعمد برنولي بواسطة الإستقراء غير التام إلى إيجاد الطريقة العامة لجمع مربعات، ومكعبات... إلخ الأعداد الطبيعية الأولى n أي:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c \quad \text{حيث} \quad C = 1, 2, 3.....$$

انظر: المصدر نفسه، ص ٩٦ وما يليها.

التاريخ مبتذلاً علينا أن نختار كنقطة انطلاق في الماضي الإنجاز الذي هو إنجاز لبدءٍ بالضرورة. إن المرجع المزدوج الضروري للمؤرخ يسمح لنا بالإستنتاج أن: طرق البرهان لكلٍّ من الكرجي والسموأل ـ R_1 بشكل رئيسي والبرهان التراجعي إلى حدٍّ ما ـ هي بداية الإستقراء الرياضي إذا ما اعتمدنا باسكال كنقطة انطلاق.

الفَصْل الثَّاني

التَّحْليل العَدَديّ

استخراج الجذر الميمي وابتكار الكسور العشرية
في القرنين الحادي عشر والثاني عشر[1]

مقدمـــة

من الملاحظ أحياناً، في تاريخ الرياضيات أن اكتشافاً ما يبقى، لوقت غير قصير دون تأثير فعلي ودون أن يُمسَّ، متوارياً في «غياب نسبي» بعيداً عن الوثـائق الريـاضية الفـاعلة. يمكننا الكـلام عن غياب لأن هـذا الاكتشاف لم يفرض نفسه عنـد حدوثـه كعنصر فاعل من عناصر الممارسة الريـاضية، لكنـه غياب نسبي، لأن هـذا الاكتشاف قد حصل بالفعل وتمَّ تناقله أيضاً. وإن بدا هذا الانتقال إرثاً بسيطاً في تتابع المؤلفين، لا كاتصال لفصل من الرياضيّات المدرَّسة، فقد أصبح منذ ذلك الوقت مكسباً لتاريخ العلم لا يمكن التصرف به.

إن ابتكار الكسور العشرية يوضّح جيداً الحالة التي نحن بصدد وصفها. هنا كما في أي مكان آخر لن يعوز الدراسة الدقيقـة التعرّف إلى هـذا «الغياب» الـذي حجب لـوقت ما عنصـراً أساسيـاً من التاريـخ الخاص بهـذا الابتكار. ومـع هـذا ليس نـادراً بالنسبة إلى مؤرخي ابتكار ما ـ الكسور العشرية هنا ـ أن يعتمدوا من جـانبهم هذا أو ذاك من الموقفين اللذين وإن كانا متعارضين فكلاهما ناف للتاريخ الموضوعي.

---

(١) *Archive for History of Exact Sciences,* vol. 18, no.3 (1978), pp.191-243.

بـإمكان المؤرخـين، وهذه أكـثر الحالات شيـوعاً، تسجيـل الابتكـار وتـواريخـه المختلفة بطريقـة تجريبيـة كليّاً دون أقـل تفسير لكسـوفه النسبي. عنـد ذلك لا يعـدو التفسـير الوافي أن يكـون سـوى تسلسـل جيـد الإعـداد، وتكـون النـزعـة كبـيرة في الانكباب على الوثائق سعياً وراء رائد محتمـل. وغالبـاً ما لا يبقى من التـاريخ سـوى تعاقب زمني وعلم آثار أحياناً وقصة تاريخية دائماً.

بإمكان المؤرخ أيضاً، بطريقة أكثر حـذراً دون شك، استخـلاص الشروط التي جعلت ابتكاراً كهذا ممكن الحصول، ليفسّر بعد ذلـك سعيه المتـوقف بعبارات عصيـة مبيّناً العقبات النظرية والعملية التي قابلها، فيجازف عندها في ردّ الحقيقة التاريخية إلى شروطهـا، وينتج من جـراء ذلـك، بـدلاً من التـاريـخ إمـا أسـطورة وإمـا في أحسن الحالات فلسفة للتـاريخ. ومـا يضاهي بـأهميته شروط إمكـانية ابتكـار مفهومي، هـو امكاناته الخاصة في التطبيق. هذه الامكانات، بالتغييرات التي تفرضها، والتعديـلات التي تتطلبها والانتشـار الذي تستلزمـه، أحيانـاً لا تحدد بـالنسبة إلى التجـدد المفهومي مجال وجوده الخاص فقط، بل أكثر من ذلك، إنها تكسبه حقيقته التاريخية الفعلية.

سوف نرى أن ابتكار الكسور العشرية يتحدد في نهاية حركتـين، تمتد الأولى إلى ما قبل القرن الثاني عشر وكان هدفها تجديد الجبر بالحساب وواسطتها توسيع الحسـاب الجبري المجرّد؛ أما الحركة الثانية، خلال الفترة نفسها، وحيث تنـدرج ضمنها نـظرية الكسـور العشرية، فقـد حصلت عبر عـودة بواسـطة الجبر المجـدّد إلى نظريـة الأعداد والتحليل العددي. هذه العودة سوف تحدث أيضـاً تقدمـاً في فصل اقتصر حتى ذلـك الوقت على مجرد التجميع للوسائل والوصفات، أي الطرائق العددية للتقريب.

إن درس شروط هذه الإمكانية الذي سنتـابعه بـدقة حتى النهـاية، هـو ذو قيمة إفـتراضية دائـماً واستكشافيـة أحيانـاً. وقـد سمـح لنـا بـالفعـل بتعيـين مجمـوعـة من الاكتشافات، وتقديم وثائق غير منشورة ومجهـولة حيث يـوجد معـروضاً بيـان الكسور العشرية والطريقة المسماة طريقة روفيني ـ هورنر (Ruffini-Horner)، وكذلك الصيغـة العامة لتقريب الجذر الأصم إضافة إلى طـرق أخرى مكـرّرة سمحت بتحسين طـريقة التقـريب. لكن بـدا لنـا ضروريـاً البحث عـما يمكّن من فهم لماذا بقيت الكسـور العشرية، المبتكرة سابقاً والمالكة بنـاء على ذلـك لوسـائلها النـظرية وغـرض تواصلهـا الفعلي، خارج التاريخ تقريباً، الأمر الذي فـرض علينا درس شروط تـطبيقها. وكـان

من الضروري انتظار الإعداد المتأخر نسبياً للدّالة اللوغارتمية كي يلتقي هذا الابتكار بأحد أول مجالات تطبيقه وحيّز وجوده الفعلي.

لكن قبل التوسع في هذا التاريخ الجديد للكسور العشرية، لنتوقف عند الصياغة التي هي بالأصل قانونية (Canonique) كما يصفها المؤرخون عادة.

لقد كان من المألوف أن تؤخذ الديسم (La disme)[٢] التي كتبها ستيفن (S. Stevin) كعمل تعرض من خلاله وللمرة الأولى الكسور العشرية[٣]، وخلال قرون عديدة لم يطرأ تقريباً، أي أمر يمكّن من وضع هذا الإعتقاد الراسخ موضع الشك. من المؤكد أن المؤرخين، لدى وصولهم إلى معرفة أفضل بمن سبق ستيفن من

---

(٢) انظر اعادة نشر نص De Thiende ولترجمته الانكليزية من قبل روبير نورتون، عام ١٦٠٨، في:

Dirk Jan Struik, *The Principal Works of Simon Stevin* (1958), vol. 2 A, p.386.

انظر أيضاً اعادة الطبعة الفرنسية: *La Disme* في ختام دراسة:

George Sarton, «The First Explanation of Decimal Fractions and Measures,» *Isis*, vol. 23, no.65 (June 1935), pp.230-244.

(٣) وهكذا فإن سترويك، مثلاً، وهو من أفضل المتخصصين بستيفن، يكتب:

«Stevin's main contribution to the development of mathematics being his introduction of what are usually called decimal fractions».

وفي مكان آخر:

«Yet none of the steps taken by Regiomontanus and other writers is comparable in importance and scope with the progress achieved by Stevin in his De Thiende», Dirk Jan Struik, *Simon Stevin, Science in The Netherlands around 1600* (1970), pp.16 and 18.

انظر أيضاً:

Sarton, Ibid., p.174:«There are many examples of decimal fractions before 1585 yet no formal and complete definition of them, not to speak of a formal introduction of them into the general system of numbers».

ونستطيع مضاعفة المراجع المماثلة وكذلك ذكر العديد من المؤلفين الذين يعالجون الفكرة نفسها، ونكتفي بمثل حديث عن ذلك يعود لـ Scott الذي كتب في عام ١٩٦٩:

«Nevertheless, it was not until the close of the sixteenth century that we detect the first methodical approach to the system. In 1585 there appeared a short track *La Disme* by Stevin... In this, the principles of the system, and the advantages which would follow from its use, are clearly set forth».

انظر: Joseph Frederick Scott, *A History of Mathematics: From Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century* (London: Taylor and Francis, 1969), p.127.

الغـربيين، أصـابهم بعض الإرتباك لكنهم للحـظة واحدة لم يضعـوا موضـع التسـاؤل أسبقية الرياضي الفلمنكي.

نستطيع دون شك أن نشير هنـا وهناك إلى استعـمال معين للكسـور العشرية في أعمال الريـاضيين السـابقين لستيفن، وهكـذا فبالإمكـان إيراد أسـماء كل من رودولف (Ch. Rudolff) و أبيان (P. Apian) وغيرهما كثير، لكن سرعان ما نقـرّ بأن معـرفتهم بالكسور العشرية تبقى مجتزأة وناقصة. في حين أن ستيفن قصد متعمـداً إفراد عـرض خاص لهذه المسألة، فقد صادفها هؤلاء الرياضيون من خلال مسائلهم الخـاصة. ففي عام ١٩٣٦ فقط استطاع غاندز (S. Gandz) و سارتون (G. Sarton)[٤] اكتشاف نص لبونفيس (Bonfils) (١٣٥٠)، وشروحات غاندز خاصة هي ما زعزع هـذا التقليد إذ لوقت ما، كان الإعتقاد سائداً بأن أسبقية ابتكار الكسور العشرية تعود حقـاً وبالفعـل لبونفيس.

إن دراسـة رصينة وخـالية من اصـطناع السلف سمحت سريعـاً بتبـديـد هـذا المنزلق. ففي الواقع، لا نصادف في نص بونفيس في أحسن الأحوال، سـوى برنـامج قليل الوضوح لنظريـة الكسور العشريـة[٥]. وسواء أكـان المقصود حضـوراً محصوراً أم برنامجاً غير مفصّل لهذه النظرية، فهنا تكمن الوقائع التي أراد المؤرخون دمجها في تاريخ ابتكار الكسور العشرية. وقد رأينا نتيجة لذلك تصاعد عقيدة نستطيـع تلخيصها عـلى النحو التالي: لم تقم قبل ستيفن أية محاولة في المستوى الذي وصل إليه هذا الرياضي،

---

(٤) انظر مقدمة: George Sarton, in: Solomon Gandz, «The Invention of the Decimal Fractions and the Application of the Exponential Calculus by Immanuel Bonfils of Tarascon (c.1350),» *Isis*, vol.25, no.69 (May 1936), pp. 16-45.

(٥) انظر: المصدر نفسه، ص ٢١، حيث يكتب غاندز:

«The invention of Bonfils introduces two new elements; the decimal fractions and the exponential calculus».

فإن جل ما نستطيع استخلاصه من الترجمة العبريـة لنص بونفيس، هي تـرجمة اعـطاها غـاندز بنفسه، ويوجد ملخص لها فيما كتبه جيشكوويتش:

«Die Kurze Skizze eines Systems von «Primen», «Sekunden», «Terzen» USW. in einer Handschrift des jüdischen Mathematikers Immanuel ben Jacob Bonfils, der im 14. Jahrundert in Tarascon gelebt hat, ist im Vergleich Zur Dezimal bruchlehre al-kāsîs völlig unbedeutend. - Dabei hat Bonfils Keinerlei Berechnungen mit Hilfe von Dezimalbrüchen vorgenommen».

انـظر: A. P. Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalters* (Leipzig: Teubner, 1964), p.241.

فسابقوه كانت لديهم في أحسن الأحوال معرفة ما بالكسور العشرية[6].

وفي الواقع، فإن أبحاثاً حديثة نسبياً بيّنت أن هذه العقيدة ليست صحيحة. ففي عام ١٩٤٨ أثبت المؤرخ الألماني لوكي (P. Luckey)[7] أن مفتاح الحساب للكاشي المتوفى (١٤٣٦ - ١٤٣٧) يتضمن عرضاً للكسور العشرية لا يقل مطلقاً عما قام به ستيفن. وبما أن برهانه لا يقبل الرفض فقد انضم المؤرخون شيئاً فشيئاً إلى رأي لوكي ونسبوا إلى الكاشي اكتشاف هذا الأمر وابتكار الإسم له، فأصبحت أسبقية ستيفن مشبوهة هذه المرة. وبالإمكان أيضاً توقع إعادة كتابة تاريخ هذا الفصل من الرياضيات، لأن أي جدال حول الأسبقية، يطول تاريخ أساس النظرية نفسه. ولكن عوضاً عن التحليل الإضافي الضروري لفهم أفضل لهذا الأساس، لا نجد سوى محاولتين: الأولى إنتقائية تدمج اسم الكاشي دون قيد أو شرط في الجدول التاريخي القديم للكسور العشرية، والثانية تكرر خطأ غاندز وتسارع إلى سبر أغوار الماضي كيما تماثل، إذا صح التعبير، بين بونفيس والكاشي. وهكذا كي لا نشير إلا إلى مثل واحد لهذه النزعة الإنتقائية، نقرأ ما كتبه مؤخراً سترويك (J. Struik)[8]:

(٦) انظر: Johannes Tropfke, *Geschichte der Elementar - mathematik in systematischer Darstellung*, 3 vols. (Berlin: Guyter, 1930), p.178: «Wenn noch andere Männer neben stevin als Erfinder der Dezimalbrüche genannt werden, so ist das nicht zu verwunder. Die Erfindung der Dezimalbruchrechung lag gleichsam in der luft Gelehrte aus allen Lañdern beteiligten sich an ihr».

ويعبر عن الفكرة نفسها: Sarton, «The First Explanation of Decimal Fractions and Measures,» p.173.

انظر أيضاً: Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, 2 vols. (Chicago, Ill.: Open Court Publishig Company, 1928-30), p.314: «The invention of decimal fractions is usually ascribed to the Belgian Simon Stevin, in his *La Disme* published in 1585. But at an earlier date several other writers came so close to this invention, and at a later date other writers advanced the same ideas, more or less independantly, that rival candidates for the honor of invention were bound to be advanced. The *La Disme* of Stevin marked a full grasp of the nature and importance of decimal fractions, but labored under the burden of a clumsy notation».

(٧) Paul Luckey, *Die Rechenkunst bei Ǧamšīd b. Mas'ūd al-kāšī* (Wiesbaden: Steiner, 1951), p.102 sq.

(٨) Dirk Jan Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969), p.7: «The introduction of decimal fractions as a common computional practice can be dated back to the Flemish pamphlet *De Thiende* published at Leyden in 1585, together with a French translation, *La Disme*, by the Flemish mathematician Simon Stevin (1548-1620), then settled in the Northern = Netherlands. It is true that decimal fractions were used by the Chineese many centur-

«يمكن إرجاع تاريخ الكسور العشرية وانتشارها كحساب عادي إلى كتيّب فلمنكي «De thiende» نشر في الليدن (هولندا) سنة ١٥٨٥ مع ترجمته الفرنسية «La disme» للرياضي الفلمنكي سيمون ستيفن (Simon Stevin) (١٥٤٨ - ١٦٢٠) عندما كان يقيم في شمال هولندا. وصحيح أن الصينيين استعملوا قبل ستيفن بقرون عديدة الكسور العشرية، كما استعمل الفلكي الفارسي الكاشي الكسور العشرية والستينية بيسر في كتابه «مفتاح الحساب» (سمرقند، أوائل القرن الخامس عشر). وصحيح أيضاً أن رياضيي عصر النهضة ككريستوف رودولف (Christoff Rudolff) (في النصف الأول من القرن السادس عشر) قد استعملوا في مناسبات عديدة الكسور العشرية تحت نماذج مختلفة».

وهكذا يُمد التاريخ التقليدي للكسور العشرية كي يُدمج فيه اسم الكاشي بعد أن تم تقليص أهمية إسهامه بشكل واضح.

أمّا مؤرخو النزعة الثانية فقد سعوا جهدهم كيما يعودوا باكتشاف الكسور العشرية إلى القرن العاشر ونسبته إلى رياضي عربي هو الإقليدسي[9]. فبخصوص

ies before Stevin, and that the Persian Astronomer Al-Kāshī used both decimal and = sexagesimal fractions with great ease in his *Key to Arithmetic* (Samarkand, early fifteenth century). It is also true that renaissance mathematicians such as Christoff Rudolff (first half sixteenth century) occasionally used decimal fractions, in different types of notation».

هناك موقف أقل انتقائية لكنه أكثر تشوشاً هو موقف كل من جيريك (Gericke) و فوجيل (Vogel) مترجمي كتاب: *La Disme* إلى الألمانية، حيث يكتبان:

«Al-Kaschi bringt aber nicht nur die vollständige theorie, sondern en fihrt auch die Rechnungen gelegentch im einzelnen, vor, einschlieblich der verwandlung von sexagesimalzahlen und Brüchen in Dezimale und umgekehrt wobei er zur Trennung von Ganzen und Brüchen sich verschiedener Methoden bedient...».

وفي الواقع أن الفارق الوحيد عن ستيفن حسب هذين المؤلفين مبيّن على هذا النحو:

«Was aber bei ihm im Gegensatz zu stevin auch nicht zu finden ist und was diesem ein Hauptanliegen war, ist die konsequente Anwendung auf alle Masse, deren dezimale Einteilung von grösster praktischer Bedeutung sein musste».

نعلم من جهة ان هذه التفسيرات ليس لها من أثر حقيقي، ومن جهة أخرى فإن الكاشي كما سنرى يستخدم تحويلات غير تلك المستعملة عادة في عصره؛ ونتيجة لذلك سيكون تقييم هذا الفارق غير دقيق. انظر: Helmuth Gericke and Kurt Vogel, *De Thiende von Simon Stevin,* Dutch Classics on History of Science, 15 (Nieuwkoop: B. de Graaf, 1965). pp.44-45.

(٩) أبو الحسن أحمد بن ابراهيم الاقليدسي، الفصول في الحساب الهندي، تحقيق أحمد سعيدان، تاريخ علم الحساب العربي، ج ٢ (عمان: اللجنة الاردنية للتعريب والنشر والترجمة، ١٩٧٣).

البحث الجبري ـ الفصول ـ لهذا الأخير كتب سعيدان في مقالة صدرت مؤخراً[١٠]:

«إن الفكرة البارزة في عمله هي تلك المتعلقة بالكسور العشرية. فالإقليدسي استعمل الكسور العشرية وأظهر أهمية الإشارة العشرية فيها فاقترح إشارة جيدة لها. ليس الكاشي (d.1436/7) هو من عالج الكسور العشرية في كتابه مفتاح الحساب بل الإقليدسي الذي عاش قبله بخمسة قرون هو أول رياضي مسلم معروف كتب حول الكسور العشرية».

هذه هي النبذة التاريخية عن قضيتنا التي صيغت، كما نلاحظ، بناء على صدفة اكتشاف النصوص. وسوف نفهم أن حذر المؤرخين ظاهري فقط، ويقودهم هنا وهنالك إلى انتقائية واضحة، كما أن التأكيدات القاطعة تكشف بالمقابل، كتلك الخاصة بغاندز بخصوص بونفيس وتأكيدات سعيدان حول الاقليدسي، عن قراءة عاجلة وشديدة المواربة. وأخيراً ألا يجب على دراسة تاريخية جديدة بهذه الصفة أن تضع منذ البدء أي ابتكار في سياقه، وتمهّد لبحثها بتحليل مفهومي دقيق عن الشروط التي جعلته ممكناً؟

في هذه الحالة المحددة، يتعلق الأمر في نهاية المطاف بالجبر. وعلينا بادىء الأمر إذن أن نستخلص هذه الشروط.

١ ـ الطرق العددية ومسائل التقريب

إن الضبط المتزامن للمفاهيم والتقنيات الجبرية الذي سبق وأجريناه[١١] سمح لنا بتعيين تجدد ما للجبر انطلاقاً من القرن الحادي عشر. هذا التجدد الذي تطوّع له الكرجي (في نهاية القرن العاشر وبداية القرن الحادي عشر) وتابعه لاحقوه وخاصة السموأل (المتوفى في ١١٧٤) كان يهدف إلى «إجراء عمليات على المجهولات كتلك

---

(١٠) Ahmad Saīdan, «The Earliest Extant Arabic Arithmetic,» *Isis*, vol.57, no.194 (1966), p.484.

«The most remarkable idea in his work is that of decimal fractions. Al-Uqlīdisī used decimal fraction as such, appreciates the importance of a decimal sign, and suggests a good one. Not al-Kāshī (d.1436/7) who treated decimal fractions in his Mifthāh al-Hisāb, but al-Uqlīdisī , who lived five centuries earlier, is the first Muslim mathematician so far known to write about decimal fractions».

(١١) Al-Samaw'al Ibn Yahya Abbas al-Maghribi, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'āl* (Damas: Université de Damas, 1972).

التي يجريها الحسابي على المعلومات». وبمعنى آخر كان المقصود تطبيق الحساب على جبر الخوارزمي ولاحقيه. هذه الحسبنة للجبر(١٢) كما بيّناها كانت تتخذ من توسيع الحساب المجرد وسيلة رئيسية. هذه الوسيلة أثبتت فعاليتها ليس فقط في التوسيع الخاص بالجبر كما في «حساب المجهولات» حسب ما كان يسمى في تلك الحقبة، ولكن أيضاً في تقدم نظرية الأعداد كما في الطرق العددية.

التفسير الذي ذكرناه هنا سمح بفهم أعمق كما يبدو لإحدى النزعات الأساسية للجبر العربي، إذ كان من الممكن أن يبقى مجرد تفسير محتمل بالتأكيد، لكنه ليس اجبارياً. إن قدرة هذا التفسير على استنفاد وقائع ومفاهيم مدرسة الكَرَجي وإمكاناته على الإيحاء بوجهات تقود إلى اكتشاف وقائع جديدة، تكسبه وحدها يقيناً أكثر ثباتاً. وبالفعل فإن درس أعمال الرياضيين من مدرسة الكرجي مكّننا من أن نبين:

- إن ابتكارات عديدة منسوبة حتى الآن إلى جبريّي القرنين الخامس عشر والسادس عشر هي في الواقع من عمل هذا التقليد. ومن بين ما توصّل إليه الرياضيون من مدرسة الكرجي نجد نظريات كاملة كجبر كثيرات الحدود، وقضايا جوهرية - صيغة ذات الحدّين وجدول المعاملات، وخوارزميات مثبتة - كتلك الخاصة بقابلية قسمة كثيرات الحدود، وطرق البرهنة كالإستقراء التام.

- إن عمل الكاشي هو تتويج لاستعادة بدأها جبريّو القرنين الحادي عشر والثاني عشر وهو يحتوي بالأساس على نتائجهم.

من خلال الوصف السابق نستطيع تقديم الفرضية التالية: إن الكسور العشرية التي لا يزال ينسب ابتكارها إلى الكاشي، يجب أن تكون من عمل جبريّي القرنين الحادي عشر والثاني عشر. أفلم يكونوا جميعهم ممتلكين للوسائل النظرية الضرورية لتصورهم لها؟ فمن بين جميع لاحقي الكرجي كان السموأل أفضل من ساعدنا على استخلاص تفسير للفرضية السابقة. ومؤلفه الجبري الذي حلّلناه سابقاً يبدو مباشرة كمساهمة نظرية وتقنية لتحقيق مشروع الكرجي، والأكثر من ذلك فبحثه الجبري

---

(١٢) Rushdi Rashed, «L'Arithmétisation de l'algèbre are XIème siècle», dans: Actes du XIIIème congrès d'histoire des sciences, Moscou, 1971, sections III et IV (1974), pp.63-69.

انظر أيضاً: Rushdi Rashed, «Recommencements de l'algèbre aux XIème et XIIème siècles,» in: J.E. Murdoch and E.D. Sylla, eds., *The Cultural Context of Medieval Learning* (Dordrecht - Holland: D.Reidel publ. Co,1975), pp.33-60.

الباهر يؤكد لنا أنه من بين جميع لاحقي الكرجي كان هو دون شك أحد الذين التزموا بتنفيذ مشروعه.

في بحث آخر للسموأل «القـوامي في الحساب الهنـدي» المحرر في ١١٧٢ (قبـل وفاته بعـامين) يـوجد عـرض للكسور العشريـة(١٣). وسوف نعـطي صورة(١٤) عنـه هنا كخلاصة لـ «بحثه» وكعمل رياضي أخير للمؤلف. هذه المعلومات عن سيرته الـذاتية تسمح لنا بتحديد الخطوط الكبرى لمحتوى هذا الابتكار.

وعلى ما يبدو، فإن النتائج التي وصل إليها الجبر المجدّد جعلت عـودة خبيرة إلى الحساب ممكنة. فظهر الحساب وكأنـه المجال المفضَّـل للتطبيق. فقـد تم التوصـل إلى تعميم الطرائق والوسائل المستعملة في الحالات الخاصة وحدها من قبل الحسـابيّين ممـا

---

(١٣) يعلمنا المفهرسون العرب القدماء أن السموأل كتب بحثاً في الحساب عنوانـه «القوامي في الحساب الهندي». انظر أبو العباس أحمد بن القاسم بن أبي اصيبعة، **عيون الأنباء في طبقات الأطباء**، شرح وتحقيق نـزار رضا (بـيروت: دار مكتبة الحيـاة، ١٩٦٥)، ص ٤٦٢، حيث أن السموأل انجـز هذا البحث عام ٥٦٨ هـ (١١٧٢ ـ ١١٧٣ م). انظر أيضاً:

Heinrich Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Leipzig: Teubner, 1900), et Fuat Sezgin, *Geschichte des Arabischen Schrifttums* (Leiden: Brill, 1967-1982), p.197.

مجمل المؤلف لم يُعثر عليه حتى الآن؛ لكن هناك كتاباً للسموأل، في:

«Biblioteca Medicea Laurenziana, Orient. (238),»

تحت عنوان «المقالة الثالثة في علم المساحة الهندية». هذه المخـطوطة مؤلفـة من ١١٥ ورقة، والنسخـة من عام ١٥٧ هجري (١٣٥٠ م) وهي في حالة سيئة. من الواضح أن العنوان السابق غير صحيـح. فإن سزجن (Sezgin)، الذي أحرص عـلى شكره هنـا، رغب في اعطائي ميكـروفيلماً لهذه المخـطوطة مبادلة لما كتبته له عن شرف الدين الطوسي وما زودتـه به عن ديـوفنطس ومـلاحظاً من جهـة ثانيـة ان المخطوطة هي:

«hat trotz ihres Titels mit der indischen Ausmessung nicht direkt Zutun»,

انظر: المصدر نفسه.

وبامكاننا فعلياً أن نبيّن ان المقصود بـالضبط هو فصـل من ١٥٠ ورقة من «البحث الحسـابي»، «القوامي». إذ ان الناسخ كتب في آخر وجه وظهر الورقة ص ١١٤: «إننا ننجز الكتاب الذي وضعـه السموأل في باكـو والذي أنهاه في التـاسع من شهـر رمضان سنـة ٥٦٨». ويذكـر بعد ذلـك انه يملك النسخة المخطوطة بيد السموأل نفسه. ان الموضوع نفسه والتواريخ والاسناد لا تـدع مجالاً للشـك في هوية المخطوطة. وقد عرضنـا نتائـج هذا الاكتشـاف للمرة الاولى في مؤتمـر تاريـخ العلوم العربيـة في حلب ولقد تعهدنا على أي حالٍ بطبعة مبنية على الأصول لهذا النص الصعب.

(١٤) انظر الملحق.

وفّر لهم طرقاً أخرى جهلوها. ولقد شكّلت مجموعة هذه الوسائل والطرائق منذ ذلك الحين جزءاً مما سمّي فيها بعد بـ «التحليل العددي». ففي نهاية الحركة الأولى لهذه العودة الظاهرة في كتاب «القوامي في الحساب الهندي» للسموأل أبصرت نظرية الكسور العشرية النور. وعدا عن كونها نظرية فهي تقنية ضرورية كي تؤمّن هذه العودة بصورة أفضل. بكلمة أخرى، يبدو الابتكار الأول للكسور العشرية وكأنه الحل النظري لمسألة نظرية وتقنية في الوقت نفسه.

بفضل هذا الوصف تمكنّا من إزاحة تواريخ مختلف الإكتشافات لقرنين ونصف القرن على الأقل، ومن ضمنها الكسور العشرية. وها نحن الآن في موقع يسمح لنا بطرح الأسئلة المنسيّة من قبل المؤرخين ألا وهي: لماذا هذه الابتكارات؟ ولأية أسباب أبصرت النور في ذلك المكان وفي ذلك الزمان؟

كي نتمكن من تفصيل وصفنا، علينا أولا أن نعرف المظهر المفهومي والتقني الذي تندرج ضمنه نظرية الكسور العشرية. ففي كتاب السموأل تلي هذه النظرية فصول عديدة مخصصة لمسائل التقريب وبصورة خاصة تقريب الجذر الميمي (الموجب) لعدد ما. المقصود في الواقع تقريب الأعداد الحقيقية الجبرية حيث يتحدد كل عدد كجذر للمعادلة: $x^n = Q$ حيث $n = 2, 3, \dots,$ ، ولكن لا يمكن معرفته بواسطة الأعداد العشرية. وبفعل «قرّب» يقصد السموأل معرفة عدد حقيقي بواسطة سلسلة من الأعداد المعلومة، مع تقريب بإمكان الرياضي تصغيره إلى أي حدّ يريد. المقصود قياس الفرق بين الجذر الميمي الأصمّ وسلسلة من الأعداد النسبيّة. وهكذا فهو يكتب بطريقة عامة: «والذي نستخرج بالحساب من الجذور الصم بالتقريب، إنما يراد به تحصيل مقدار منطق قريب المقدار من الجذر الأصم. ويمكن وجود مقدار منطق أقرب منه إلى الجذر الأصم ويمكن وجود مقدار ثالث منطق أقرب من المقدار الثاني والأول إلى الجذر الأصم لأن كل مقدار منطق يفرض قريباً من جذر أصم، فإن التفاوت الذي بينهما هو على الحقيقة خط مستقيم والخط قابل للإنقسام والتجزء بلا نهاية. فلهذا صار ممكناً أن لا نزال نجد مقداراً منطقاً قريباً من الجذر الأصم، ونجد مقداراً آخر منطقاً أقرب من الأول إلى الأصم بلا نهاية»(١٥).

هذه هي المسألة العامة التي تطرحها هذه الفصول، وبالتالي فالسموأل كان يعي الصعوبة التي يطرحها التفسير السابق عندما يتعلق الأمر بقوى أكبر من ثلاث. وهي صعوبة مليئة بالفائدة لكنّها خارج بحثنا الحالي. فلنحتفظ بالرؤية العامة حيث مسألة

(١٥) «البحث،» ص ٣٢ (وجه الورقة).

التقريب مطروحة بوضوح كمسألة قياس الفرق، ولنر كيف أدخلت وكيف حُلّت هذه المسألة.

أ - طريقة «روفيني - هورنر» (Ruffini-Horner): في بحث مهم نشر عام ١٩٤٨ أثبت لوكي(١٦) أن الكاشي كان يمتلك بالفعل طريقة عامة لاستخراج الجذر الميمي ليست سوى التطبيق على حالة خاصة كطريقة رياضيي القرن التاسع عشر أمثال روفيني وهورنر. وكنا نجهل كل شيء عن قصة تلك الطريقة، كذلك الأمر عن نتائج أخرى توصل إليها الكاشي. ولأن الأخير ولاحقيه كذلك لم يعلنوا عن اكتشافهم، فقد غفل المؤرخون عن حذرهم المعروف واستبدلوا التاريخ بترّهة واستحضروا لذلك مصدراً صينياً من القرن الثاني عشر. وما زالت تلك الصورة مستمرة منذ لوكي على الرغم من الأعمال المهمة(١٧) المكرّسة حديثاً لرياضيّي القرن الخامس عشر.

سوف نبيّن أن كتاب السموأل (١١٧٢) احتوى على الأقل طريقة روفيني - هورنر وفق ما صاغه وطبّقه الكاشي وذلك بعد قرنين ونصف القرن تقريباً. فالسموأل لم يدّعِ أنه صاحب الطريقة، حتى أنه يفترض من قارئه التعوّد على المفاهيم والعمليات التي تحتوي عليها. إن المفاهيم والتقنية الجبرية الضرورية لصياغتها تعود في الواقع الى مدرسة الكرجي، ونستطيع منذ الآن التقدم بافتراضنا: كما قدّمت من خلال كتاب السموأل (١١٧٢)، فإن هذه الطريقة هي من عمل مدرسة الكرجي. لكن علينا أولاً تعريف هذه الطريقة وتحديد صياغتها في القرن الثاني عشر. وسوف نتجنب الإعادات وذلك باعتمادنا على مثل يصفها بشكل كامل:

---

(١٦) Paul Luckey, «Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik,» *Mathematische Annalen,* vol.120 (1948), pp.217-274.

(١٧) انظر: Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelaltter,*
حيث يبدو أن الكاتب يستعيد استنتاجات التحليل لمقدمة الترجمة الروسية لمؤلف الكاشي (روسنفيلد، سيجال وجيشكوويتش)، عام ١٩٦٥. ويظهر أن ناشري مؤلف الكاشي يشاطران لوكي رأيه. انظر: غياث الدين جمشيد الكاشي، مفتاح الحساب، تحقيق احمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفني الشيخ، مراجعة عبد الحميد لطفي (القاهرة: دار الكاتب العربي للطباعة والنشر، ١٩٦٧). انظر أيضاً تحليل وفكرة لوكي في دراسة دقيقة لـ:
A. Dakhel, in: Wasfi A. Hijab and E. S. Kennedy, eds., *Al-Kāshī on Root Extraction* (Beirut: American University of Beirut, 1960).

استخراج الجذر الخماسي[18] لـ:

$$Q = 0;\ 0,0,2,33,43,3,43,36,48,8,16,52,30.$$

وهذا يكافىء البحث عن الجذر الموجب للمعادلة:

$$f(x) = x^5 - Q = 0 \qquad (1)$$

ويمكننا تمييز عدة مراحل للبحث عن الحل:

تمهيد:

نحدد أولاً المواقع من نوع nk حيث $n=5$ وَ $k \in \mathbb{Z}$ نحصل على المواقع الخاصة: $0, -5, -10, -15$.

نسمّي هذه المواقع، المواقع التامّة أي المواقع التي يمكن لأرقام الجذر الموجب أن تأخذها.

كلٌّ من هذه المواقع ذكر مرتين - أُنظر الجدول رقم (٢ - ١)[19]. نضيف عن جهة اليمين العدد الضروري من الأصفار فنحصل أخيراً على الشرائح التالية:

		2	33	43
3	43	36	48	8
16	52	30	0	0

شرحت هذه العمليات من قبل السموأل على النحو التالي:

«كتبت ذلك [Q] في سطر مبطوح كالأعداد الصحاح وابتدأت بالدرج، فجعلتها عن يسارك في الطرف الأيسر، وسائر المراتب ممتدة منها إلى يمينك، وابتدأت من الدرج وعلمت فوقها صفراً أو علامة المعطية، ثم عبرت أربع مراتب وعلمت على المرتبة المعطية[20] وهي التي فوقها $\overline{\text{مـجـ}}$ ثم تجاوزت أربعاً وعلمت فوق $\overline{\text{٨}}$ ، وعملت أيضاً في السطر الأسفل علامات محازيات للمراتب المعطية، وتركت السطر الثاني والثالث والرابع خالية»[21].

---

(١٨) «القوامي،» ص ١٠٨ (وجه الورقة). يستعمل السموأل نظام الجُمل لكتابة الأعداد. والمقصود بذلك الاحرف الثمانية والعشرين من الابجدية العربية وقد رُتِّبت حسب ترتيب ساميّ قديم لكتابة الاعداد. وبسبب مصاعب الطباعة كتبنا مباشرة الأعداد المقابلة لتلك الأحرف.

(١٩) «القوامي،» ص ١٠٨ (وجه الورقة).

(٢٠) الترجمة الحرفية لكلمة «المعطية»، يعني: ما يعطي أحد أرقام الجذر.

(٢١) «القوامي،» ص ١٠٨ (وجه وظهر الورقة).

جدول رقم (٢ ـ ١)

0					0					0					0	الأولى
			2	33	43	3	43	36	48	8	16	52	30			الخامسة
																الرابعة
																الثالثة
																الثانية
0					0					0					0	الأولى

المرحلة الأولى

(١) يمكننا بسهولة تعيين مجال الجذر، ليكن $x_0 \in [60^{-1}, 60^0[$، يكتب x_0 إذن على الشكل التالي:

$$x_0 = x_1 60^{-1} + x_2 60^{-2} + \cdots + x_p 60^{-p} + r$$

حيث x_i ليست جميعها معدومة.

ترجع المسألة إذن لتحديد كلٍّ من: $x_1, x_2, \ldots, x_p$ على التوالي. لتحديد x_1 كتب السموأل:

«ثم تبدأ بتأمل أول المراتب المعطية من الناحية اليسرى[٢٢]، وهي مرتبة الدرج، فتجدها خالية من العدد، فتعدل عنها إلى المعطية التالية لها وهي التي فيها <٥٣> ٤٣، فتطلب أعظم مقدار يمكن أن يلغي مال كعبه من هذه المرتبة وما يتبعها من المرافيع وذلك جـ <٢> مجـ <١> فتجد ذلك و<١>. فنكتبه في السطر الأعلى والأسفل، ونطالع جدول ٦ من الجداول الستين، ونضرب الأعلى في الأسفل، أعني و في و ونكتب المبلغ في الثالث، ونضرب الأعلى في الثالث ونزيد المبلغ على الرابع، ثم نلغي من الخامس ضرب الأعلى في الرابع فيحصل ما هذه صورته»[٢٣]، انظر الجدول رقم (٢ ـ ٢).

---

(٢٢) يعني ما يعطي أحد أرقام الجذر.

(٢٣) «القوامي،» ص ١٠٨ (ظهر الورقة) ـ ١٠٩ (وجه الورقة). عناوين عمود اليسار لا تمثل في المخطوطة فيما يخص هذا الجدول أو الجداول التالية.

جدول رقم (٢ ـ ٢)

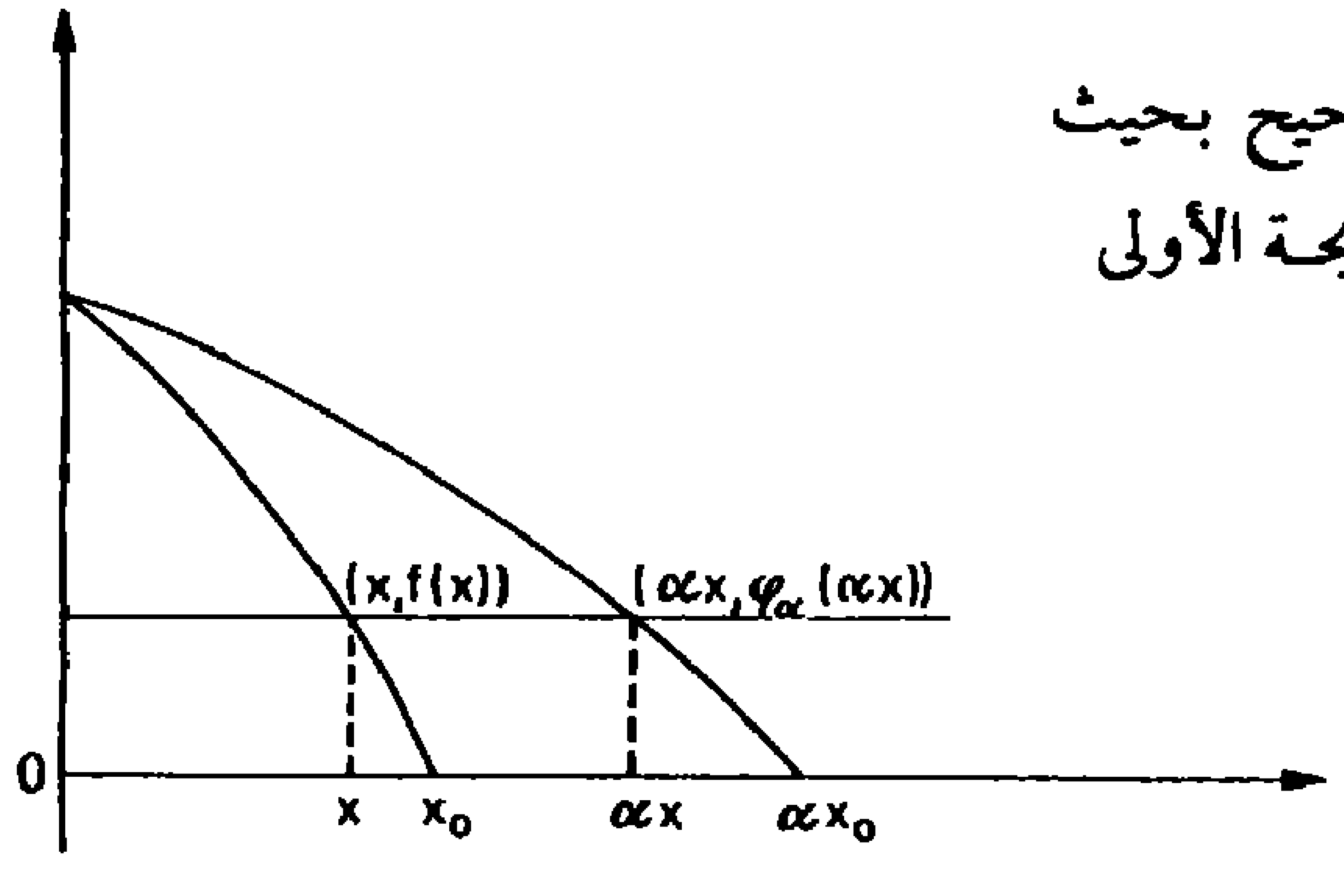
الأولى	0					6					0					0
الخامسة					24	7	3	43	36	48	8	16	52	30		
الرابعة					21	36										
الثالثة					3	36										
الثانية						36										
الأولى						6					0					

في الاستشهاد السابق، كما في الجدول رقم (٢ ـ ٢)، نلاحظ أن السموأل لا يبحث عن كسر لتحديد قيمة x_1 بل عن عدد صحيح بحيث يمكن طرح قوته الخامسة من الشريحة الأولى التي سبق له أن اعتبرها شريحة من الأعداد الصحيحة وليس ككسر. ويكتب كذلك في الجدول رقم (٢ ـ ٣) القوى المتتالية لِـ x_1 حتى المرتبة $n-1=4$. وهكذا نجد:

$$x_1^2=36,\ x_1^3=3{,}36,\ x_1^4=21{,}36.$$

ما فحوى هذه العملية بالضبط؟ المقصود بها في الحقيقة القاعدة الأولى للطريقة. إذ يلجأ الرياضي إلى تمديد[٢٤] كثيرات الحدود بواسطة عدد موجب معطى. فينتج بعد تمديد f بنسبة $\alpha=60$:

$$f_1(x)=x^5-60^5Q=x^5-Q_1=x^5-2{,}33{,}43;\ 3{,}43{,}36{,}48{,}8{,}16{,}52{,}30 = 0. \qquad (2)$$



إن البحث عن أكبر عدد صحيح بحيث يمكن طرح قوته الخامسة من الشريحة الأولى يعني ببساطة تحديد قيمة x_1 بحيث:

---

(٢٤) لتكن f الدالة الحقيقية المستمرة للمتغير الحقيقي x، و α عدد حقيقي موجب بالتدقيق. نسمّي f تمديداً بنسبة α التطبيق: φ_α بحيث: $\varphi_\alpha(x)=f(\alpha^{-1}x)$ لكلّ عدد x.

$$x_1^5 \leqq Q_1 < (x_1+1)^5 \Leftrightarrow x_1^5 - Q_1 \leqq 0 < (x_1+1)^5 - Q_1. \qquad (3)$$

نـلاحظ أنه إذا كـانت نقطة مـا $(x, f(x))$ تقع عـلى منحنى f فالنقـطة $(\alpha x, f(x))$ تقابلها على منحنى φ_α الناتج عن التآلف الذي نسبته α ومحوره $0x$.

(٢) يعطي السموأل التوصية الموجزة التالية: «ثم تكمـل حساب السـطور الأربعة كما هي الأعمال الأربعة عشر»[٢٥].

إن عبارة الكاتب نفسها توحي بشكل أو بآخر بوجـود خوارزميـة مستعملة عادة من قبل رياضيّي تلك الحقبة وأنها ليست من اختراعه هو، ولو أنه اكتفى بهذه الصيغة التلميحية لبدا برهاننا بحاجـة إلى عنصر جوهـري، لكن من حسن الحظ أن السموأل كان قد عـرضها بنفسـه في صفحات سـابقة وذلـك أثناء حلّه للمسـألة العكسيـة التي شغلته في الفصل التالي في ايجاد القوة الخامسة لعدد ما.

فبعد أن أجرى حساب القوى المتتـالية للعـدد x_1 أعطى جـدولاً[٢٦] لم نبدّل فيـه شيئاً يذكر، إذ اننا أدخلنا الترميز x_1^i واستعملنا الكتابة 1,48 مثـلاً بدلاً من $1\frac{1}{48}$ كـما كان يفعل.

جدول رقم (٢ - ٣)

	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة	اليمين
5e 4e 3e 2e 1er	$x_1=6$ $2x_1=12$ $3x_1=18$ $4x_1=24$ $5x_1=30$	$x_1^2=36$ $3x_1^2=1,48$ $6x_1^2=3,36$ $10x_1^2=6,0$	$x_1^3=3,36$ $4x_1^3=14,24$ $10x_1^3=36,0$	$x_1^4=21,36$ $5x_1^4=1,48,0$	$x_1^5=2,9,36$	6

قبل أي تعليق، نبدأ قراءة شرح السموأل، إذ إنه يكتب:

«ثم تزيد و̄ الأيمن على و̄ الأيسر، يصير الأيسر يب̄ ونضرب و̄ الأيمن في يب̄ الأيسر يكون ا يب̄ ، نـزيده عـلى الثاني$[x_1^2]$يصـير الثاني $[3x_1^2]$ ا مح̄ . ونضرب و̄ الأيمن في ا مح̄ الثـاني وتـزيد المبلغ على الثالث$[x_1^3]$، يصـير الثالث $[4x_1^3]$ يـد كد̄ . ونضرب و̄ الأيمن في الثـالث $[4x_1^3]$ ونزيد المبلغ على الرابع$[x_1^4]$، يصير الرابع$[5x_1^4]$ ا مح̄ . ونكمل حساب السطر الرابع. ثم تـزيد و̄

(٢٥) «القوامي،» ص ١٠٩ (وجه الورقة).

(٢٦) المصدر نفسه، ص ١٠٤ (ظهر الورقة).

الأيمن على [12] الأيسر يصير $\overline{\text{يح}}$ ونضرب $\overline{\text{و}}$ الأيمن في $\overline{\text{يح}}$ الأيسر يكون $\overline{\text{أمح}}$، نزيده على الثاني [$3x_1^2$]، يصير الثاني [$6x_1^2$] $\overline{\text{جـ لو}}$. ونضرب $\overline{\text{و}}$ الأيمن في $\overline{\text{جـ لو}}$ الذي في الثاني ونزيد المبلغ على الثالث، يصير الثالث لو $\overline{0}$ ونكمل حساب السطر الثالث. ونزيد $\overline{\text{و}}$ الأيمن على $\overline{\text{يح}}$ الأيسر يصير $\overline{\text{كـد}}$. ونضرب $\overline{\text{و}}$ الأيمن في $\overline{\text{كد}}$ الأيسر ونزيد المبلغ على $\overline{\text{جـ لو}}$ الثاني يصير الثاني و $\overline{0}$ ونكمل حساب السطر الثاني. ثم نزيد $\overline{\text{و}}$ الأيمن على $\overline{\text{كد}}$ الأيسر يصير الأيسر $\overline{\text{ل}}$».

ويهتم السموأل فيما بعد بعناصر القطر ويذكّر بأنها:

$$30=5\cdot 6,\quad 6,0=10\cdot 6^2,\quad 36,0=10\cdot 6^3,\quad 1,48,0=5\cdot 6^4$$

«كما بقضية أعداد قانون مال كعب التي هي $\overline{\text{٥ ي ي ٥}}$»[٢٧].

يُطرح سؤالان: ما هي هذه الخوارزمية؟ ولماذا يهتم السموأل بعناصر القطر؟ سنبيّن أن الأمر يتعلق بالقاعدة الثانية للطريقة.

لنبدأ بالإجابة عن السؤال الثاني. من الواضح أن الخوارزمية قد صيغت للحصول على عناصر القطر. هذه العناصر ليست سوى معاملات المعادلة الناتجة عن التحويل (٢).

فبعد أن مدّد الدالة وحصل بذلك على (٢) يُنقص الرياضي جذور (٢) بقيمة x_1. يفرض $x'=x-x_1$ الجذر المنقّص منه x_1. إذن: $x=x'+x_1$

وَ
$$f_1(x)=(x'+x_1)^5-Q_1=\sum_{p=1}^{5} C_5^p x'^p x_1^{5-p}-Q_2$$

حيث
$$Q_2=Q_1-x_1^5.$$

وتتحول المعادلة بواسطة هذا الإنقاص إلى:

$$f_2(x)=\sum_{p=1}^{5} C_5^p x^p x_1^{5-p}-Q_2=0 \qquad (4)$$

(حيث x هو الجذر المنقّص).

إذن:

$$f_2(x)=x^5+30x^4+6,0x^3+36,0x^2+1,48,0x-24,7;3,43,36,48,8,16,52,30.$$

---

(٢٧) المصدر نفسه، ص ١٠٤ ـ ١٠٥ (وجه كل من الورقتين).

بالنسبة إلى الخوارزمية، فهي ليست سوى خوارزمية هورنر مطبقة على الحالة الخاصة $x^n - Q = 0$. كي نبرهن ذلك يكفي كتابة خوارزمية هورنر للحالة السابقة ومقاربتها بتلك التي يعطيها السموأل فنجد:

$x_1=6$	1	0	0	0	0	$-Q_1$
	1	$x_1=6$	$x_1^2=36$	$x_1^3=3,36$	$x_1^4=21,36$	$-Q_2$
	1	$2x_1=12$	$3x_1^2=1,48$	$4x_1^3=14,24$	$5x_1^4=1,48,0$	
	1	$3x_1=18$	$6x_1^2=3,36$	$10x_1^3=36,0$		
	1	$4x_1=24$	$10x_1^2=6,0$			
	1	$5x_1=30$				
	1					

حيث:

$$Q_1 = 2,33,43;\ 3,43,36,48,8,16,52,30$$
$$Q_2 = 24,7;\ 3,43,36,48,8,16,52,30.$$

لو قارنّا إذن جدول هورنر بجدول السموأل لرأينا أنهما متشابهان مع فوارق طفيفة تعوز جدول السموأل وهي:

١ ـ العمود الأول

٢ ـ العدد Q_2 ـ

يبقى أن نشير إلى أن حساب هذا العدد يتم بحساب قيمته المطلقة في السطر المخصّص لاستخراج الجذر الخماسي للعدد. وتزول هذه الفوارق تقريباً إذا ما لاحظنا أن جوهر قاعدة تشكيل المثلث هو نفسه عند كليهما. فلو سمّينا $\alpha_{i,j}$ عناصر هذا المثلث حيث:

$$1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n-1,$$

لكان:

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{i-1,j} + x_1 \alpha_{i,j-1}.$$

(٣) بعد أن مدّد السموأل الدالة وحصل على الرقم الأول من الجذر وحوّل المعادلة بإنقاص جذورها بواسطة هذا الرقم، يعطي الجدول رقم (٢ ـ ٤) الذي يعبر بلغة أخرى عن المعادلة المحوّلة.

جدول رقم (٢ - ٤)[٢٨]

0					6					0					0	الأولى
				24	7	3	43	36	48	8	16	52	30			الخامسة
			1	48												الرابعة
				36												الثالثة
				6												الثانية
					30					0						الأولى

المرحلة الثانية

(١) يوصي السموأل بعد ذلك «بنقل السطور الأربعة كي نحصل على هذه الصورة» (الجدول رقم (٢ ـ ٥))[٢٩].

جدول رقم (٢ - ٥)

					6					0					0	الأولى
				24	7	3	43	36	48	8	16	52	30			الخامسة
				1	48											الرابعة
						36										الثالثة
							6									الثانية
									30	0						الأولى

إذا تفحصنا بدقة هذا الجدول نلاحظ أن السموأل يحضّر فيه تحديد الرقم الثاني للجذر x_2، مستعيداً العمليات السابقة، وهكذا يردّ البحث عن x_2 إلى بحث عن عدد صحيح لا عن كسر، فيمدد الدالة f_2 بواسطة النسبة $\beta=60$ ويحصل إثر ذلك على:

$$f_3(x)=\sum_{p=1}^{5} C_5^p 60^{5-p} x_1^{5-p} x^p - Q_3 = 0 \qquad (5)$$

حيث: $Q_3=60^5 Q_2$

(٢٨) المصدر نفسه، ص ١٠٩ (وجه الورقة).
(٢٩) المصدر نفسه، ص ١٠٩ (ظهر الورقة).

إذن : $f_3(x) = x^5 + 30,0x^4 + 6,0,0x^3 + 36,0,0,0x^2 + 1,48,0,0,0,0x$
$- 24,7,3,43,36,48,8;\ 16,52,30.$

هذه العبارة نفسها نجدها في الجدول رقم (٢ - ٥).

(٢) نسعى إلى تحديد x_2 بحيث:

$$f_3(x_2) \leqq 0 < f_3(x_2+1) \Leftrightarrow f_3(x_2) + Q_3 \leqq Q_3 < f_3(x_2+1) + Q_3. \qquad (6)$$

ليكن $x_2 = 12$ الرقم الثاني من الجذر، نسعى لإنقاص x_2 من جذور $f_3(x)$. نفرض أنّ $x'' = x - x_2$ هو الجذر المنقّص بمقدار x_2. إذن $x = x'' + x_2$

وَ:

$$f_3(x) = \sum_{p=1}^{5} C_5^p 60^{5-p} x_1^{5-p} (x'' + x_2)^p - Q_3 = 0. \qquad (7)$$

وتصبح المعادلة المحوّلة بهذا الانقاص بواسطة خوارزمية هورنر:

$$f_4(x) = \sum_{p=0}^{4} a_p x^{5-p} - Q_4 = 0$$

حيث:

$a_0 = 1$

$a_1 = 31,0,$ $\qquad a_2 = 6,24,24,0,$

$a_3 = 39,43,16,48,0,$ $\qquad a_4 = 2,3,8,10,4,48,0,$

$Q_4 = 1,1,44,1,39,40,56;\ 16,52,30.$

أنجز السموأل هذا الحساب بواسطة جدولين، الأول (الجدول رقم (٢ - ٦)) ويهدف إلى حساب:

$$Q_4 = Q_3 - [\{[(5x_1 60 + x_2)x_2 + 10x_1^2 60^2]x_2 + 10x_1^3 60^3\}x_2 + 5x_1^4 60^4]x_2.$$

جدول رقم (٢ - ٦)

0					6					12					0	الأولى
				1	1	44	1	39	40	56	16	52	30			الخامسة
				1	55	26	38	29	45	36						الرابعة
						37	13	12	28	48						الثالثة
							6	6	2	24						الثانية
									30	12						الأولى

والثاني (الجدول رقم (٢ ـ ٧)) مخصص لحساب باقي معاملات المعادلة المحوّلة بواسطة خوارزمية هورنر مع التحفظات التي قدمت بخصوص الجدول رقم (٢ ـ ٣). نستطيع إذن أن نكتب كما في السابق:

جدول رقم (٢ ـ ٧)

1	$5x_1 60=30,0$	$10x_1^2 60^2=6,0,0,0$	$10x_1^3 60^3=36,0,0,0,0$	$5x_1^4 60^4=1,48,0,0,0,0,0$	$-Q_3$
1	30,12	6,6,2,24	37,13,12,28,48	1,55,26,38,29,45,36	$-Q_4$
1	30,24	6,12,7,12	38,27,37,55,12	2,3,8,10,4,48,0	
1	30,36	6,18,14,24	39,43,16,48,0		
1	30,48	6,24,24,0			
1	31,0				

$Q_3=24,7,3,43,36,48,8;\ 16,52,30$

$Q_4=1,1,44,1,39,40,56;\ 16,52,30$

(٣) بعد أن مدّد الدالّة، وحصل على الرقم الثاني لجذر المعادلة المحوّلة وذلك بإنقاص جذورها بواسطة هذا الرقم. يقدم الجدول رقم (٢ ـ ٨)[٣٠] الذي يعبر بلغة أخرى عن المعادلة المحوّلة.

جدول رقم (٢ ـ ٨)

الأولى	0					6					12					0
الخامسة					1	1	44	1	39	40	56	16	52	30		
الرابعة					2	3	8	10	4	48						
الثالثة							39	43	16	48						
الثانية								6	24	24						
الأولى										31	0					0

علينا أن نلاحظ أيضاً أن البحث عن x_2 كان من الممكن أن يكون أصعب بكثير لو اكتفي كما في حالة x_1 بفرض شرط واحد هو أن يكون x_2 هو العدد الصحيح الأكبر ذو القوة الخامسة الموجودة في Q_3. لا يعطي السموأل أي توضيح بخصوص هذه النقطة ويكتفي بالتنويه أن هذا الرقم يحقق مفكوك الحدانيّة بأسّ 5.

(٣٠) المصدر نفسه، ص ١٠٩ (ظهر الورقة).

ويكتب: «ثم نطلب ما تعمل به شروط مال كعب فنجده اثني عشر».

لو أردنا أن نـوضح قليـلاً هذه العبـارة لاستطعنـا أن نؤكد أن عـلى x_2 أن يحقق (6)، وهو شرط مكافىء لِـ (3). ولكي نكون أكثر دقـة أيضاً، نكتب $f_3(y)=0$ عـلى الصورة التالية:

$$[\{[(5x_1 60+y)y+10x_1^2 60^2]y+10x_1^3 60^3\}y+5x_1^4 60^4]y=Q_3.$$

إذن بقسمة Q_3 على $5x_1^4, 60^4$ نتوصل إلى تقريب x_2 بواسـطة قيمة y. صحيـح أنه في هذه الحالة قد يكون حاصل القيمة الناتجة أكبر من قيمة x_2 ولكن بالإمكان بعد الآن إجراء المقاربة شيئاً فشيئاً لتحديد قيمة x_2.

يمكن لـلإجـراء الأخـير أن يحـظى بتفسـيرين اثنـين: **التفسـير الأول** ينشـأ عن ملاحظة تجريبية إذا صـح القول، علماً أن $5x_1^4\ 60^4 \leqq Q_3$. نجـري عمليات قسمـة متتالية وعن طريق التجريب كيما نحدد x_2. **التفسـير الثاني** يـدخل مبـدأ المشتق وذلك عندما يهمل معامـلات y^k حيث $k>1$. ليس من مبرر لـوجود مبـدأ كهذا في العمـل المعروف للسموأل. وسوف نرى من زاوية ما كيف طرحت المسألة فيما بعد.

المرحلة الثالثة

ما أن يتم الحساب السـابق حتى يعاود الكرّة لتحديـد الرقم الثـالث x_3 للجذر. ولسوء الحظ فالمخطوطة متلوفـة في هذا المكـان[٣١] مما يشكـل قطعـاً فعلياً للنص. لكي نعيـد تشكيل هـذا المقطع نستعيـد أمثلة أخـرى وسّعهـا السمـوأل ونلجـأ إلى دراستـه للمسألة العكسية. إنها مهمة سهلة إذ إنها تتعلق بعمليـات مشابهـة تماماً. وبالـطريقة نفسها يبحث السموأل عن x_3 كعددٍ صحيح وليس ككسر. وهكذا بعد تمديد f_4 بنسبة $y=60$ نحصل على:

$$f_5(x)=x^5+31,0,0x^4+6,24,24,0,0x^3+39,43,16,48,0,0,0,0x^2 \\ +2,3,8,10,4,48,0,0,0,0,0,0x-1,1,44,1,39,40,56,16,52,30,0,0. \quad (8)$$

لتكن الآن $x_3=30$، إذن:

$$f_5(x_3)\leqq 0<f_5(x_3+1) \Leftrightarrow f_5(x_3)+Q_5\leqq Q_5<f_5(x_3+1)+Q_5.$$

---

(٣١) المصـدر نفسه، ص ١٠٩ (ظهـر الورقـة). هنا يـظهـر بجـلاء وجـود انقـطاع جسيم في المخطوطة. لقد استطعنا أن نثبت أن نص وجه الورقة ١١٠ هو تتمة لوجه الورقة ٦٩.

ليكن $x'''=x-x_3$ هو الجذر المنقّص الذي يعادل الصفر في الحالة المطروحة هنا. نحصل على المعادلة المحوَّلة:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5+b_1x^4+b_2x^3+b_3x^2+b_4x-Q_5=g(x)-Q_5=0,\\ g(x) &= [\{[(a_1 60+x)x+a_2 60^2]x+a_3 60^3\}x+a_4 60^4]x, \end{aligned} \tag{9}$$

وهي عبارة، أعطاها السموأل في جدول حيث سطوره المتتابعة هي:

$$[(a_1 60+x)x+a_2 60^2]=6,24,39,30,15,0,$$
$$\{[(a_1 60+x)x+a_2 60^2]x+a_3 60^3\}=39,46,29,7,45,7,30,0,$$
$$\{[(a_1 60+x)x+a_2 60^2]x+a_3 60^3\}x+a_4 60^4=2,3,28,3,19,21,52,33,45,0,0,$$

وبواسطة خوارزمية هورنر(٣٢) نجد أخيراً الجذر المطلوب:

$$x_0=;x_1x_2x_3=;6,12,30.$$

وهكذا نجد أن الفارق الوحيد بين طريقة الكاشي وطريقة رياضيّي القرنين الحادي عشر والثاني عشر ليس في ترتيب الافكار ولا في رمزية الجداول، إنه ينحصر فقط في طريقة العرض. ففي كلا العرضين يمارس الرياضيون الأفكار نفسها التي هي في أساس طريقة روفيني ـ هورنر بالنسبة الى الحالة الخاصة $f(x)=x^n-Q=0.$ على الأقل. لحل هذه المعادلة العددية، يُجزأ العدد Q لشرائح كي يُحدّد مجال الجذر الموجب، تُمدّد أو تُقلّص الدالة f حسب الحالة وبالتالي يتم إنقاص جذور المعادلة المحوّلة التي يُحصل على معاملاتها بواسطة خوارزمية هورنر. ونكرر الطريقة حتى استنفاد أرقام الجذر. إن أفكاراً كهذه كانت مدرَكة ومطبقة بطريقة جبرية بحتة.

وفيما يتعلق بالجداول، فقد كان دورها الرمزي لا يرقى إليه الشك عند الكاشي كما عند سابقيه، فقد جعلوا ممكناً، رغم ثقل الترميز، الكتابة الخاصة بكثيرات الحدود، كذلك الأمر مع العمليات المجراة عليها. وسواء بالنسبة إلى الكاشي أو الى رياضيّي مدرسة الكرجي، فقد استخدم الجميع الترميز نفسه مع فارق أن الكاشي جمع في جدول واحد وبطريقة لبقة وأقل ازعاجاً ما قدّمه سابقوه في جداول عديدة متتالية.

بقي أن نعرف ما إذا كان الكاشي على اطّلاع بالأعمال الحسابية للجبريّين من

(٣٢) المصدر نفسه، ص ١٠٩ (وجه الورقة).

مدرسة الكرجي. هو لا يذكر، دون شك، في مؤلفه مفتاح الحساب لا اسم الكرجي ولا اسم السموأل، لكن هذه الحجة ليست حاسمة: إذ في عصره كما الآن، لم يكن العرف يتطلب ذكر أسماء السابقين في الأبحاث الرياضية. النتائج التي توصلنا إليها في مكان آخر، كما في هذه الدراسة سمحت لنا بإثبات أن أكثر التقارير أهمية في مفتاح الحساب والتي أثارت إعجاب المؤرخين كانت حاضرة في أعمال الكرجي ولاحقيه. إن دراسة في فقه اللغة تؤكد ما أثبته تاريخ الرياضيات. ويذهب بنا الإعتقاد إلى أبعد من ذلك، لكن لن نعلن عنه إلاّ بعد تقديم هذا الظن: ألم يكن الكاشي على معرفة مباشرة بالبحث (١١٧٢) للسموأل؟

إذا ما تابعنا برهنتنا قليلاً حول هذه النقطة المحددة من طريقة روفيني - هورنر، بإمكاننا أيضاً إثبات نسب مباشر تقريباً بين الكاشي وسابقيه.

عندما عرضنا هنا بالذات[٣٣] للمرة الأولى المؤلف الذي كان لا يزال مجهولاً لشرف الدين الطوسي، لفتنا انتباه المؤرخين إلى أحد أهمّ المساهمات في الرياضيات العربية[٣٤].

ولقد فصّلنا عرض وشرح طريقة الطوسي بالنسبة إلى حل المعادلات العددية والمعادلات المصاحبة أو الخاصة بكثيرات الحدود. إن الجداول المحذوفة من قِبل ناسخ بحث الطوسي التي أعدنا تشكيلها بصعوبة، كانت بليغة وتسمح حتى لنظرة سطحية بإيجاد تماثل بينها وبين شكل طريقة روفيني - هورنر ليس في الحالة الخاصة لاستخراج الجذر الميمي لعدد ما فقط، بل في الحالة العامة (لحل المعادلات الجبرية ذات المعاملات العددية). وبسبب فقدان البرهان التاريخي الأكيد، امتنعنا عن إعطاء هذا الإسم لطريقة الطوسي معتبرين أن ليس بالإمكان اجتياز هذه الخطوة دون حذر فتقدمنا آنذاك بالفرضية الوحيدة التي بدت لنا مبررة: إن طريقة الطوسي التي ليست بالضرورة من ابتكاره «هي بمعنى ما أكثر <حداثة> من طريقة فيت»[٣٥].

ليس لدينا في الواقع الوسائل اللازمة لإثبات أن الأمر يتعلق بطريقة روفيني -

---

(٣٣) Rushdi Rashed, «Résolution des équations numériques et algèbre: Al-Tūsi - Viète,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol.12, no.3 (1974), p.254 sq.

(٣٤) المصدر نفسه، ص ٢٤٨ (الملاحظة). انظر أيضاً: الكاشي، مفتاح الحساب، ص ١٩٨ - ١٩٩.

(٣٥) Rashed, Ibid., p.272.

هـورنر: لم يكن لـدينا أي دليـل عن استخـراج الجـذر الميمي وبـالتـالي كـانت تعـوز بالضرورة أي مُؤلِّفٍ استعمل الكتابة العشرية تحديداً نظريـة حقيقية للكسـور العشرية كما سنرى في تطبيق هذه الطريقة. لكن الـوضع يختلف الآن كليـاً إذ بفضل اكتشـاف طريقة روفيني - هـورنر عنـد رياضيّي القـرن الحادي عشر والثـاني عشر والمطبقـة على الحـالة الخـاصة في استخـراج الجذر الميمي، وأيضـاً بفضل اكتشـاف نظريـة الكسـور العشرية عند هؤلاء الرياضيـين أنفسهم. نحن الآن في موقـع يمكننا من طـرح مسألـة تعميم هذه الطريقة بعبارات تاريخية لا بعبـارات رياضيـة فقط وبالتـالي، درس ما إذا كانت شرعية إضافة اسم روفيني - هورنر إلى طريقة الـطوسي، لكن تعميم طريقـة ما لا يعني ببسـاطة مـدّ مجموعـة من الطرق. إن عمـل الطوسي في مجمله ليس في قـائمة الجبريين الحسـابيّين من مـدرسة الكـرجي التي بالإمكـان من الآن فصاعـداً ربط اسم الكاشي بها، بـل يمثل مسـاهمة مبكـرة جداً وأسـاسية لجـبر آخر كـان يهدف إلى درس المنحنيات بواسطة المعادلات مؤسّساً بذلك بدايات الهندسة الجبرية.

إن أهمية تصور الطوسي لمسألتنا باتت منذ ذلك الوقت لا تقبل الجـدل. صحيح أن تعميم الـطريقة يتـطلب من الريـاضي إدراكاً أكيـداً للظاهرة التي يعـالجها وتـبريـراً لمختلف العمليات المتضمنة في هذه الطريقة: عليه إذن أن يبرّر بصورة خاصة التمديد ويعالج صعوبة سبق أن صادفها في عرضيّ السموأل والكاشي، وتفاقمت بالإنتقال إلى معادلات كثيرات الحدود: تحديد الأرقام المختلفة للجذر ابتداء من الثاني. وبسكـوتها عن الطريقة المتبعة لإيجاد هذه الأرقام، كـان بإمكـان السموأل والكـاشي تفويض أمـر ذلك إلى تجريب مـوفّق. وللتوصـل هذه المرة إلى النتيجة في وقت معقـول، كان يجب اتباع طرق أقل تجريبية. ستتمسك بإيراد نموذج واحد للطوسي(٣٦) يوضح ما أكدناه على التو. ونبينّ أن طريقة روفيني - هـورنر كـانت قد وجـدت تحت شكل عـام نسبياً قبـل الكاشي. ليكن:

$$f(x)=g(x)-N=0$$

حيث:

$$g(x)=x^3+a_1x^2+a_2x,$$

وَ

$$N=n_0 10^m+n_1 10^{m-1}+\cdots+n_m;$$

---

(٣٦) المصدر نفسه، ص ٢٥٩. انظر أيضاً: بحثه: *Des Equations.*
(مخطوطة): «India office 80th 767 (I.O. 461),» 3° folio, 50 sq.
(سوف تظهر طبعتنا قريباً).

نحدد أولاً المواقع التامّة لِـ N أي المواقع ذات الشكل np حيث $n=3$ وَ $p\in\mathbb{Z}$. المقصود إذن تحديد الشرائح للارقام الثلاثة التي تشكّل N . ليكن q_0 العدد الصحيح الأكبر من شكل np حيث $0\leqq q_0\leqq m$. وليكن p_0 بحيث $q_0=np_0$.
ليكن k_1 و k_2 الترتيبين العشريين على التوالي لكل من a_1 و a_2 وليكن $\left[\frac{k_2}{2}\right]$ الجزء الصحيح من $\frac{k_2}{2}$.

يميّز الطوسي بين حالات ثلاث:

(1) $p_0>k_1$ وَ $p_0>\left[\frac{k_2}{2}\right],$

(2) $p_0<\left[\frac{k_2}{2}\right]$ وَ $k_1<\left[\frac{k_2}{2}\right],$

(3) $p_0<k_1$ وَ $\left[\frac{k_2}{2}\right]<k_1.$

سنحلّل الحالة الأولى:

مثال: $f(x)=g(x)-N=x^3+12x^2+102x-34345395=0.$

ليكن x_0 الجذر الموجب المفترض، نعرف أنّ: $x_0\in[10^2,10^3[$

إذن: $x_0=\alpha_1 10^2+\alpha_2 10+\alpha_3.$

(١) نبدأ أولاً بتحديد المواقع التامّة، من اليمين إلى اليسار: 5,5,4.

(٢) ونقلّص[٣٧] f بالنسبة $\beta_1=10^{-2}$ وهذا يكافىء الإفتراض: $x=10^2x'$
نحصل على:

$$f(10^2x')=(10^2x')^3+12(10^2x')^2+102(10^2x')-N=0$$

وهذا يكافىء بدوره:

$$f_1(x')=x'^3+0{,}12x'^2+0{,}0102x'-N_1=g_1(x')-N_1=0$$

حيث: $N_1=10^{-6}N=34{,}345395.$

يكون عندها x'_1 أكبر عدد صحيح حيث مكعبه محتوى في N_1 : $x'_1=\alpha_1=3$

---

(٣٧) التمديد بالنسبة α : $0<\alpha<1$.

فإذا كان α_1 الرقم الأول للجذر فإن:

$$x_1 = 10^2 x'_1 = 10^2 \alpha_1 = 300.$$

(٣) يتم إنقاص جذور $f_1(x')$ بقيمة $x'_1 = 3$ بواسطة شكل قديم لخوارزمية هورنر، فنحصل عندها على معاملات المعادلة المحوَّلة:

$$f_2(y) = f_1(y + x'_1) \quad \text{حيث:} \quad y = x' - x'_1$$

و $$f_2(y) = g_2(y) - N_2,$$

إذن:

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 - g_1(x'_1) f_2(y) \\ &= y^3 + (3x'_1 + 0{,}12)\,y^2 + (3x'^2_1 + 2 \times 0{,}12x'_1 + 0{,}0102)\,y \\ &\quad - [34{,}345395 - (x'^3_1 + 0{,}12x'^2_1 + 0{,}0102x'_1)] \\ &= y^3 + 9{,}12y^2 + 27{,}7302y - 6{,}234795. \end{aligned}$$

نلاحظ أن الطوسي، في حساب معاملات المعادلة المحوّلة، لا يجري سوى حساب المعامل الخاص y و حساب N_2.

(٤) يمدّد f_2 بالنسبة $\beta_2 = 10$ ، وهذا يكافىء الإفتراض $y = 10^{-1} y'$.

فيحصل على: $f_2(10^{-1} y') = 0$

وهذا يكافىء أيضاً:

$$f_3(y') = y'^3 + 91{,}2y'^2 + 2773{,}02y' - 6234{,}795 = g_3(y') - N_3 = 0.$$

نلاحظ أن الطوسي هيّأ، منذ نهاية المرحلة السابقة، البحث عن الرقم الثاني للجذر أو بالأحرى α_2. لكن إذا كان شكل الجذر الحقيقي المطلوب في المرحلة الأولى هو: $\alpha_1 10^2 + \alpha_2 10 + c_3$، فبعد التقليص واستخراج الرقم الأول والإنقاص، يصبح الجذر المنقّص المطلوب جذراً للمعادلة: $f_2(y) = 0$ وله الشكل: $\alpha_2 10^{-1} + \alpha_3 10^{-2}$ وهذا ما يبرر التمديد بنسبة $\beta_2 = 10$ لإيجاد α_2.

في هذه اللحظة بالذات ودونما شرح إضافي يجد $\alpha_2 = 2$. وإذ لم يبين لنا صراحة الطريقة لتحديد α_2 فالمحتوى يوحي مع ذلك جواباً وافر الإحتمال. فالطوسي يربط بطريقة مباشرة وفورية تحديد هذا الرقم ببعض العمليات، ويتابع الإجراء نفسه حتى نهاية «بحثه». وفضلاً عن ذلك، كل شيء يوحي بالظن أن الأمر يتعلق بطريقة معروفة سابقاً ومستعملة.

نلاحظ أولاً أنه لتحديد الرقم الثاني للجذر، كما الأرقام التالية، لن يبحث الطوسي بعد الآن عن العدد الصحيح الأكبر الذي مكعبه محتوى في N_3. فالطوسي يدرك جيداً أن هذه الطريقة ليست صالحة، لأن y' في هذه الحالة هي التي تحدد مرتبة الجذر العشرية. وبالمقابل فإن تحديد الرقم الثاني مرتبط مباشرة بحساب N_3 وحساب:

$$(3x_1'^2 + 2 \times 0{,}12x_1' + 0{,}0102)\, 10^2.$$

في الواقع يميّز الطوسي هنا، كما في حساب المعاملات بواسطة مثلث هورنر كلاً من N_2 ومعامل y ثم N_3 ومعامل y'. وفي هذه المرحلة من الحساب بالذات يعطي قيمة α_2. كل شيء يدل على أن الطوسي يحدد قيمة تقريبية لـ α_2 تحت الشكل:

$$\frac{N_3}{10^2 g_1'(x_1')}$$

وهذا يكافىء:

$$\alpha_2 10^{-1} \simeq \frac{N_2}{g_1'(x_1')}$$

ويعادل أيضاً أن نهمل في $g_3(y')$ الحدود ذات المرتبة الأعلى من واحد. إن الطريقة المتّبعة لتحديد الرقم الثالث للجذر تؤكد هذا التفسير.

ورغم أن الطوسي، يستعمل في بحثه طريقة من «الإشتقاق» في البحث عن النهايات العظمى، فـ «المشتق» ليس له دور هنا سوى دور عبارة جبرية تقابل معامل y' وبالتالي تقابل بالضرورة لأكبر معامل في المعادلة المحوّلة. إذا كان لـ «المشتق» أن يسمح هنا بالحصول على قيمة تقريبية للرقم الثاني فذلك بسبب خصائصه الجبرية وليس إطلاقاً بفضل معناه التحليلي. على كل يوجد هنا طريقة لإجراء الإشتقاق على العبارات الصورية. وفيما تبقى نجد الحالة نفسها مع «القاسم» الشهير المتعلق بالطريقة المسماة طريقة ڤيت(٣٨).

(٥) يتم إنقاص جذور $f_3(y')$ بقيمة $\alpha_2 = x_2' = 2$ ونحصل بواسطة خوارزمية هورنر على:

$$f_4(z) = f_3(z + x_2') = g_4(z) - N_4 = 0$$

حيث:

$$N_4 = N_3 - g_3(x_2') \quad و \quad z = y' - x_2'$$

---

(٣٨) Rashed, Ibid, p. 265 sq.

إذن : $f_4(z) = z^3 + 97{,}2z^2 + 3149{,}82z - 315{,}955 = 0.$

(٦) نمدّد f_4 بنسبة $\beta_{3_1} = 10$.

(٧) ونعاود الكرّة للرقم الثالث من الجذر، الذي نجد أنه يعادل واحداً.

في الحالة حيث:

$$k_1 < \left[\frac{k_2}{2}\right] \text{ و } p_0 < \left[\frac{k_2}{2}\right]$$

$$x^3 + 6x^2 + 3000000x = 996694407$$

أو في الحالة حيث: $\left[\frac{k_2}{2}\right] < k_1$ و $p_0 < k_1$

مثل : $x^3 + 30000x^2 + 20x = 3124315791$

يقسم الطوسي على التوالي بمعامل x وبمعامل x^2. وهذا يفسر البحث عن المكعب الأكبر المحتوى في N.

علينا أن نسجل بعد ذلك أن الطوسي يفسر عمليات التمديد والتقليص والقسمة في العبارات التي استعملها ڤيت فيها بعد للنموذج نفسه من العملية. المقصود بالأساس المقارنة بين المراتب العشرية المختلفة التي تشكل $g(x)$ حسب الحالات المختلفة من جهة، والشرائح المختلفة لـ N من جهة أخرى. إن التماثل واضح بشكل سافر في المفردات المستعملة والعمليات المجراة عند كل من الطوسي وڤيت.

لنلاحظ أخيراً أن الطوسي لا يقصد فقط تحديد أرقام الجذر، بل يريد أن يعطي لنفسه أيضاً الوسائل التي تمكنه في كل مرحلة من مراقبة الرقم موضوع البحث. لذلك عليه في كل مرحلة من العملية أن يقارن المرتبة العشرية للجذر المطلوب والمراتب العشرية لمعاملات المعادلة.

من هنا هذا التشوش الذي نستطيع ملاحظته في كتابة الجداول(٣٩). وفي الواقع أن كل حدّ يمكن أن يُقرأ مرتين بحسب الموقع المختار، إذ يقرأ من موقع الوحدات مثلاً مرّة قبل التمديد أو التقليص ومرة ثانية بعد إجراء هذه العمليات.

من الثابت إذن أنه إذا كانت مدرسة الكرجي قد عرفت طريقة روفيني ـ هورنر

---

(٣٩) المصدر نفسه.

بالنسبة إلى الحالة الخاصة التي درسناها، فقد عُمّمت هذه الطريقة في بداية القرن الثالث عشر أي قبل الكاشي بقرنين بواسطة رياضي يعرفها بطريقة غير مباشرة على الأقل. ولنلاحظ أخيراً أنه على الرغم من أن الطوسي لم يعالج سوى المعادلات من الدرجة الثالثة ـ موضوع بحثه ـ فتطبيق طريقته في حال معادلات كثيرات الحدود من أية درجة كانت لا يتطلب كما سبق وبيّنا[40]، أي مفهوم مجهول من قبل المؤلف. يجب عدم المغالاة بالطبع في اللغة الوظيفية التي استخدمناها في عرض طريقة الطوسي وتلك المستخدمة في عرض طريقتي كل من السموأل والكاشي. فمفهوم الدالّة كدالّة لا يتدخل أبداً، إذ لدينا ايجاز مفهومي بسيط يجنّبنا الاحتفاظ بالعبارات الجبرية. إن $f(x)$ في كتابتنا لا تمثل بالنتيجة سوى كثيرة حدود.

ب ـ تقريب الجذر الأصمّ لعدد صحيح: إذا تركنا تاريخ الطريقة المسمّاة طريقة روفيني ـ هورنر كي نعرض لمسألة تقريب الجذر الأصم لعدد صحيح، فسوف نواجه بالوضع نفسه وبالأسماء نفسها وبالتعليقات نفسها. وهكذا مثلاً فإن الصيغة العامة المنسوبة للكاشي ينسبها لوكي إلى أصل صيني يرجع إلى القرن الثالث عشر. هذه الترهة كانت قد تزعزعت بعض الشيء باكتشاف الصيغة نفسها عند رياضي سابق للكاشي بقرن ونصف تقريباً هو نصير الدين الطوسي. سوف نبين هذه المرة أيضاً أن القاعدة وصياغتها ترقيان في الحقيقة إلى مدرسة الكرجي، أي إلى القرنين الحادي عشر والثاني عشر.

بعد أن يعرض طريقة روفيني ـ هورنر، يكرس السموأل فصلاً كاملاً لمسائل تقريب الجذر الميمي الموجب لعدد صحيح أو بالأحرى لجزئه الكسري: «إذا استخرجت ضلع مربع أو مكعب أو غير ذلك من المراتب وعلمت صحاح الضلع، أعني ضلع أقرب مكعب أو مال أو غير ذلك من المضلعات <أو> [من] المطلوب ضلعه وبقيت منه بقية دالّة على صمم ضلعه وأردت أن تستخرج من تلك البقية الكسور البالغة لتلك الصحاح أخذت أعداد القانون لذلك المضلع وضربت كل واحد منها في العدد الذي يرسمه وجمعت المبلغ وزدت جملته واحداً أبداً فما اجتمع فهو مخرج الأجزاء الباقية»[41].

بإمكاننا أن نؤكد بكل دقة أن السموأل يذكر هنا قاعدة عامة تسمح بالتقريب بواسطة الكسور للجزء غير الصحيح من الجذر الأصمّ لعددٍ صحيح. لنُعد باختصار

---

(٤٠) المصدر نفسه، ص ٢٦٣، وما يليها.

(٤١) «القوامى،» ص ١١٠ (ظهر الورقة).

رسم المسيرة التي يقترحها السموأل لهذه القاعدة: المقصود إذن حلّ المعادلة العددية $x^n=N$ حيث $N\in\mathbb{N}$. إنه يبحث أولاً عن أكبر عدد صحيح x_0 بحيث ان $x_0^n \leqq N$ ، وهنا توجد حالتان:

(١) $x_0^n=N \Leftrightarrow x_0$ هو بالضبط الجذر المطلوب وقد رأينا أن السموأل يمتلك طريقة أكيدة للحصول على هذه النتيجة عندما يكون الحل ممكناً.

(٢) $x_0^n<N \Leftrightarrow N^{\frac{1}{n}}$ هو أصمّ. وفي هذه الحالة يبين كتقريب أول:

$$x' = x_0 + \frac{N - x_0^n}{\left[\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^{n-k}\right] + 1} \tag{1}$$

أي:

$$x' = x_0 + \frac{N - x_0^n}{(x_0+1)^n - x_0^n}. \tag{2}$$

وفي حالة الجذر التكعيبي نحصل على ما سمّاه الرياضيّون العرب «التقريب الإتفاقي»[٤٢].

ويوضح السموأل بعد ذلك بأمثلة عديدة تطبيق هذه القاعدة على حالات مختلفة: جذور مربّعة، جذور مكعبة، جذور من مراتب أكبر[٤٣] فيحل مثلاً $x^5 = 250$ ويكتب:

«وأيضاً استخرجنا ضلع مكعب <هو> ١٠ فخرج ٢ وهو صحاح الضلع وبقي ٢ ووجدنا أعداد سطر قانون الكعب ٣ ٣ فضربنا أولها في صحاح الضلع الثاني في مربع صحاح الضلع وزدنا على المبلغ واحداً [فصار] <ضلع> ١٩ وهو مخرج الأجزاء الباقية، نسبنا منه البقية التي بقيت وهي ٢ فصار الضلع الحاصل ٢ و ٢ من ١٩.

وأيضاً استخرجنا ضلع مال مال هو ٤٠ فخرج ٢ وبقي ٢٤ ووجدنا أعداد قانون مال مال ٤ ٦ ٤ فضربنا الأول في صحاح الضلع وذلك اثنان والثاني في مربعه أعني مربع ضلع الاثنين والثالث في مكعبه أعني مكعب الاثنين الذي هو صحاح الضلع وزدنا على المبلغ واحداً فبلغ ٦٥ وهو مخرج الأجزاء الباقية، فصار الضلع اثنين و ٢٤ جزءاً من ٦٥. وأيضاً استخرجنا ضلع مال كعب مبلغه / ٢٥٠ فخرج ٣ وبقي ٧ ووجدنا أعداد قانون مال كعب ٥ ١٠ ١٠ ٥ فضربنا الثلاثة أعني صحاح

(٤٢) Rashed, Ibid., pp. 250-251 (Notes).

(٤٣) «القوامي،» ص ١١١ (وجه الورقة).

الضلع في الأول ومربع الثلاثة في الثاني ومكعب الثلاثة في الثالث ومال مال الثلاثة في الرابع وزدنا على المبلغ واحداً فاجتمع ٧٨١ وهو مخرج الأجزاء الباقية فصار الضلع ثلاثة آحاد وسبعة أجزاء من ٧٨١ وهو الضلع المطلوب. وعلى هذا القياس»[٤٤].

هذا التقريب الأدنى هو من الطبيعة نفسها للتقريب الذي يعرضه الرياضيون العرب السابقون للسموأل لكنه أكثر عمومية. إذ إن الحسابيين السابقين لمدرسة الكرجي (كالنسوي مثلاً) يحصرون تطبيق هذه القاعدة للقوى $\leqq 3$، أما هنا فالقاعدة تطول أية قوة كما سوف نجد لاحقاً عند الكاشي. لا يوضح لنا السموأل إطلاقاً الطريق الذي اتّبعه للتوصل إلى الصيغة السابقة. لكن لو أخذنا بعين الإعتبار المعرفة الرياضية الخاصة بتلك الحقبة فبإمكاننا التقدم بفرضيتين: لا يعدو الأمر سوى تطبيق بسيط لصيغة ذات الحدّين أو وهذا هو الإفتراض الثاني: قد نكون امام تعميم «لقاعدة حساب الخطأين» (Regula falsi).

ففي الحالة الأولى: نفترض أن: $x_0 < N^{\frac{1}{n}} < x_0 + 1$

وأن $N^{\frac{1}{n}} = x_0 + r;$ ؛ فيكون لدينا: $N = (x_0 + r)^n \Rightarrow N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} r^k$

إذن:
$$r = \frac{N - x_0^n}{n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} r + \cdots + r^{n-1}}$$

من هنا فإن r تكافىء الجزء الكسري من (2) وبالتالي من (1)، أما في الحالة الثانية فإذا فرضنا:

$$y_1 = x_0. \qquad x_1 = x_0^n \qquad y = x^{\frac{1}{n}},$$

وكذلك $x_2 = (x_0 + 1)^n$ و $y_2 = x_0 + 1.$

وفرضنا أخيراً أن: $x = N = x_0^n + r$ وطبقنا صيغة الاستكمال الخطي المستعمل بصورة شفهية من قبل رياضيّي تلك الحقبة فيكون لدينا:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \simeq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y \simeq y_1 + \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

ولذا فإن: $y \simeq x_0 + \dfrac{N - x_0^n}{(x_0 + 1)^n - x_0^n}$

---

(٤٤) المصدر نفسه.

وهكذا نحصل على الصيغة (2) وبالتالي الصيغة (1).

في الحالتين تفترض المسيرة المتبعة اللجوء إلى طرق - صيغة ذات الحدين، جداول المعاملات، قاعدة حساب الخطأين - معروفة سابقاً ومستعملة من قبل الكرجي كما سبق ورأينا. ومن جهة أخرى فإن طرق الاستكمال الخطي كانت مطبقة بشكل شائع من قبل فلكيي القرن الحادي عشر إن لم يكن قبل ذلك كما يبيّن البيروني[٤٥]. فلا وجود هذه الوسائل الرياضيّة ولا قراءة السموأل نفسه تخولاننا أن ننسب اليه قاعدة التقريب السابقة. ففي كتابه الجبري الباهر كما في غيره من النصوص يعلن السموأل صراحة عن ابتكاراته الخاصة[٤٦] لكنه مع ذلك يتحدث في الصفحة الأخيرة من كتابه الخاص بالحساب عن «من المخترعات التي لم نعلم ان سُبِقْنا إليها». لكنه لا يذكر أياً من هذه المخترعات في أي مكان. لذا فإننا سوف نعتمد الحذر نفسه الذي اعتمدناه بالنسبة الى طريقة روفيني - هورنر ولسوف ننسب الصيغة وكذلك عرض طريقة التقريب إلى مدرسة الكرجي.

ج - **طرق ووسائل لتحسين التقريب**: إن الإستنتاج السابق يصلح أيضاً لمجموعة من الوسائل التي يقترحها السموأل والتي هدفها تحسين تقريب الجذر الأصم لعدد صحيح. الأول على الأقل ليس لدينا حوله أية معلومات تاريخية، وهو ذو أهمية خاصة: فالسموأل يسعى صراحة إلى بناء متتالية من الأعداد النسبية تتقارب مع عدد جبري حقيقي معطى. وبما أن الوسيلة التي يبحث عنها يفترض بها أن تسمح بإعطائه جميع التقريبات عن طريق الإعادة، فهو يعتمد عن قصد طريقة تكرارية. لكن هنا، وهذا ينطبق أيضاً على القرن الثاني عشر يتجنب الرياضي المسائل النظرية للوجود، حتى أنه يجهل أي تبرير نظري له. هذه الاعتبارات كانت لتاريخ ليس ببعيد، وأسوة بغيره من رياضيي القرن الثاني عشر الذين درسوا الطرق العددية، فقد أراد السموأل أن يحصل ببساطة على نتائج يمكن التحقق منها. لكن قبل أي تعليق لننظر إلى ما كتبه السموأل:

---

(٤٥) M.A. Kazim, «Al-Bīrunī and Trigonometry,» in: *Al-Bīrūnī Commemoration Volume* (Calcutta: [n.pb.], 1951). pp.161-170.

(٤٦) Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*, p.9.

أنظر أيضاً: F. Rosenthal, «Al-Asturlābi and As-Samaw'al,» *Orisis*, vol.9 (1950), pp.560-564.

«إذا استخرجت الجذر الأصم لعدد ما [. . .] وأردت تعديله [أي تحسين التقريب] بهذا الحساب، فأضرب الضلع في نفسه، وانظر كم التفاوت بين المبلغ وبين المقدار المطلوب مقاربة جذره واقسم ذلك الخطأ على ضعف صحاح الجذر، وما خرج من القسمة يزاد على الضلع إن كان الخطأ ناقصاً وينقص من الضلع إن كان الخطأ زائداً، فيخرج الضلع المعدل ويكون أبداً أقرب إلى الحقيقة من الذي قبله. ثم أضرب هذا الضلع المعدل في نفسه، واعلم قدر التفاوت، فهو الخطأ الثاني، ولا بد أن يكون أقل من الخطأ الذي قبله. ثم أقسم هذا الخطأ على ضعف صحاح الضلع، فيخرج الضلع الثالث، ولا بد وأن يكون أقرب إلى الحقيقة من الضلع الثاني.

فإذا اقتنعت بذلك فذاك، وإلا ربّعته وقايست بين مربعه وبين المطلوب جذره، فإن التفاوت لا بد أن يكون أقل من الخطأ الذي قبله، فنقسم التفاوت على ضعف صحاح الضلع، وتزيد المبلغ على الضلع الذي خرج قبله، أعني أن تزيده عليه أو تنقصه منه بحسب زيادة الخطأ ونقصانه، فيخرج الضلع [. . .]»(٤٧).

ويستنتج السموأل: «فبهذا الطريق يمكن أيضاً وجود مقادير لانهاية لعددها كل واحد منها أقرب إلى الحقيقة من الذي قبله إلى المطلوب»(٤٨).

يجب الملاحظة أن السموأل لا يقصر استعمال هذه الطريقة على الحالات الخاصة $n = 2$ و $n = 3$ لكنه يعرضها في الحالة العامة. يجب إذن قسمة الفرق على ضعف القوة $(n - 1)$ للجزء الصحيح من الجذر ثم نضيف إلى الفرق مجموع القوى الأدنى حتى $[n - (n - 1)]$، هذا ما كتبه السموأل. وبتعبير آخر يبحث السموأل عن الجذر الميمي المقرب للعدد الصحيح x.

ليكن a العدد الصحيح بحيث: $x^{\frac{1}{n}} - 1 < a \leqq x^{\frac{1}{n}}$

و x_0 عدد نسبي بحيث: $x_0^{\frac{1}{n}} \leqq x^{\frac{1}{n}}$ و $a \leqq x_0^{\frac{1}{n}}$

نفرض: $x = (a+\alpha)^n$ حيث $\alpha \geqq 0,$

$x_0 = (a+\beta)^n$ حيث $0 \leqq \beta \leqq \alpha$

نحصل على التقريب الأول بواسطة الصيغة:

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{x - x_0}{2a^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} a^p} \quad \text{حيث} \quad f(u) = u^{\frac{1}{n}}$$

(٤٧) نص محرّف.

(٤٨) «القوامي،» ص ٦٨ (وجه وظهر الورقة).

وعن طريق التكرار يكتب التقريب من رتبة $k + 1$ حيث ($k = 1, 2, \ldots$):

$$f(x) \simeq f(x_k) + \frac{(x - x_k)}{2a^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} a^p}$$

ويعطي السموأل مثلين رقميّين[٤٩]، نكتفي هنا بعرض الأكثر سهولة منهما:

حيث: $n=2, \quad x=5, \quad x_0=\frac{121}{25}, \quad a=2$

يكون التقريب الأول:

$$\sqrt{x} \simeq \sqrt{x_0} + \frac{(x - x_0)}{2a} \Rightarrow \sqrt{5} \simeq \frac{11}{5} + \frac{1}{25}$$

ويكون التقريب الثاني:

$$\sqrt{x} \simeq \sqrt{x_1} + \frac{(x - x_1)}{2a}$$

حيث: $x_1 = \left[f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{2a}\right]^2 = \left[\frac{11}{5} + \frac{1}{25}\right]^2$

وبالطريقة نفسها يحصل على التقريب الثالث، نلاحظ بالنسبة الى $n = 2$ أن العبارة:

$$f(x) \simeq f(x_k) + \frac{(x - x_k)}{2a^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} a^p}$$

تقارب العبارة: $f(x) \simeq f(x_k) + \frac{(x - x_k)(f(x_k) - f(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}}$

وهذه الأخيرة ما هي سوى قاعدة حساب الخطأين (regula falsi) وفي حالة $n > 2$ استعيض عن العبارة $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ بالعبارة المكافئة: $1/(na^{n-1} + R(a))$

أي أنها صُححت بِـ «كمية» قيمتها المطلقة أكبر. أي «بالكمية»: $\frac{1}{2a^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} a^p}$

---

(٤٩) المصدر نفسه، ص ٦٨ (ظهر الورقة)، و٦٩ (وجه وظهر الورقة).

أن تكون هذه الطريقة قد استنتجت من «قاعدة حساب الخطأين» فهذا يبدو محتملاً جداً، فالسموأل في كتابه الجبري الباهر[٥٠] سبق أن طبق هذه القاعدة أسوة بغيره من الرياضيين من مدرسة الكرجي. إن اختيار «الكمية» الأخيرة كان قد عُلِّل بتعميم نظري مؤسّس على هذه الطريقة. وببساطة، لو أننا قارناها بالطريقة التقليدية: $[f(x) \simeq f(x_k) + (x-x_k) / 2f(x_k)]$ ورغم أنها أكثر بطئاً في حالة الجذر التربيعي يتضح أنها سيئة في حالة الجذر الميمي[٥١].

عدا عن هذه الطريقة التكرارية، التي نصادفها هنا للمرة الأولى، يقترح «بحث» السموأل طرقاً أخرى لتحسين التقريب الذي كان بالمقابل معروفاً سابقاً في الحالة الخاصة لكلّ من الجذر التربيعي والجذر التكعيبي من قبل الحسابيين لمدرسة الكرجي كالاقليدسي[٥٢] مثلاً وأبي منصور البغدادي[٥٣] وكثير غيرهما. إن صياغتهم العامة المنسوبة حتى الآن إلى الكاشي ترقى فعلياً إلى القرن الثاني عشر. ولدينا من بين قواعد أخرى القواعد التالية[٥٤]:

$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{10^{nk}x}/10^k$ حيث $k = 1, 2, \ldots$

$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}/a$ حيث a عدد صحيح موجب

$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{(a^n \times b^n \times \cdots \times l^n)x}/a \times b \times \ldots \times l$ حيث $a, b, \ldots, l$ أعداد صحيحة موجبة

٢ ـ ابتكار الكسور العشرية

قبل كتابة تاريخ الكسور العشرية، يجب التذكير بأن اللجوء إلى هذه الكسور

---

(٥٠) المصدر نفسه، ص ٦٦ وما يليها من المقدمة الفرنسية.

(٥١) بعد أن نشرت دراستنا، لفت انتباهنا الى هذه النقطة بواسطة رسالة من بروينس (M. Bruins)، وكانت هذه النقطة قد أثيرت بشكل مستقل، في:

W. Waterhouse, «Note on a Method of Extracting Roots in As-Samaw'al,» *Archive for History of Exact Sciences,* vo.18, no.3 (1978).

(٥٢) الاقليدسي، الفصول في الحساب الهندي، ص ٤١٦ وما يليها.

(٥٣) ابو منصور عبد القاهر بن طاهر البغدادي، «التكملة في الحساب،» مخطوطات: «(١/٢٧٠٨) لالي، سليمانية، استانبول،» ص ٢٢ (وجه الورقة) وما يليها، و ٢٩ (وجه الورقة) وما يليها.

(٥٤) «القوامي،» ص ٥٨ (وجه الورقة) وما يليها، و ٦٤ (وجه الورقة) وما يليها.

كلما صادفنا حساباً للكسور العادية شيء، وإعطاء عرض مفهومي ومفصّل للتمثيل العشري للكسر شيء آخر. الحقيقة أنه في هذه الحالة الأخيرة فقط يمكننا تمييز رؤية واضحة لدى الرياضي عن معنى الكتابة الرمزية والتأكيد بأنه قد اختار هذه الكسور لذاتها متعمداً هذا التمثيل. وبسبب عدم مراعاة هذه القاعدة الأولية بل البديهية، فإن بعض المؤرخين لمسألتنا هذه قد مال لأن يكتشف ابتكارها كيفما اتفق رغم تاريخها ووجودها المحددين: نذكر فقط الدراسة الكلاسيكية الطويلة لسارتون (G. Sarton)[٥٥] والمقالة الأكثر حداثة لسعيدان (Saîdan)[٥٦].

لو أخذنا الرياضيات العربية من القرن العاشر حتى القرن الثاني عشر، ولو أننا اقتصرنا على عمل السموأل مستثنين الآن فقط بحثه (١١٧٢)، فسوف نفاجأ في الحالتين بوجود تطبيق للكسور العشرية *لا يفترض أي اعتراف بهذه الكسور ككسور*: يكفي أن نفكر بجميع العمليات الحسابية التي أجريت بواسطة كسور عادية حيث مقامها من قوى العشرة. من غير المجدي أن نراكم هنا وقائع كهذه فإن نموذجاً محدداً أو شهادة بليغة ستكون أكثر دلالة وتسمح لنا بالتصدي لمسألة اعتدنا ربطها بولادة الكسور العشرية. سنرى أن أسماء عديدة مقترنة بهذه المسألة وليس من أقلها السموأل نفسه وذلك في النصوص التي تسبق عرضه النظري للكسور العشرية.

في الواقع أنه منذ القرن العاشر، إن لم يكن قبل ذلك، نصادف في مختلف الأبحاث الحسابية العربية قاعدة لتقريب الجذر الأصم المربع والمكعب، وهذه القاعدة كانت تسمى في تلك الحقبة «قاعدة الأصفار». إن الصياغة العامة لهذه القاعدة موجودة في بحث السموأل كما يلي:

$$k = 1, 2, \dots \qquad (a)^{\frac{1}{n}} = \frac{(a \cdot 10^{nk})^{\frac{1}{n}}}{10^{k}}$$

والتقريب الحاصل حسب هذه القاعدة يشمل بالضرورة الكسر العشري: وانطلاقاً من هذه الملاحظة أراد مؤرخ مثل سارتون أن يُدخل إلى تاريخ الكسور العشرية المؤلفين الذين أجروا تطبيقاً لهذه القاعدة[٥٧]. لا شيء يخولنا مع ذلك أن نؤكد

---

(٥٥) George Sarton, «The First Explanation of Decimal Fractions and Measures (1585): Together with a History of the Decimal and a Facsimile (No. XVII) of Stevin's Dismes,» *Isis*, vol. 23(1), no.65 (June 1935), pp.151-244.

(٥٦) الاقليدسي: الفصول في الحساب الهندي، ص ٤٨٩.

(٥٧) Sarton, Ibid., p. 168 sq.

أن الرياضي أثناء إجرائه لهذه الطريقة استطاع امتلاك التمثيل العشري للكسر والتعرف إليه، وقد صادف له أن حوّلها مباشرة إلى كسرٍ ستيني، فالإقليدسي مثلاً قد أورد في بحثه الحسابي المصاغ في عام ٩٥٢ الذي سوف نعود إليه لاحقاً «قاعدة الأصفار» في الحالات الخاصة للجذر التربيعي للعدد 2، وأيضاً لتحويل الحاصل مباشرة إلى كسر ستيني[٥٨]. ونصادف المسيرة نفسها بالنسبة إلى استخراج الجذر التربيعي للعدد 5 في بحث حسابي آخر كتبه البغدادي (المتوفى عام ١٠٣٧) تحت عنوان «التكملة في الحساب». أخيراً، فالطريقة نفسها يتبعها رياضي من القرن الحادي عشر هو النسوي في كتابه المسمّى المقنِع[٥٩] وبإمكاننا مضاعفة الأمثلة التي تؤيد جميعها هذه الفكرة: على الرغم من أن الرياضي يصادف الكسور العشرية في مجال خاص فإنه يحولها مباشرة إلى كسور ستينية ولا يهتم كفاية بتحديد الأولى. قد تكون نصوص السموأل السابقة على بحثه (١١٧٢) أكثر دلالة، ففي بحثه «التبصرة في علم الحساب»، يذكّر بقاعدة الأصفار ويطبقها على استخراج الجذر التربيعي للعدد 1020، فيحصل أولاً على 31 زائد تسعمائة وسبعة وثلاثين جزءاً من الألف، تختزلها [. . .] ويكون الجواب 31 زائد نصف، زائد خُمُسَيْن، زائد خُمس من عُشر، زائد خُمس من عُشر من عُشر، وهذا هو الجذر التربيعي للعدد 1020 حيث الفرق مع الحقيقة لا يذكر[٦٠].

وتتعزز أطروحتنا بدرس هذه الأمثلة المختلفة: إذ لا أحد من هؤلاء المؤلفين كما يبدو أدرك فعلاً التمثيل العشري للكسور. ليس هنالك ما يدع مجالاً لتخمين شكل هذا التمثيل الذي ينبعث لاحقاً ويصبح منذ ذلك الوقت حاضراً في كتاب السموأل من (١١٧٢)، فحتى ذلك الوقت لا نصادف في أحسن الحالات سوى حدس مغمور بتجريبية التطبيق.

أ - مدرسة الكرجي: السموأل: في البحث (١١٧٢) تحديداً، بإمكاننا أن نلاحظ هنا وهنالك[٦١] تطبيقاً للكسور العشرية، لكن العرض النظري للسموأل، لا

---

(٥٨) الاقليدسي، المصدر نفسه، ص ١٣٣ - ١٣٤.

(٥٩) علي بن أحمد النسوي، «المقنع في الحساب الهندي،» مخطوطات:
«Leiden arabe no. (566),» pp. 21-22.

(٦٠) السموأل، «التبصرة في علم الحساب،» مخطوطات:
«Oxford Bod. Hunt. (194),» p.18.

(٦١) انظر مثلاً: «القوامي،» ص ٢٧ (ظهر الوقة).

يظهر إلا في نهاية المؤلَّف، فهو يتبع بالضبط عرض طرق ومسائل التقريب التي وصفناها سابقاً. وفي الواقع، فإن هذا الفصل الأخير يشكل كما لاحظنا التوسيع المباشر لما سبقه، حيث يقترح المؤلف من ضمن غايات أخرى، تحسين طرق التقريب. هذا هو إذن السياق الذي تدخل ضمنه الكسور العشرية والذي يسمح بإيضاح دورها في جملة أهداف المؤلَّف. إن هدف السموأل هو في الحقيقة موحّد وشامل كما يشهد بذلك العنوان نفسه للفصل الذي يحتوي هذا العرض: «في وضع أصل واحد تحدد به جميع أعمال التفريق التي هي القسمة والتجذير والتضليع لجميع هذه المراتب وتصحيح الكسور الواقعة في هذه الأعمال بغير نهاية»(٦٢).

يقصد السموأل بعبارة «تصحيح الكسور بغير نهاية» إعطاء هذه الأخيرة شكلاً يمكّنها من أن تصبح قابلة للحساب كالأعداد الصحيحة وأن يكون بالإمكان تصحيح التقريبات بشكل لانهائي للعمليات كافة.

يشكل هذا العنوان وحده برنامجاً كاملاً، ووضوحه يجعل أي تعليق دون طائل. لنذكر فقط قبل إيراد العرض أن نظرية الكسور العشرية تُقدّم كحل تقني لمسألة هي نظرية وتطبيقية على السواء بالنسبة إلى التقريب.

كتب السموأل: «كما أن المراتب المتناسبة المبتدئة من مرتبة الآحاد [10^0] تتوالى على نسبة العشر بغير نهاية كذلك نتوهم في الجهة الأخرى لِـ [10^0] مراتب الأجزاء [من العشر تتوالى] على تلك النسبة ومرتبة الآحاد [10^0] كالواسطة بين مراتب العدد الصحاح التي تتضاعف آحادها على نسبة العشر وأمثاله بغير نهاية وبين مراتب الأجزاء المتجزئة بغير نهاية.

ونسمي المرتبة التالية لمرتبة الآحاد [10^0] مرتبة أجزاء العشرات والتالية لها أجزاء المئات والتالية لها أجزاء ألوف وعلى هذا القياس. وإذا انتهينا في حساب القسمة أو التجذير أو تضليع الكعب أو مال المال أو غير ذلك من أبواب التفريق إلى مرتبة الآحاد [10^0] لم نقطع الحساب عندها لكنا ننقل السطور [سطور الجدول] التي يجب نقلها على الرسم إلى تحت مرتبة أجزاء العشرات، وما حصل في هذه المرتبة فهو أجزاء من $\overline{10}$. وإذا أتينا على شروط الحساب نقلنا [سطور الجدول] إلى تحت مرتبة أجزاء المئات فما خرج في هذه المرتبة فهو أجزاء من مائة وهذه صورة المراتب المشار إليها»(٦٣).

(٦٢) المصدر نفسه، ص ١١١ (وجه الورقة).
(٦٣) المصدر نفسه، ص ١١١ (وجه وظهر الورقة).

أجزاء عشرات ألوف ألوف ألوف ألوف	0	
أجزاء ألوف ألوف ألوف ألوف	0	4
أجزاء مئات ألوف ألوف ألوف	0	
أجزاء عشرات ألوف ألوف ألوف	0	
أجزاء ألوف ألوف ألوف	0	3
أجزاء مئات ألوف ألوف	0	
أجزاء عشرات ألوف ألوف	0	
أجزاء ألوف ألوف	0	2
أجزاء مئات ألوف	0	
أجزاء عشرات ألوف	0	
أجزاء ألوف	0	1
أجزاء مئات	0	
أجزاء العشرات	0	
مرتبة الآحاد	0	0
مرتبة العشرات	0	
مرتبة المئات	0	
مرتبة الألوف	0	1
مرتبة عشرات الألوف	0	
مرتبة مئات الألوف	0	
مرتبة ألوف الألوف	0	2
مرتبة عشرات ألوف الألوف	0	
مرتبة مئات ألوف الألوف	0	
مرتبة ألوف ألوف الألوف	0	3
مرتبة عشرات ألوف ألوف الألوف	0	
مرتبة مئات ألوف ألوف الألوف	0	
مرتبة ألوف ألوف ألوف الألوف	0	4
مرتبة عشرات ألوف ألوف ألوف الألوف	0	

بإمكاننا أن نلاحظ أنه:

(١) يبدأ المؤلف بإثبات النسبة: 100:1000 = 10:100 = 1:10 وهكذا دواليك إلى ما لانهاية.

(٢) وكما يشير الجدول وجملته الأولى، يبيّن السطر الأخير من الجدول أنه يضع بصورة جليّة إشارة الصفر تحت مرتبة الآحاد.

(٣) تكمن فكرته إذن في تحديد مفهوم قوة كميّة ما إلى مقلوبها. وبدقة أكثر، مفترضاً أن $10^0 = 1$، وأن $\frac{1}{100} : \frac{1}{10} = \frac{1}{10} : 1$ وعلى هذا القياس إلى ما لانهاية.

(٤) ويشير أخيراً، إلى أن الحساب هنا هو نفسه بالنسبة إلى الكميات الجبرية عامة: الأمثلة التي يعطيها فيما بعد تعزز بشكل كاف هذه الإشارة. ونلخص ذلك بالقول إنّ المقصود بالحقيقة ومنذ أن افترض أنّ $10^0 = 1$، أن توضع عن جهتي 10^0 المتتاليتين $10, 10^2, \ldots$ و . . . ، و $\frac{1}{10^2}$ ، $\frac{1}{10}$ وأنّ تُطبق القواعد العامّة الناتجة عن الحساب الجبري للقوى. ومن الآن فصاعداً فكل عدد حقيقي له تمثيل عشري محدود أو غير محدود.

بتوصله إلى هذه النتائج، استطاع السموأل تحقيق مشروعه في التعميم، وصاغ مبدأ وحيداً يسمح بتصحيح التقريبات بشكل غير منته. وهنا على الأقل يمكن شرح هذه النظرية بواسطة توسيع مفهوم قوة جبرية لكمية ما إلى مقلوبها.

لقد بيّنا سابقاً أن توسيع هذا المفهوم للقوة الجبرية هو من عمل مدرسة الكرجي. وقد وجد هؤلاء الرياضيون فيه الوسيلة التي سمحت لهم بتطبيق الحساب الأولي على كثيرات الحدود وإنجاز تحقيق مشروع الكرجي المذكور آنفاً. لكن الصعوبة الكبرى، التي كان عليهم تخطيها للوصول إلى هذا التوسيع والتي تمكّن السموأل تحديداً من إعطائها حلاً، كانت في صياغة القوة المعدومة: $x^0 = 1$ حيث $x \neq 0$. وباجتياز هذه العقبة كان بالإمكان إيراد قاعدة تكافؤ:

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad \text{حيث} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

وبفضل ترميز الجداول وضع السموأل من جهتي x^0 المتتاليتين:

$$x, x^2, \ldots \quad \text{وَ} \quad \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \quad \text{وحسابه لِـ} \quad x^n \frac{1}{x^{n'}} \quad \text{حيث} \quad n, n' \in \mathbb{Z},$$

يعتمد على عدّ n' مرتبة باتجاه الوحدة إنطلاقاً من المرتبة n، وكذلك حسابه لِـ $x^{-n'} \cdot x^n$ بعدّه كذلك لِـ n' مرتبة ولكن باتجاه معاكس للوحدة. هذه القاعدة تعني

فعلياً معالجة القوى من نوع $\frac{1}{x^n}$ مثل x^{-n} وجمع القوى جبريًا. وهكذا بعد أن أقام الجدول التالي(٦٤):

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	5	6	7	8	9
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$	$\frac{1}{x^7}$	$\frac{1}{x^8}$	$\frac{1}{x^9}$
512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
19683	6561	2187	729	243	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{2187}$	$\frac{1}{6561}$	$\frac{1}{19683}$

كتب: «فإن كانا في جهتين مختلفتين عددنا من مرتبة أحد المضروبين بقدر بعد المضروب الآخر عن الواحد، ويكون العدد من جهة الواحد، وإن كانا في جهة واحدة عددنا في خلاف جهة الواحد»(٦٥).

إن هذا التصور بالذات هو الذي جعل تطبيق العمليات الحسابية الأولية ممكناً على العبارات الجبرية من نمط:

$$f(x) = \sum_{k=-m}^{n} a_k x^k \quad \text{حيث:} \quad m, n \in \mathbb{Z}+,$$

وبصورة خاصة على كثيرات الحدود.

هذه النتائج كافة، سمحت بدورها، بإعداد نظرية الكسور العشرية. انطلاقاً من اقتراح الكرجي والتمديدات التي حصل عليها السموأل، كان يكفي هذا الأخير أن يستبدل x في الجدول الأخير بـ 10: وهذا ما فعله للتوصل إلى جدول الكسور العشرية، واعتماد الكتابة المستعملة آنفاً في حالة كثيرات الحدود بالمعنى الواسع، وللحصول على تمثيل عشري لأي عدد جبري، وأخيراً استطاع أن يطبق على هذه التمثيلات العمليات المعدّة سابقاً لكثيرات الحدود بالمعنى الواسع للحصول مرة واحدة على قواعد حساب الكسور.

كل شيء يدعم الشهادة بأن ابتكار هذا الجبر كان ضرورياً للتعبير العام فعلاً

(٦٤) انظر النص العربي، في: Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al,* pp.21-22, وص ١٨ - ١٩ من المقدمة الفرنسية.

(٦٥) المصدر نفسه.

عن الكسور العشرية. ونرى هنا مرّة أخرى أن الطريق الى اكتشاف علمي ليس أكثر مباشرة ولا أكثر قصراً.

بعد أن توصل السموأل إلى هذه المرحلة من عرضه للكسور العشرية وجد نفسه مواجهاً بمسألة مهمة تتعلق بالكتابة الرمزية لهذه الكسور ومنقاداً بالتالي لمعالجتها بطريقة غير مباشرة على الأقل، وقد ترافق حل هذه المسألة كما أشرنا سابقاً مع ابتكار الكسور العشرية. لكن هذا التدوين، رمزياً كان أم كلامياً، كان عليه أن يرضي حاجتين، الأولى نظرية وقد سُدّت جزئياً بكتابة كثيرات الحدود بواسطة جداول، إذ كان على التمثيل العشري المحدود أو غير المحدود لأي عدد حقيقي معروف أن يكون ممكناً. أما الحاجة الثانية وهي تطبيقية فكانت تتعلق بإمكانية التعبير عن مثل هذا التمثيل. إذ بتحقيق الشرط الأخير، كان يتعلق دمج مجموعة الكسور العشرية ضمن تطبيق مختلف عن التطبيق الحرفي البحت.

إن أهمية مسألة التدوين التي طُرحت على السموأل تظهر بوضوح إذا ما وضعناها في محتواها أي في جبر تلك الحقبة بمجمله. كل شيء يدعم الافتراض أنه لكي يصبح التدوين ممكن الإجراء، اختير هذا التدوين للكسور العشرية تبعاً لنظام التدوين المستعمل في الجبر. لن ندّعي بالتأكيد دراسة التدوين الجبري المستعمل في عصر السموأل، لنذكر فقط أن الجبر كان يعبر عنه كلامياً بصورة أساسية، لكن غياب التدوين الرمزي عوّض عنه جزئياً بما وصفناه سابقاً تحت عنوان «طريقة الجداول». ومبدأ ذلك بسيط، إذ تدوّن كلامياً في سطر أول، مختلف القوى x^n، حيث $n \in \mathbb{Z}$. ، وتكتب المعاملات على سطر ثانٍ تحت الأول فيما يتعلق بكل عملية، وتسنّ مجموعة قواعد تسمح بإضافة سطور إضافية وإزاحتها.

إذا كانت هذه الطريقة ـ أو هذا «الترميز» للجداول ـ حتى الآن مرهقة، فقد جعلت ممكناً مع ذلك تنفيذ جميع العمليات الجبرية على كثيرات الحدود بالمعنى الواسع للكلمة. إلى هذه الفعالية النسبية دون شك يجب أن تعزى استمرارية هذه الطريقة في التدوين عند رياضيين لاحقين بعدة قرون للجبريين العرب، أمثال ڤيت و والليس.

في محتوى كهذا يجب أن تطرح مسألة التدوين للكسور العشرية ضمن نسق هذه الطريقة للجداول، وفيما يبقى فالسموأل يعطي أمثلة تؤكد تحليلنا. فهو يطبق على الكسور العشرية العمليات نفسها التي يجريها على الأعداد الصحيحة المكتوبة بشكل عشري دون إعطاء التبرير.

وينتج عن ذلك كمثل أول قسمة العدد 210 على 13، إذ يشير السموأل أولاً إلى امكانية الاستمرار في هذه القسمة إلى ما نشاء. ونستعيد عباراته نفسها إذا أردنا متابعة العملية «مهما شئنا من المراتب، فإذا اقتصرنا على خمس مراتب»[٦٦] نحصل على النتيجة التالية المدوّنة هكذا:

4 أجزاء من مئات الألوف	8 اجزاء من عشرات الالوف	3 اجزاء من ألف	5 اجزاء من مئة	1 جزء من عشرة	16 صحاح

يستند هذا التدوين كما نلاحظ الى المبدأ التالي: عزل الجزء الصحيح وتمثيل الجزء الكسري وفقاً للتقنية التي يستعملها السموأل أيضاً في جبره لتمثيل كثيرات الحدود: لكن إذا كان هذا التدوين يسمح فعلياً للحساب بالجداول فإن التلفظ به صعب، وبالتالي فإن قدرته العملية ضيقة.

وفي الأمثلة الأخرى، يعدل السموأل التدوين أيضاً بالاتجاه الذي أشرنا إليه: هذه التعديلات تؤكد على تتابع المراتب أكثر مما تؤكد على التعابير: أي تؤكد على أجزاء العشرة، أجزاء المائة، أجزاء الألف... الخ. وتجعل الكلام عنها قابلاً للّفظ. هذا التحسين يبدو في مثله الثاني، أي في استخراج الجذر التربيعي للعدد 10 حيث يدوّن النتيجة هكذا[٦٧]:

أعشار أعشار أعشار أعشار أعشار الأعشار	أعشار أعشار أعشار أعشار الأعشار	أعشار أعشار أعشار الأعشار	أعشار أعشار الأعشار	أعشار الأعشار	أعشار	آحاد	عشرات
7	7	2	2	6	1	3	

وبالفعل، رغم أن مبدأ التدوين يبدو هنا مطابقاً للسابق بشكل أساسي، فقد أراد السموأل بداهة أن يظهر بشكل أساسي تتابع المراتب ورتبة كل واحدة منها وذلك

(٦٦) «القوامي،» ص ١١٢ (ظهر الورقة).
(٦٧) المصدر نفسه، ص ١١٣ (وجه الورقة).

بتكرار التعبير نفسه بما يكفي من المرّات ويمكن الإستعاضة عن الكتابة المثقلة: «أجزاء العشرة، أجزاء المئة، أجزاء الألف. . . الخ» بالتدوين بطريقة مكافئة:

$$\begin{matrix} 10 & 10^{\circ} & \frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & \left(\frac{1}{10}\right)^3 & \left(\frac{1}{10}\right)^4 & \left(\frac{1}{10}\right)^5 & \left(\frac{1}{10}\right)^6 \\ & 3 & 1 & 6 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{matrix}$$

هكذا توجد المرتبة n مدموغة بالتكرار n مرة للتعبير «عُشر».

هذا التوحيد يرتدي أهمية قد تفوت قارئاً معاصراً، وهو بالفعل في أساس التسمية الخاصة التي أطلقت على هذه الكسور «عشرية» أو «أعشارية» أي (Les dismes). بعد هذا القول ورغم التحسين في التدوين فقد ظلت الصعوبة قائمة عند التلفظ بمثل هذا العدد. ولكي يخفف السموأل هذه الصعوبة إستوحى من كتابةٍ للكسور العادية كانت مستعملة في ذلك الوقت، فحمل الجزء الكسري للمقام نفسه وهكذا توصل إلى التدوين النهائي التالي:

$$\begin{matrix} & & & & & 3 \\ & 1 & 6 & 2 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

والذي يُقرأ: 3 وحدات زائد 162277 من 1000 000 أو كما كتب بالأحرى: «إن أردنا أن تكون جميع الكسور الحاصلة أجزاء من مخرج واحد نقلنا مرتبة الآحاد وما يتلوها من العشرات والمئات وغير ذلك من الصحاح إلى سطر أعلى وكتبنا المراتب الباقية أصفاراً وكتبنا بعد الأصفار واحداً»[٦٨]. وبفضل هذا التدوين ومع مراعاة مبدأ التفريق ما بين الجزء الصحيح والجزء الكسري يتم التوصل إلى عدد يمكن التلفظ به.

وفي نهاية عرضه، يذكّر السموأل باختصار بالغاية الأساسية لنظرية الكسور العشرية: التمكن من تطبيق العمليات المختلفة ـ القسمة، استخراج الجذر الميمي للكسور ـ بالطريقة نفسها التي تجري على الأعداد الصحيحة، وبالتالي جعل التصحيح غير المحدود للتقريب أكثر سهولة وجلاء.

هذا التذكير متبوع باستنتاج ثانٍ حيث ينوّه السموأل بدقة بهدف مجمل عرضه. كل شيء يدل على أننا تجاه إدراك فكرة أساسية سوف نفهمها رغم كونها ما زالت دون برهان، وهي أن الجذر الميمي غير العشري لأي عدد موجب هو نهاية لمتتالية متزايدة

---

(٦٨) المصدر نفسه، ص ١١٤ (وجه الورقة).

$(a_n)_{n\geq 1}$ من القيم العشرية، حيث a_n هي القيمة التقريبية الناقصة عن هذا العدد بمقدار $\frac{1}{10^n}$. ويستنتج السموأل: «وهكذا نعمل في تجذير ضلع الكعب ومال مال ومال كعب وغير ذلك. ويمكننا بهذا الطريق [الكسور العشرية] استقصاء تدقيق أعمال التفريق وأن نستخرج به جوابات لا نهاية لعددها كل واحد منها أدق وأقرب إلى الحقيقة من الذي قبله»(٦٩).

لقد رأينا إذن أن نظرية الكسور العشرية أعدت مع السموأل في سياق مسألة استخراج الجذر الميمي لعدد ما، إضافة إلى مسائل التقريب. ويبقى علينا أن نعود إلى أولئك السابقين من مدرسة الكرجي كي نبين أن أول عرض لهذه النظرية يوجد فعلياً عند رياضيي تلك المدرسة.

ب ـ **ظاهرة الاقليدسي (٩٥٢)**: من بين جميع هؤلاء السابقين لا نعرف سوى الإقليدسي فقد اعتقد المؤرخون حديثاً أن بإمكانهم إعطاءه مكانة خاصة بالنسبة إلى تاريخ الكسور العشرية. ألم ينسبوا إليه بالفعل اكتشاف هذه الكسور؟ أو لم يؤكدوا أنه استعملها «كونها كسوراً» وبأنه «قدّر أهمية التدوين العشري»؟(٧٠) راكنين إلى هذا الإعتقاد، قدّر بعض المؤرخين وأعلنوا دون تفحّص أنهم قرأوا في بحث الإقليدسي شرح وتطبيق الكسور العشرية.

من الضروري فحص الأسباب التي قادت المؤرخين رغم معلوماتهم الجيدة إلى هذه القراءة والتساؤل بصورة خاصة ما إذا كان هذا الإستقراء التاريخي المبالغ ناتجاً عن غموض في النص. ويبدو صحيحاً أن الإقليدسي في أكثر من مرة يضع في «بحثه» مسائل خاصة يحلّها باللجوء إلى الكسور العشرية. ولقد واتتنا سابقاً فرصة عرض «قاعدة الأصفار» التي سمحت بحل إحدى هذه المسائل أي استخراج الجذر التربيعي والتكعيبي.

المسألتان الأخريان هما التاليتان:

---

(٦٩) المصدر نفسه.

(٧٠) انظر: Saidan, «The Earliest Extant Arabic Arithmetic,» حيث يتناول الفكرة نفسها عدة مرات، فيكتب مثلاً: «واكثر ما يجعلنا فخورين بالاقليدسي انه كان أول من عالج كسوراً عشرية، فاقترح لها اشارة تفصل الصحيح عن الكسر، وعالج الكسور كما يعالج الاعداد الصحيحة. فقبل التعرف على الإقليدسي، كان الرأي الشائع هو أن غامشيد بن مسعود الكاشي هو أول من عالج الكسور العشرية». انظر: المصدر نفسه، ص ٥٢٤.

ـ تكرار زيادة ـ أو إنقاص ـ عدد معطى بمقدار عُشره ـ قدر ما نشاء من المرّات.

ـ قسمة عدد مفرد عدة مرات إلى نصفيه وكذلك إجراء العملية العكسية.

بمعزل عن هذه المسائل الخاصة، لا شيء يوحي في بحث الإقليدسي باللجوء إلى الكسور العشرية. فمن المؤكد إذن أنه لا يعطي أي عرض عام يقارن بعرض السموأل.

ضمن هذه الشروط، بإمكاننا التساؤل بماذا تتميز مساهمة الإقليدسي في تاريخ الكسور العشرية عن تلك المساهمات التي لم نعتقد أنه بإمكاننا أن نعزوها إليه. وبتعبير آخر، هل استطاع الإقليدسي أن يكوّن عن هذه الكسور سوى معرفة حدسية وعرضية؟ للإجابة عن هذا السؤال الواضح علينا العودة إلى النصوص الأكثر أهمية لهذا المؤلف، ففي النص الأول يعالج مسألة زيادة عدد بمقدار عُشره خمس مرات؛ فيكتب:

«مثل أن نريد أن نزيد على عدد عشره خمس مرات: فإنّا نفرض ذلك العدد على حسب ما جرت به العادة، ثم نعيده تحته بحطيطة منزلة، فنعلم بذلك عشره ونزيده عليه، فنكون قد زدنا عليه عشره مرة واحدة.

ونرسم ما يخرج من كسر قبله، وننسبه من منزلة الآحاد، بعد أن نعلم على منزلة الآحاد، ثم نزيد على ذلك مثل عشره كذلك، خمس مرات»(٧١).

ويتابع: «والمثال في ذلك: أنّا أردنا أن نزيد على ١٣٥ عشرها خمس مرات فأعدنا تحته بحطيطة منزلة وعلمنا على منزلة الآحاد فصار ذلك كذلك $\overset{١٣٥}{١٣٥}$١ فزدنا عليه فصار ١٤٨٥. ثم نزيد عليه عشرة ثانية وذلك بأن نعرف عشرة فيكون كذلك $\overset{١٤٨٥}{١٤٨٥}$١ فنزيده عليه فيصير ١٦٣٣٥ وهو مابة وثلاثة وستون، وخمسة وثلاثون، من مابة، وهو ربع وعشر فنزيد عليه عشره وهو أن نعرف عشره أولاً ثم نزيده عليه فيكون $\overset{١٦٣٣٥}{١٦٣٣٥}$١، وإذا زدنا عليه صار ١٧٩َ٦٨٥ ويكون ما قبل منزلة الآحاد وهو ٦٨٥ منسوباً من ألف، لأن منزلة الآحاد رابعة له. وإذا زدنا عليه عشره صار كذلك ٢١٧٤١٨٨٥، وننسب ما قبل منزلة الآحاد، وهو ٤١٨٨٥ من مابة ألف. فنكون قد زدنا على ١٣٥ مثل عشره خمس مرات»(٧٢).

انطلاقاً من هذا المقطع بشكل أساسي ظهر الإعتقاد بإمكانية الكشف عن انبثاق

---

(٧١) الاقليدسي: **الفصول في الحساب الهندي**، ص ١٥٠.

(٧٢) المصدر نفسه.

ما للكسور العشرية في مؤلف الإقليدسي. إن تفسيراً كهذا يبدو أنه يهمل الصعوبات الجدية التي غالباً ما تصطدم بها أية دراسة رصينة، فمن الضروري في الواقع إقامة تمييز واضح بين ما يعود إلى القسمة العادية بهذه أو تلك من القوى [للعدد الصحيح الموجب للعدد 10] وما يكشف عن استعمال مقصود للكسور العشرية، ومعرفة توسيع مفهوم المنزلة وبالتالي المعنى الدقيق للإشارة المستعملة. إن سكوت الإقليدسي عن هذه النقاط المختلفة يضاعف من خطورته الغموض الذي يكتنف عباراته بشكل عام، فيجعل أية محاولة للكشف عن مقاصده الحقيقية صعبة. تأكيد واحد، سلبي، يظهر حتى الآن، ألا وهو: خلافاً للسموأل، لم يصُغ الإقليدسي ولو مرة واحدة فكرة إتمام متتالية قوى العشرة بمتتالية قوى مقلوبها، بعد أن حدّد القوة المعدومة. هذا إضافة إلى أنه في النص الذي أوردناه تظهر ثلاث أفكار رئيسية استطاع وقعها الحدسي أن يضلل المؤرخين، فقد ظنوا أنهم يواجهون عرضاً نظرياً لما لم يكن مدركاً إلا ضمنياً، وبالتالي فقد بالغوا في تقدير مساهمة المؤلف في تاريخ الكسور العشرية. نلاحظ في الواقع أن الإقليدسي:

(١) يعيد العدد نفسه مخفضاً إياه منزلة واحدة.

(٢) يحمل الكسر إلى منزلة الآحاد.

(٣) يدلّ على هذه المنزلة بإشارة.

إن أفكاراً كهذه تطرح مسائل إضافية أكثر مما تحمل منها وهكذا فالفكرة الأولى تتعلق بالعملية التي تتحكم بغيرها من العمليات: إنقاص المنزلة، لكن ما الذي يجب إجراؤه عندما لا نقصد بالمنازل شيئاً سوى الوحدات والعشرات والمئات وحاصل ضربها المتتالي؟ وعبثاً نفتش في بحث الإقليدسي عن تحديد آخر أو استعمال آخر لهذا المفهوم الأساسي.

والحال أن نصاً ثانياً للإقليدسي، حيث مسألة القسمة على عشرة تبدو بطريقة ما ضعيفة يستطيع توضيح أفكار المؤلف. والمقصود في الواقع قسمة عدد صحيح مفرد إلى نصفين بقدر ما نشاء من المرّات. يصيغ المؤلف قاعدته كما يلي:

«فأما ما كان رسمه على مذهب العدد فإن تنصيف الواحد من كل منزلة هو ٥ قبلها. فيجب من ذلك إذا نصفنا عدداً فرداً فانا نجعل نصف الواحد ٥ قبله، ويعلم على منزلة الآحاد علامة فوقه[٧٣]، ليعلم به المرتبة وتصير مرتبة الآحاد عشرات لما قبلها، ثم تنصف الخمسة حسبما جرت

---

(٧٣) في ترجمته الانكليزية لهذا النص يدخل سعيدان الاشارة الى النص. انظر: =

العادة في تنصيف الصحيح، وتصير مرتبة الآحاد في المرة الثانية من التنصيف مئتين، وكذلك يجري الأمر دائماً»[٧٤].

نظراً إلى الأسباب المذكورة أعلاه، علينا أن نحترس أولاً من ترجمة هذه القاعدة بالصيغة:

$$\frac{1}{2}10^m = 5 \times 10^{m-1} \quad \text{حيث} \quad m \in \mathbb{Z}$$

وعلينا ثانياً الإحتفاظ بالفكرتين التاليتين:

ـ إن منزلة الآحاد خلال القسمة على 2 تصبح على التوالي رغم بقائها على حالها منزلة للعشرات ثم للمئات... الخ.

ـ إن النصف لكل منزلة ـ آحاد، عشرات، مئات... الخ ـ هو خمسة أمامها، لو نظرنا، إن في الصياغة أم في التطبيق. فهاتان الفكرتان تكشفان فعلياً أن الإقليدسي إذ يقترب كثيراً من فهم حدسي للتمثيل العشري للكسر، فلكي يبتعد حالاً عن هذا الفهم. وهنا تكمن الصعوبة الفعلية وحدود مساهمة الإقليدسي المستترتان على قراءة «عصرية». فعندما يفترض الإقليدسي أن منزلة الآحاد تصبح 10^k خلال القسمة للمرة k على 2، فذلك لكي تبقى على هذه الشاكلة في حالة القوى الصحيحة الموجبة. كل شيء يجري وكأنه يجب أولاً تحويل حساب الكسور إلى حساب الأعداد

=

Saidan, «The Earliest Extant Arabic Arithmetic,» p.485.

يمكن إذاً قراءة: «... and mark the unit place with the mark' over it,...»

ولكن إذا رجعنا الى مخطوطة «الفصول» فلن نجد فيها هذه الاشارة كذلك لا توجد فيما تبقى من الطبعة التي أعدها سعيدان، ما عدا ترجمتها الانكليزية. لهذا السبب فضّلنا الرجوع دائماً إلى المخطوطة بالرغم من أننا نعطي المصادر لطبعة سعيدان وذلك لسهولة تناولها.

(٧٤) يعطي الاقليدسي المثل التالي: «مثل أن نريد أن ننصف ١٩ خمس مرات فإنّا نقول: نصف ٩ أربعة ونصف، فنضع النصف ٥ قبل الأربعة ثم ننصف العشرة ونعلم على بيت الآحاد، فيكون كذلك ٩٥. ثم ننصف الخمسة ثم التسعة فيكون ٤٧٥ ثم ننصف ذلك فيكون ٢٣٧٥ وتكون منزلة الآحاد ألفاً لما قبلها، وذلك لو أردنا أن يلفظ بما معنا قلنا انتهى بنا التنصيف الى أن صار معنا اثنان و٣٧٥ من ألف.

فننصف ذلك فيكون ١١٨٧٥، ثم ننصفه خامسة فيكون ٥٩٣٧٥. [في طبعة سعيدان نجد ٥٩٣٧٥ دون الصفر النهائي الذي يكتبه الاقليدسي ٥] وهو ٥٩٣٧٥ من مائة ألف. ونسبة ذلك أن يقال نصف ونصف ثمن وربع ثمن». انظر: أبو الحسن أحمد بن ابراهيم الاقليدسي، «الفصول»، مخطوطات: «Yeni Cami (802), Istambul,» p.58,

انظر أيضاً الاقليدسي، الفصول في الحساب الهندي، ص ١٤٥ ـ ١٤٦.

العشرية الصحيحة وكأن الإشارة [١] كانت مكرسة للدلالة على عدد المرات حيث نقسم على 2 في الحالة التي ذكرناها، وعلى 10 في الحالة السابقة. من الممكن أنه لهذا السبب لم يلجأ الإقليدسي إلى هذه الأفكار إلاّ في الحالات الخاصة للقسمة على نصفين وفي القسمة على عشرة. ولم ينظر في أية لحظة في أمر تطبيق هذه القواعد على كسر ببساطة $\frac{19}{3}$ ولا حتى في قسمة أي عددين.

ودون الانتقاص من أهمية حدس الإقليدسي أو ملاءمة اختياره للإشارة التي تدل على منزلة الآحاد، علينا الاستنتاج رغم ذلك أن كل هذا ليس كافياً كي يجعل من الإقليدسي مبتكراً للكسور العشرية. لقد كانت تعوزه الوسائل ـ تلك الخاصة بجبر كثيرات الحدود ـ كي يتحرر من ماضٍ مباشر، أي كي يتكهن بالشكل الذي سوف يأتي لاحقاً، أي أن يكون مبتكراً. تبقى مساهمته إذن من تمهيدات التاريخ بينما كان نص السموأل قد شكّل الفصل الأول منه.

ج ـ حالة الكاشي: من الصعب، بل من المستحيل، وصف الاستقبال الذي حظي به عرض السموأل خلال القرنين ونصف القرن اللذين يفصلانه عن الكاشي (١٤٣٦ ـ ١٤٣٧) وكذلك تقدير الاستعمال والقبول بهذه النظرية الخاصة بالكسور العشرية عند رياضيي تلك الحقبة. نستطيع على الأقل، بفضل درس أبحاث الحساب والجبر المؤلفة في ذلك الوقت استخلاص نزعة غالبة وهي أن عرض الكسور العشرية هذا، بقي بعيداً عن الرياضيات الفاعلة والضرورية للتعليم والأبحاث والتطبيق. لكن مما لم يذكر بشكل خاص في الوثائق الرياضية لتلك الحقبة لا يمكننا الاستنتاج أنه لم يكن قد نُقل أو شرح. وعلى العكس من ذلك، لن نفاجأ إذا ما عثرنا يوماً على عرض السموأل منقولاً ومحسّناً من قبل هذا أو ذاك من رياضيي القرنين الثالث عشر والرابع عشر. إن احتمالاً كهذا لا يغير في شيء النزعة العامة التي أتينا على ذكرها، والتي تستحق بحد ذاتها الشرح. ومن المهم هنا أيضاً أن نتبع سياق عرض السموأل خلال هذين القرنين ونصف القرن كي ندرس التغيرات التي طرأت عليها. سوف نتوقف بالطبع عند واحد من لاحقي السموأل المعروفين الذي استعاد عرض واستعمال الكسور العشرية، نعني به الكاشي.

هناك ملاحظة تفرض نفسها مباشرة:

فبينما نجد في البحث (١١٧٢) أن «الشيء» حاضر بالتأكيد، لكنه لا يزال مفتقداً إلى العنوان. نجده الآن يحمل اسماً في كتاب مفتاح الحساب للكاشي:

«الكسور العشرية». إن تكن هذه التسمية من فعل الكاشي، أو من فعل سابقيه، فلا شيء يسمح بإبداء الرأي بهذه المسألة، لكننا نقول ببساطة انها غائبة عن بحث السموأل إضافة إلى عناصر أخرى عديدة سوف ندرسها. علينا ألاّ نغالي في تقويم أهمية التسمية، وبالمقابل لا يمكننا أن نبقى لا مبالين بالحاجة والإرادة اللتين تودّان تمييز الشيء بواسطة اسم. بإمكان هذه الحاجة وهذه الإرادة تبيان كيفية معرفة وطريقة وجود الشيء المطلوب تسميته. ولتأكيد هذه الفكرة علينا أن ندرس الآن أعمال الكاشي حيث يستخدم الرياضي الكسور العشرية، ونقصد بذلك مؤلفيه الأكثر أهمية أي **البحث في محيط الدائرة** وبحثه التالي **مفتاح الحساب**.

في بحثه عن محيط الدائرة ـ الرسالة المحيطية ـ المترجم والمنشور من قبل لوكي (P. Luckey) الذي حلله بشكل كامل(٧٥)، يستخدم الكاشي الكسور العشرية لتقريب العدد π. صحيح أنه في بحثه كان قد توصل إلى تقريب دقيق للعدد π بإجرائه الحساب بوسيلة تقليدية (حساب محيطات متعدد الأضلاع المحاط والمحيط بالدائرة) لكنه اتبع طريقة جديدة وبارعة فقد أعطى أولاً تقريباً للعدد 2π حسب الترقيم الستيني:

وفي الفصل الثامن(٧٦) من البحث نفسه معنون: «في تحويل مقدار المحيط إلى الرقوم الهندية على أنَّ نصف القطر واحد» وكما يبينّ العنوان، فإن الكاشي أراد تحويل التمثيل السابق إلى كتابة عشرية، «ولما كان المحيط ستة أمثال نصف القطر وكسر بلغناه إلى التاسعة فأخذنا ذلك الكسر من مخرج هو عشرة آلاف مكررة خمس مرات $[10 \times 1000^5 = 10^6]$ لأن جزءاً واحداً منه لا يزيد على تاسعة واحدة بنصف عاشرة: $[0 < 10^{-6} - 10^{-9} < \frac{1}{2} 60^{-10}]$»(٧٧).

إن هذه العبارة الأخيرة على وجه الدقة، هي التي تؤمن التوافق بين عدد الأرقام في النظامين: الستيني والعشري. وهكذا يعطي الكاشي:

6;16,59,28,1,34,51,46,14,50.

إن هذا العرض ذا الأهمية التقنية والرياضية الكبرى متبوع بشرح يتناقض باختصاره وطابعه الإشكالي بمعنى ما. هذه هي الحالة العامة المتبقية من المقطع

---

(٧٥) Paul Luckey, *Der Lehrbrief über den Kreisumfang* (Berlin: Akademie - Verlag, 1953).

(٧٦) انظر النص العربي، في: المصدر نفسه، ص ٨٦.

(٧٧) انظر النص العربي، في: المصدر نفسه، ص ٨٦ ـ ٨٧.

المخصص للكسور العشرية في «بحث محيط الدائرة». وشرحه هو التالي:

$$2\pi = 6,283\,185\,307\,179\,586\,5.$$

«واعلم أن الإثنين اللذين في آخر مراتب الكسور هما بمنزلة الدقائق للستة الصحاح على أن عشر دقائق يكون واحداً صحيحاً، وإن شئنا نسمي هذه المرتبة بالأعشار والثمانية التي عن يمينها بمنزلة التواني ونسميها بثاني الأعشار والثالثة بعدها بمنزلة التوالث ونسميها بثالث الأعشار وعلى هذا بقياس حساب النجوم(٧٨)، ولهذا أخذنا من مخرج مفرد واحد. وهذا الطريق في الحساب الهندي مما استبطناه وكذا وصفه في الجدول، وقد أوردنا هذه الأرقام أخذاً من اليسار إلى اليمين...»(٧٩).

هذا التصريح للكاشي، كما نرى يطرح على المؤرخ مسألة هي: توضيح ما أكد الكاشي أنه كشف النقاب عنه. ومنذ لوكي (Luckey)(٨٠)، اتفق على اعتبار الكسور العشرية نفسها غرضاً لهذا الكشف. ومن جهة أخرى فإن معرفة «بحث» السؤال جعلت القراءة الموضوعية لما كتبه الكاشي ممكنة الآن: إذ يبدو في الواقع أن الكاشي لا يقصد هنا الكسور العشرية بل التمثيل العشري لـ 2π على وجه الدقة. أما بقية هذا المقطع فترتبط بشكل قريب بهذا التمثيل دون الإقتراب ولو قليلاً من صياغة أكثر عمومية. وأخيراً فالطابع التلميحي للنص يؤكد لنا أنه بالنسبة إلى الكاشي فقد كان يقصد هنا تطبيق ما كان مكتسباً سابقاً.

---

(٧٨) نقرأ في النص: «حساب الكواكب»، «Calcul des astres»، من المحتمل أن يكون الخطأ بسبب الناسخ. فالتعبير المكرس لذلك هو حساب المنجمين.

(٧٩) المصدر نفسه، ص ٨٧.

(٨٠) انظر: Luckey, *Die Rechenkunst bei Ǧamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī,* p.103,

حيث كتب: «Während also K. die ganzen wie die gebrochenen Sechzigerzahlen von Vorgängern übernahm, schreibt er sich wiederholt ausdrücklich die Einführung der Dezimalbrüche zu. Meines Wissens fand man bisher zwar in keinem älteren arabischen Texte, wohl aber in Schriften, die arabisches Gut wiedergeben oder auf solchem fussen, den Gedanken ausgesprochen, daβ an die Stelle der Grundzahl 60 der Sexagesimalbrüche eine andere Grundzahl treten könne, als welche im (Algorismus de minutiis) von Seitenstetten aus dem 14. Jahrhundert neben 12 auch 10 genannt sein soll. Auf das, was Immanuel Bonfils aus Tarascon über Dezimalbrüche sagt, soll später eingegagen werden. Der Gedanke der Dezimalbrüche mag also in Mittelalter in der Luft gelegen haben. Wie andere vor und nach ihm, so kann auch K. sehr wohl selbständig den Einfall gehabt haben, nach dem Vorbild der Sechzigerbrüche Dezimalbrüche einzuführen. Jedenfalls aber hat man bisher in keiner vor seine Zeit fallenden Schrift eine ausführliche praktische Durchführung der Methode der Dezimalbrüche im Positionsystem, wie er eine solche bringt, nachgewiesen».

انظر أيضاً: Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter,* p.241.

لكن عدا عن مسألة الإسناد هذه التي سويت بشكل نهائي على أية حال، وفيما يختص برياضيّي القرنين الثالث عشر والرابع عشر على الأقل، فإن النص السابق يترك مجالاً لظهور فكرتين كانتا غائبتين عن البحث (١١٧٢)، وبالتالي لهما أهمية كبرى بالنسبة إلى تاريخ عرض الكسور العشرية.

(١) التماثل بين نظامي الكسور: الستيني والعشري.

(٢) استعمال الكسور العشرية لا في تقريب الأعداد الجبرية الحقيقية فقط، بل بالنسبة إلى الأعداد الحقيقية أيضاً مثل π.

إذا أردنا تعميق المحتوى وتقدير مدى توسع هاتين الفكرتين الجديدتين، فليس بمقدور البحث في محيط الدائرة أن يكون ذا فائدة كبيرة. إنه يبدو كرسالة للبحث خالية من أية دعوة تعليمية إذا صح التعبير. أما مع مفتاح الحساب، وهو في مرحلة لاحقة، فنحن تجاه عمل ذي دعوة وأسلوب مختلفين، إنه مجموع من الحساب والجبر ينيرنا أكثر بكثير، فلا يقتصر على شرح استعمال الكسور العشرية الذي قام به في البحث في محيط الدائرة فقط، بل يتعداه إلى استعادة العرض بشكل عام. فهو يكتب[٨١]: «ولنقدم هذا لما استخرجنا نسبة المحيط إلى القطر في رسالتنا المسماة بالمحيطية، وبلغنا الكسور إلى التاسعة، أردنا أن نحولها إلى الرقوم الهندية لئلا يعجز المحاسب الذي لم يعرف حساب المنجمين». الحافز واضح إذن: فالمقصود تقديم نظام كسور آخر أكثر طواعية وأسهل منالاً بشكل عام ويكون ممكناً بواسطته حل العمليات نفسها المستخدمة في النظام الستيني. من حينها ثبّت الكاشي التماثل بين النظامين إن على مستوى العمليات أم على مستوى المفاهيم. التماثل مؤكد منذ بداية الوضع الرياضي: فمعروف سابقاً منذ السموأل أن الكتابة نفسها لكلا النظامين ليست سوى اقتصار على أساسين معطيين لكتابة صالحة لأي أساس كان. يفهم إذن إصرار الكاشي على التشديد عندما يكتب:

«المنجمون استعملوا كسوراً معطوفة على أن مخارجها المتوالية هي ستون، ومضلعاتها المتوالية إلى حيث شاءوا، وتركوا ما بعدها [60^{-k} حيث k مطلق عدد ثابت] ويسمونها على التوالي بالدقائق والثواني والثوالث والروابع، وقس عليه.

ونحن أوردنا على قياس المنجمين كسوراً يكون مخارجها المتوالية عشرة، ومضلعاتها المتوالية إلى حيث شئنا، وتسمى على التوالي بالأعشار، وثاني الأعشار وثالث الأعشار ورابعها وهلم جرا»[٨٢].

---

(٨١) الكاشي، مفتاح الحساب، ص ١٢١.
(٨٢) المصدر نفسه، ص ٧٩.

يشدّد الكاشي من جديد على أهمية هذه المماثلة لكي يرجع إلى ما يدعمها: ففي النظام الستيني نرفع المراتب بمقدار الستين ومرتبة الدرجات هي المتوسطة بين متتاليتين واحدة «متزايدة» وأخرى «متناقصة». والتمثيل مشابه في النظام العشري شرط استبدال الستين بالعشرة والدرجات بالآحاد علماً بأن الكاشي كان قد عرض الفكرة نفسها لأي أساس a.

إن كلاماً كهذا يبدو من الطبيعة نفسها لكلام السموأل مع فارق هو أن المماثلة عند السموأل ليست حاضرة إلاّ بشكل ضمني، بينما يصوغها الكاشي بوضوح، ويكفي أن نقرأ العرض الذي يعطيه السموأل للكسور الستينية ومواجهته بآخر عن الكسور العشرية لكي نستنتج دون أية مبالغة، أن هذه المماثلة لم تكن في مجال إدراكه فقط بل انها استطاعت دون أدنى ريب أن تلعب دوراً تاريخياً لا يمكن إغفاله. لكن تاريخ العلوم ليس تحليلاً نفسياً للعلماء، لذا علينا تفسير هذا الفعل المهم من قبل الرياضي الذي يعرض بوضوح ما كان حاضراً سابقاً في عرض ما، لكنه مدفون بين طيّاته. يبدو إذن أن فعلاً كهذا لا ينفصل عن استقلالية نظام الكسور الجديد، ويعود إلى استقلاليته كنظام ضمن غيره من الأنظمة معادل لها، وبصورة خاصة للنظام الستيني. بإمكاننا إذن أن نؤكد أن نصّ هذه المماثلة يعني إدراك إمكاناتها على التوسيع. وفي الحقيقة فإن مستوى فهم الكسور العشرية، في حالة السموأل كما في حالة الكاشي، هو نفسه لكن هذه الكسور لا توجد على صعيد الوجود نفسه تماماً. إن ما تؤكده المماثلة بالنسبة إلى الكسور العشرية هو وجود يتخطى هذه المرة الحدود الخاصة بمجالها الأساسي في الممارسة، أي المجال الخاص بتقريب الأعداد الحقيقية الجبرية.

إذا ما أدركنا بهذا الشكل استقلالية هذا النظام الجديد للكسور، نصبح بمستوى إيضاح بعض الوقائع التي تستعصي على الفهم بغير هذا الإدراك. وقد لاحظ المؤرخون مسألة أولى هي:

إن المرور من نظام إلى آخر أي تغيير الأسس(٨٣)، قد أخذ في الحسبان بشكل

---

(٨٣) Luckey, *Die Rechenkunst bei Ǧamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī*, p.115 sq.
اضافة إلى ذلك، لنلاحظ أن مسألة دوريّة (Périodicité) الكسر يمكن لها أن تظهر أثناء حل هذه المسألة. نعرف أنه بالامكان دائماً كتابة كسرٍ عشري بواسطة كسرٍ ستينيٍّ بالضبط، ولكن ليس بالإمكان دائماً كتابة عدد ستيني بواسطة كسر عشريّ منتهٍ. في الترجمة الفرنسية للقسم المتعلق بتاريخ الرياضيات العربية كتب يوشكافيتش (Youschkevitsch): «ولنشر إلى أن الكاشي لم يذكر، بل أنه لم=

واضح ولذاته. أمّا الثانية فتعود إلى مهمة عديمة الجدوى تعهدها الكاشي ولطالما حيرت المؤرخين هي: لماذا صاغ من جديد وبرّر في الحالة الخاصة للكسور العشرية ما سبق أن صاغه وبرره لأي أساس كان؟ أما الثالثة فقد بقيت غير ملاحظة من قبل المؤرخين وهي تتعلق باستعمال الكسور العشرية ليس فقط من أجل تقريب الأعداد الجبرية الحقيقية بل أيضاً لتقريب الأعداد الحقيقية. وكما لاحظنا سابقاً بالنسبة إلى العدد π، فقد أجرى الكاشي في كتابه مفتاح الحساب حسابات مشابهة على قياس المساحات: المضلعات والدوائر ومقاطع الدائرة... الخ. وفي حساباته هذه كان يلجأ إلى تدوين مشابه بجوهره لتدوين السموأل.

إن الكاشي وريث مدرسة الكرجي، لا يمكن اعتباره بعد الآن مبتكر الكسور العشرية، يبقى مع ذلك، أن هذا الرياضي، بعيداً عن أن يكون مجرد مجمِّع، قد قطع في عرضه شوطاً يفصله عن السموأل، ويشكّل بعداً مهماً في تاريخ الكسور العشرية. وسواء أكان هذا التقدم أم لم يكن من فعل الكاشي فإن جهلنا بالحقبة التي تفصل بينهما، يحثنا على ترك هذا السؤال معلقاً آنياً، ومهما يكن من أمر فإن هذا التقليد استطاع المحافظة على بقائه في عمل الكاشي، ومن المحتمل جداً أنه انتقل إلى الأجيال اللاحقة بواسطته.

هذا الإرث ليس للإثبات فيما يخص العلوم العربية: فنحن نعرف أن عمل الكاشي قُرِىء وذكر من قبل الرياضيين. فإن سوتر (H. Suter) مثلاً نوّه سابقاً بأن تقي الدين بن معروف (المتوفى عام ١٥٨٥ ـ ١٥٨٦) أجرى حساب الجداول العشرية

= يلاحظ الدوريّة البديهية للكسر 0, 1 4 1 الذي حصل عليه (592)».

وفي ملاحظة على الترجمة الفرنسية، ص ١٦٩، يذكر كارّا دوفو (Carra De Vaux): أن دورية الكسر الستيني قد دُلّ عليها من قبل الماردينى رياضي القرن الخامس عشر. انظر:

M. Youschkevitsch, *Les Mathématiques arabes VIIIème-XVème siècles,* traduction par M. Cazenave et k. Jaouich (Paris: Vrin, 1976).

في الوقت الحاضر نستطيع أن نبرهن أن دورية الكسر الستيني قد سبق الاعتراف بها في القرن الثاني عشر. لتحويل كسرٍ ـ ليكن $\frac{4}{11}$ ـ إلى كسر ستينيّ حصل السموأل على .21, 49, 5, 27, 16؛ وكتب على أثره: «وهكذا فإن هذه الأشكال الخمسة تتكرر إلى ما لانهاية. فإذا اكتفينا بعشر العشر [60^{-20}] مثلاً اقتصرنا على الجواب:

21, 49, 5, 27, 16, 21, 49, 5, 27, 16, 21, 49, 5, 27, 16, 21, 49, 5, 27, 16,

وإذا أردناه [العدد] أكثر دقة من هذا، كرّرنا دائماً الأشكال الخمسة لـ[مرتبة] أبعد من هذه المراتب. الفصل ٨٩، هذه الحسابات تبين على الأقل أن مسألة الدورية كانت قد عرفت في القرن الثاني عشر».

لجيب وظل الزوايا[٨٤]. نذكر هنا أنه حتى القرن السابع عشر ذكر رياضيون أمثال اليزدي (المتوفى عام ١٦٣٧ تقريباً) كتاب مفتاح الحساب والكسور العشرية كما كانت معروضة من قبل الكاشي. ومن المهم على أي حال ملاحظة أن اليزدي، رغم إلمامه بهذه الكسور، لجأ متعمداً في حساباته، كما في فصوله النظرية المكرّسة للكسور، إلى الكسور العادية والكسور الستينية[٨٥].

ونفهم لماذا أصبح الوضع أكثر تعقيداً ما ان عولج العلم في الغرب. إذ كان منطقياً بالفعل الافتراض أن الرياضيين كانوا يعرفون بطريقة أو بأخرى نتائج العلماء العرب، ولكن كان ينقص تقديم الإثبات الحاسم بأن هذه المعرفة تشمل الكسور العشرية. إن الإكتشاف الحديث لِـ هنجر (H. Hunger) وَ فوجل (K. Vogel) ـ عام ١٩٦٣ ـ لمخطوطة بيزنطية كانت قد أُحضرت إلى ڤيينا عام ١٥٦٢ وفّر لنا عنصراً مهماً من عناصر هذا الإثبات. وفيما يلي ما كتبه المؤلف البيزنطي[٨٦]: «يُجري الأتراك الضرب والقسمة على الكسور وفقاً لطريقة خاصة من الحساب (δi'ε^cvO'ζ λoγαpiασμõ ν). فقد أدخلوا كسورهم عندما حكموا بلادنا». المثل الذي أعطاه الرياضي البيزنطي يسمح دون تردد بمطابقة هذا التلميح بالكسور العشرية[٨٧]. وسنتتبع

---

(٨٤) Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke,* p.191.

(٨٥) مخطوطات «هازينازي (١٩٩٣)، استانبول». انظر بخاصة، ص ٤٩ (وجه الورقة).

(٨٦) Herbert Hunger and Kurt Vogel, *Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15 Jahrhundert* (Wien: H. Böhlaus Nachf, Kommissionverlag des Ostereichischen Akademie der Wissenschaften (1963), p.32, problème 36.

(٨٧) المصدر نفسه. المثل المعطى عن هذه الكسور هو التالي: أحسب سعر $153\frac{1}{2}$ وحدة من الملح إذا كان سعر كلٍ منها هو $\frac{1}{4}$ 16 أسبرا (aspra). أي أحسب: $16\frac{1}{4}$ ·$153\frac{1}{2}$. يقول المؤلف أن الأتراك يضعون 5 مكان النصف ويضعون 25 مكان الربع. وهكذا نحصل على 2 4 9 4 3 7 5 فنفصل الأرقام الثلاثة الأخيرة عنها والموجودة في المنزلات الثلاث الأخيرة (ψηØτα'). ويُجرى الحساب كما يلي:

α ε γ | ε		153|5
α ϛ | β | ε		16|25 $\frac{3}{8}$
ξ ϛ ξ ε	$\frac{\gamma}{\eta}$	76 75
γ · ξ	τα̃ buταεi'στν	307 0
θ β α ·	هذا يعني	9210
α ε γ ε		1535
= β δ θ δ | γ ξ ε		2494|3 75

على أية حال في هذا المجال، استنتاجات هنجر و فوجل اللذين هما على معرفة أفضل بالنص الذي يشرحانه هكذا(٨٨):

«إن اكتشاف الكاشي العظيم القاضي باعتماد (سلسلة التزايد والتناقص) المتعلقة بالنظام الموضعي العشري يظهر في الضرب للمرة الأولى عند التدقيق في المخطوطة. وعلى الرغم من وجود محاولات سابقة فشل الهنود في تحقيقها للتوصل الى نظام خاص بالكسور العشرية، فإن الكاشي كان أول من اعتمد هذا النظام فعلياً في الحساب. وكانت بداية هذه المعرفة الفارسية التركية في بيزنطة».

سوف نكتفي بتأكيد أن المؤلف البيزنطي يعيد إنتاج جزء من المعرفة العربية خلال القرن الخامس عشر تحت شكل أقل إعداداً. من المحتمل على أية حال أنه كان على معرفة بأعمال أحد لاحقي الكاشي. ويبقى رغم كل شيء أن استعمال الخط العمودي(٨٩) الذي يفصل الجزء الكسري - طريقة نجدها عند الكاشي - يوجد في النصوص الغربية السابقة لعام ١٥٦٢ وهو تاريخ وصول المخطوطة البيزنطية إلى فيينا، وبالفعل إنها الكتابة نفسها التي يلجأ إليها رودولف (Ch. Rudolf) وأبيان (Apian) وكردان (Cardan). ومن جهة أخرى نعرف أن الرياضي ميزراحي (المولود في القسطنطينية عام ١٤٥٥) استعمل الإشارة نفسها قبل رودولف في كتابه (Sefer ha-Mispar). كل هذه الدلائل تلزمنا بأن نتساءل ما إذا كانت نظرية الكسور العشرية قد نقلت الى الغرب قبل عام ١٥٦٢، وما إذا كان هذا الانتقال قد تميّز بضياع نسبي في المعلومات.

مهما يكن من أمر، يبقى أن الصياغات المختلفة لنظرية الكسور العشرية إضافة

= نلاحظ أنه قد أُشير للصفر (0U'δε'ν) بنقطة وأن الأحرف اليونانية تمثل الأرقام في الكتابة الموضعية وأن القسم الكسري قد فُصل بواسطة خط عمودي.

(٨٨) انظر: «Die von al-kāsî gemachte geniale Erfindung der Einführung einer (Kette des Aufsteigens und Absteigens) auch im dekadischen Positionssystem wird in der untersuchten Hand schrift wohl zum erstenmal im Abendland sichtbar. Wenn aush schon vor al-Kāsî Ansätze zu einer dezimalen Schreibung der Brüche, die den Indern nicht gelungen ist, vorliegen, so war dieser doch der erste, der wirklich auch mit den Dezimalbrüchen gerechnet hat, und diese persischtürkische Kenntnis hat in Byzanz Eingang gefunden,»

انظر: Hunger and Vogel, Ibid., p.104.

(٨٩) انظر مثلاً: Tropfke, *Geschichte der Elementar-mathematik in systematischer Darstellung*.

إلى الصياغات التي عرضناهـا، وكذلـك تلك التي نصادفهـا لاحقاً عنـد ڤيت وستيفن وكثـير غيرهمـا، تبقى نسبياً بعيـدة عن ممارسـة الريـاضيين. وكـان يجب انتظار إعـداد الـدوال اللوغاريتميـة لدى نـابيه (Napier) خـاصة حتى تتمكن الكسـور العشرية من الانضمام فعلياً إلى الوثائق الرياضية المطبقة.

خلاصـــة

خلال القرنين الحادي عشر والثاني عشر انبثقت تقاريـر وطرق ونـظريات دامت مدة قرنين ونصف القرن على الأقل، وكـانت في الواقـع قد نُـظمت وتماسكت في تلك الحقبة. ولقد سبق أن برهنّا أن التقارير الخاصة بـالأعداد الجـبرية الحقيقيـة، وطريقـة روفيني ـ هـورنر وطـرق التقريب وبصـورة خاصـة الطريقـة التي يشير اليهـا ويتسايـد (D.T. Whitside) تحت عنـوان «الكاشي ـ نيـوتن» ونظريـة الكسور العشريـة، كانت جميعهـا في الواقـع من عمل ريـاضيي القـرنـين الحـادي عشر والثـاني عشر. إلى هـذه المجمـوعة من المسـائل والـطرق المدروسـة في الحقبة نفسهـا تضـاف نـظريـة الكسـور العشرية فتبدو للمؤرخ تحت أفق جديد إذ بات يدرك بصورة أفضل أسبـاب ابتكارهـا ويتضح له جزئياً عـلى الأقل سبب تنحّيهـا جانبـاً وغيابهـا النسبي حتى توسيـع الدالـة اللوغاريتمية. يثبت هذا التحليل أن بحث السـابقين هـو غير مـدعوم تـاريخياً، وغـير مفسّر نظرياً كما رأينا بالنسبة إلى الإقليدسي. وسوف نحيـل إلى دراسة لاحقـة سؤالين لهما أهمية خاصة هما:

(١) هـل أعطى الجـبريون تعبيـراً جبريـاً للطريقة التي كـانت مـوجـودة عنـد الفلكيين؟

(٢) ما مدى مسـاهمتهم في تاريـخ التحليل (Analyse) أو في مـا قبل تـاريخ التحليل؟

لا بـد من القول أخيـراً، انه خـلال القرنـين الحادي عشر والثـاني عشر تشكل تقليد رياضي نشيط، ولقد أشرنا بهذا الشأن، إلى حالة تبيانية: هي مدرسة الكرجي. هـذا الإسم يشير إلى مشروع مصـاغ بواسـطة الكرجي ومتـابع من قبـل لاحقيـه هـو حسبنة الجبر، أو كما كان يقـال وقتئذ، تشكيـل الجبر وكـأنه «حسـاب للمجهولات»، وهذا يستدعي الشروع بالأبحاث التـاريخية كي يصـار إلى علاج التشـوشات الـظاهرة والجهل الواضح. إننا نعرف، مثلاً، من الآن فصاعداً أن الوضع الذي ينسبه التأريخ

التقليدي إلى الكاشي، ليس له في الحقيقة. فالكاشي، متمتعاً حتى الآن بخصوصية استقلالية مفتعلة، ومعزولاً عن التقليد الرياضي بإزاحة نسجت حوله الكثير من الأساطير، يستعيد تلقائياً المكان الذي ما انفك أن يكون مكانه، ليندرج دون تحفظ في صلب مدرسة الكرجي. يجب إذن أن تصوّب أو بالأحرى تقلب رأساً على عقب صورة الجبر العربي الذي ينكشف من خلال التأريخ التقليدي، إن مشروعاً كهذا يعدل جوهرياً الرؤية المألوفة لبدايات الجبر العربية وانتقالها إلى الرياضيين الغربيين خلال القرون الوسطى وعصر النهضة. إن جوهر هذه المهمة ليس في إيجاد نصوص ضائعة وتقديم أعمال منسيّة وإثبات الوقائع وحدها، إنما بالتزود، قبل كل شيء، بمعطيات ضرورية لهذا البحث. وفي الحقيقة فإن المواد غزيرة ومشتتة، والدراسات نادرة لدرجة أن أي تأريخ حتى لو كان وضعياً فقط، يبقى محفوفاً بالمخاطر إذا لم يكن موجهاً بشكل نظري. لقد آن الأوان لكي نذكر الإتجاهات النظرية التي قادت وألهمت رياضيي القرنين الحادي عشر والثاني عشر إلى اكتشافاتهم.

إن أعمال مدرسة الكرجي حول العبارات الخاصة بكثيرات الحدود، كما رأينا، مهدت السبل إلى بحث جديد مرتبط بالتوسيع الحاصل آنفاً للحساب الجبري كي يستطيع هذا الحساب إيجاد التطبيقات المثمرة في مجال غير مجال الجبر. هذا الحقل الجديد للممارسة الخاصة بالحساب الجبري كان موجوداً من قبل، ولكن بشكل جزئي فقط، أي محصوراً بالحسابيين السابقين لمدرسة الكرجي. فقد كان هؤلاء بالفعل يستخرجون الجذور التربيعية والتكعيبية ويمتلكون صياغات التقريب للقوى نفسها، لكن الإفتقار إلى حساب جبري مجرد لم يسمح لهؤلاء الحسابيين بتعميم طرقهم وخوارزمياتهم. كان يجب إذن انتظار تجديد الجبر بواسطة مدرسة الكرجي كي يتاح لتعميم الحساب الجبري أن يشكل فصلاً من التحليل العددي الذي يحتوي على طرق خاصة بحل «القوى البحتة» حسب العبارة المستعملة في القرن الحادي عشر اضافة إلى طرق أخرى متنوعة من أجل تقريب الجذور الموجبة. صحيح أن الجبريين ـ الحسابيين قد أدخلوا في ذلك الوقت هذه الطرق دون اهتمام بالدقة ودون أي تفسير نظري، فكان يجب انتظار تقليد آخر للجبر، أي تقليد الجبريين ـ المهندسين مثل الطوسي كي تبصر النور أولى صياغات المسائل النظرية وبصورة خاصة مسألة وجود الجذور. هذا الاتجاه التطبيقي للجبريين ـ الحسابيين ظل موجوداً حتى القرن السابع عشر وكان يشكل جزءاً من مشروعهم نفسه: استخدام النتائج الحاصلة بواسطة الجبر كي تستعاد وتوسّع مجموعة مسائل كانت قد عولجت سابقاً من قِبل الحسابيين. لقد أجروا إذن

حركة رجوع إلى الحساب كي يعثروا من جديد في بعض فصوله على الإمتداد المطبق على الجبر الذي أصبح هو نفسه مجدّداً بالحساب. وخلال هذه الحركة المزدوجة، أو الجدلية إذا صح التعبير، التي تمت بين الجبر والحساب، بحث الرياضيون عن طرق جديدة أرادوها تكرارية وقابلة لأن تقود بطريقة الإعادة الى التقريبات. بهذا الهدف المؤكّد بشكل واضح، نستطيع إتمام هذا المظهر النظري والتطبيقي حيث يقع ابتكار الكسور العشرية.

ملحق

السموأل: القوامي في الحساب الهندي

١١٠ - ب

الباب الخامس عشر من المقالة الخامسة

في وجود مخرج الكسور البالغة لصحاح المضلعات الصم(*)

إذا استخرجت ضلع مربع أو مكعب أو غير ذلك من المراتب وعلمت صحاح الضلع أعني ضلع أقرب مكعب أو مال أو غير ذلك من المضلعات <أو> [من] المطلوب ضلعه وبقيت منه بقية دالة على صمم ضلعه وأردت أن تستخرج من تلك البقية الكسور البالغة لتلك الصحاح أخذت أعداد القانون لذلك المضلع وضربت كل واحد منها في العدد الذي يرسمه وجمعت المبلغ وزدت جملته واحداً أبداً فما اجتمع فهو مخرج الأجزاء الباقية.

مثال ذلك: انا أخذنا جذر ٦٠ فالقينا منه أقرب المجذورات اليه وهو ٤٩ فبقي/ ١١، ووجدنا ١١١ - أ
قانون المال ٢ فضربناه في الجذر الحاصل وهو ٧ فخرج ١٤ زدنا عليه واحداً فبلغ ١٥ نسبنا منه ١١ الباقية فكان ١١ جزءاً من ١٥ فصار الجذر الحاصل ٧ و ١١ جزءاً من ١٥.

وأيضاً استخرجنا ضلع مكعب هو <هو> ١٠ فخرج ٢ وهو صحاح الضلع وبقي ٢ ووجدنا أعداد سطر قانون الكعب ٣ ٣ فضربنا أولها في صحاح الضلع والثاني في مربع صحاح الضلع وزدنا

(*) النص غير منقوط في مواضع جمة وقد قمنا بتنقيطه دون الاشارة إلى ذلك، وعلامة الصفر في النص هي ٥، ولقد بدلناها بنقطة حتى لا تلتبس مع الخمسة واستثنينا من ذلك جدول القوى العشرية. واستعملنا الرموز التالية في التحقيق: [ ] ما بينهما كلامنا، < > نقترح حذف ما بينهما.

(٣) مربع: مربعات.

(٧) يرسمه: مطموسة في النص ولكن مكررة في الهامش، جملته: حله.

(١٠) ووجدنا: غير واضحة في الأصل.

على المبلغ واحداً [فصار] <ضلع> ١٩ وهو مخرج الأجزاء الباقية نسبنا منه البقية التي بقيت وهي ٢ فصار الضلع الحاصل ٢ و ٢ من ١٩.

وأيضاً استخرجنا ضلع مال مال هو ٤٠ فخرج ٢ وبقي ٢٤ ووجدنا أعداد قانون مال مال ٤ ٦ ٤، فضربنا الأول في صحاح الضلع وذلك اثنان والثاني في مربعه أعني مربع ضلع الاثنين والثالث في مكعبه أعني مكعب الاثنين الذي هو صحاح الضلع وزدنا على المبلغ واحداً فبلغ ٦٥ وهو مخرج الأجزاء الباقية، فصار الضلع اثنين و ٢٤ جزءاً من ٦٥. وأيضاً استخرجنا ضلع مال كعب مبلغه/ ٢٥٠ فخرج ٣ وبقي ٧ ووجدنا أعداد قانون مال كعب ٥ ١٠ ١٠ ٥ فضربنا الثلاثة أعني ١١١-ب
صحاح الضلع في الأول ومربع الثلاثة في الثاني ومكعب الثلاثة في الثالث ومال مال الثلاثة في الرابع وزدنا على المبلغ واحداً فاجتمع ٧٨١ وهو مخرج الأجزاء الباقية فصار الضلع ثلاثة آحاد وسبعة أجزاء من ٧٨١ وهو الضلع المطلوب. وعلى هذا القياس.

الباب السادس عشر من المقالة الخامسة

في وضع أصل واحد تحدد به جميع أعمال التفريق التي هي القسمة والتجذير والتضليع لجميع هذه المراتب وتصحيح الكسور الواقعة في هذه الأعمال بغير نهاية

كما أن المراتب المتناسبة المبتدئة من مرتبة الآحاد تتوالى على نسبة العشر بغير نهاية كذلك نتوهم في الجهة الأخرى مراتب الأجزاء على تلك النسبة ومرتبة الآحاد كالواسطة بين مراتب العدد الصحاح التي تتضاعف آحادها على نسبة العشر وأمثاله بغير نهاية وبين مراتب الأجزاء المتجزئة بغير نهاية. /ونسمي المرتبة التالية لمرتبة الآحاد مرتبة أجزاء العشرات والتالية لها أجزاء المئات والتالية لها أجزاء ١١٢-أ
الألوف وعلى هذا القياس.

وإذا انتهينا في حساب القسمة أو التجذير أو تضليع الكعب أو مال المال أو غير ذلك من أبواب التفريق إلى مرتبة الآحاد لم نقطع الحساب عندها لكنا ننقل السطور التي يجب نقلها على الرسم الى تحت مرتبة أجزاء العشرات، وما حصل في هذه المرتبة فهو أجزاء من ١٠. واذا أتينا على شروط الحساب نقلنا الى تحت مرتبة أجزاء المئات فما خرج في هذه المرتبة فهو أجزاء من مائة وهذه صورة المراتب المشار اليها.

---

(٥) ٢٤: ٢٤

(١٠) الثلاثة: الثلثة ـ كما في الكتابة القديمة ـ سنكتبها هكذا في بقية النص دون اشارة.

(١١) في: و

(١٢) ثلاثة: مطموسة في الأصل.

(٨) وأمثاله: وأمثال.

(١٢) ننقل: مطموسة في الأصل.

٥	٥	مرتبة الآحاد
	٥	مرتبة العشرات
	٥	مرتبة المئات
١	٥	مرتبة الألوف
	٥	مرتبة عشرات الألوف
	٥	مرتبة مئات الألوف
٢	٥	مرتبة ألوف الألوف
	٥	مرتبة عشرات ألوف الألوف
	٥	مرتبة مئات ألوف الألوف
٣	٥	مرتبة ألوف ألوف الألوف
	٥	مرتبة عشرات ألوف ألوف الألوف
	٥	مرتبة مئات ألوف ألوف الألوف
٤	٥	مرتبة ألوف ألوف ألوف الألوف

	٥	أجزاء عشرات ألوف ألوف ألوف ألوف
٤	٥	أجزاء ألوف ألوف ألوف ألوف
	٥	أجزاء مئات ألوف ألوف ألوف
	٥	أجزاء عشرات ألوف ألوف ألوف
٣	٥	أجزاء ألوف ألوف ألوف
	٥	أجزاء مئات ألوف ألوف
	٥	أجزاء عشرات ألوف ألوف
٢	٥	أجزاء ألوف ألوف
	٥	أجزاء مئات ألوف
	٥	أجزاء عشرات ألوف
١	٥	أجزاء ألوف
	٥	أجزاء المئات
	٥	أجزاء العشرات

فإذا قسمنا ٢١٠ على ١٣ وخرج من القسمة ١٦ وبقي ٢ كتبنا ذلك في هذه الصورة:

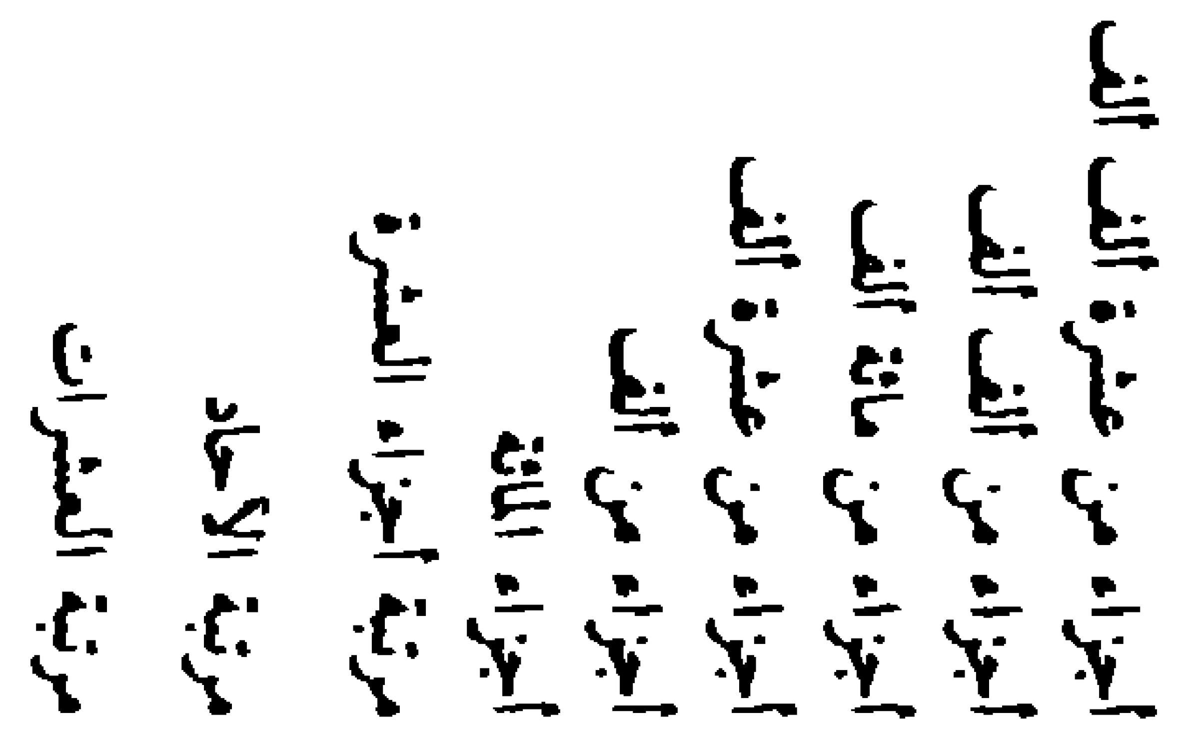
١٦
٢ . . . .
١٣

ثم فلننقل المقسوم عليه مرتبة الى اليمين ونتمم العمل كما بينا في القسمة إلى أن يخرج مهما شئنا من المراتب. فإذا اقتصرنا على خمس مراتب حصل ما هذه صورته:

أجزاء من مائة ألف	٤	خمس خمس عشر عشر عشر
أجزاء من عشرة آلاف	٨	خمس خمس عشر عشر
أجزاء من ألف	٣	خمس عشر عشر وعشر عشر عشر
أجزاء من مائة	٥	نصف عشر
أجزاء من عشرة	١	عشر
	١٦	صحاح

وذلك ستة عشر أحداً وجزء من عشر وخمسة أجزاء/ من مائة وثلاثة أجزاء من ألف وثمانية أجزاء من عشرة آلاف وأربعة أجزاء من مائة ألف. وذلك ستة عشر وعشر ونصف عشر وخمس عشر عشر وعشر عشر عشر وخمس خمس عشر عشر وخمس خمس عشر عشر عشر.

فإذا أردنا جذر عشرة خرج ٣ ونضعف الجذر الاسفل وننقله مرتبة فيحصل ما هذه صورته:



. . . . ٣
[١] [٠] . . . .
. . . . ١

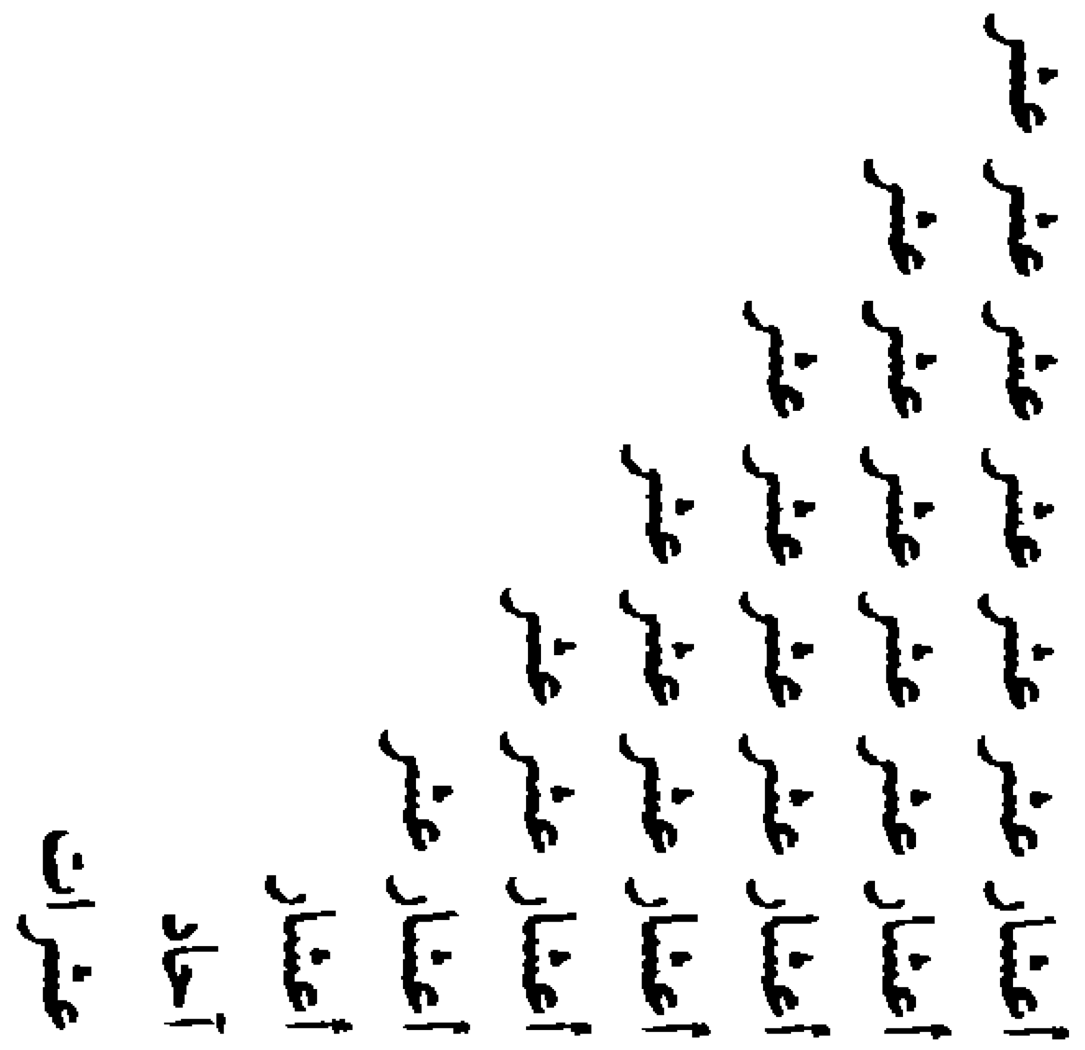
---

(٨) العلامة التي تحت مرتبة الآحاد هي في الأصل هكذا.

(١٣) فلننقل: فنقسم.

(٢١) ٣ : ١.

ثم نتمم العمل في التجذير والنقل كما نعمل في الصحاح فيحصل ما هذه صورته:



٣ ١ ٦ ٢ ٢ ٧ ٧

١١٣ - ب وذلك ثلاثة آحاد <وخمس> وعشر وثلاثة أخماس عشر <عشر> وخمس عشر عشر <عشر> وخمس عشر عشر عشر <عشر> ونصف عشر عشر عشر عشر <عشر> وخمس عشر عشر عشر عشر <عشر> ونصف عشر عشر عشر عشر عشر <عشر> وخمس عشر عشر عشر عشر عشر <عشر>.

وينبغي أن نعلم طريق نسبة هذه الأعداد الحاصلة في هذه المراتب فإنه من السهولة على غاية لا يحتاج معها إلى إعمال الفكر والقياس.

مثاله: انا أردنا أن ننسب هذه الستة لينطق بمقدارها فنسبناها الى العشرة التي بها تتناسب هذه المراتب فكان ذلك ثلاثة أخماس وأضفنا إلى ذلك لفظ العشر بعدد المراتب التي بين الستة وبين مرتبة الآحاد فصار ثلاثة أخماس عشر عشر، وعلى هذا القياس تتناسب سائر المراتب.

وان أردنا أن تكون جميع الكسور الحاصلة أجزاء من مخرج واحد نقلنا مرتبة الآحاد مع ما يتلوها من العشرات والمئات وغير ذلك من الصحاح الى سطر/ أعلى وكتبنا تحت المراتب الباقية أصفاراً وكتبنا بعد الاصفار واحداً، فيكون الحاصل هكذا وذلك ثلاثة آحاد و١٦٢٢٧٧<٣> جزءاً ١١٤ - أ
من <٠> ١

<١> [١] ٢

---

(٥) الفكر: الفلزة.

(١١) مع ما: معها.

(١٢) وكتبنا: مطموسة، وكتبنا: مطموسة.

(٥) في الأصل هناك صفر تحت الثلاثة وواحد بعدها.

(٦) تجذير: تحرر.

٣
<٣>١٦٢٢٧٧
١٠٠٠٠٠٠

وهكذا نعمل في تجذير ضلع الكعب ومال مال ومال كعب وغير ذلك. ويمكننا بهذا الطريق استقصاء تدقيق أعمال التفريق وأن نستخرج به جوابات لانهاية لعددها كل واحد منها أدق وأقرب إلى الحقيقة من الذي قبله.

الفَصْلُ الثَّالِث

المُعَادَلات العَدَدِيَّة

حل المعادلات العددية والجبر
شرف الدين الطوسي، ڤيت[1]

- ١ -

في البدء كان ڤيت (Viète). أمّا هاريوت (Th. Harriot)، و اوغتريد (W. Oughtred) و دوشال (C.F. Dechales)، وبيل (Pell) . . . فبصورة أو بأخرى، حسّنوا الطريقة[2]. وتناولها نيوتن (Newton)[3] بعد ذلك. وعُدّلت بواسطة رافسون

---

(١) *Archive for History of Exact Sciences*, vol.12, no.3 (1974), pp.244-290.

(٢) Th. Harriot, *Artis analyticae praxis* (1631), pp.117-180; P. Herigone, *Cursus mathematicus* (1634), vol.2, p.266 sq; W. Oughtred, *De Aequationem affectarum resolutione in numeris* (1652), pp.121-196; C.F. Dechales, *Cursus seu mundus mathematicus* (1647), 2nd ed. (1690), pp.646-652; J. Prestet, *Nouveaux éléments des mathématiques* (1689), vol.2, pp.432-440, and Jennifer Seberry Wallis, *Algebra* (1693), pp.113-117.

(٣) في رسالته الشهيرة بتاريخ ٢٦ حزيران/يونيو ١٦٧٦، كتب نيوتن:

«Extractiones in numeris, sed methodus Vietae et Oughtredi nostri huic negotio minus idonea est, quapropter aliam excogitare adactus sum...».

ويعرض نيوتن طريقته في رسالته بتاريخ ٢٦ تموز/يوليو ١٦٧٧، انظر:

C.I. Gerhardt, *Der Briefwechsel Von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern* (Hildesheim: [n.pb.], 1962), pp.179-192.

انظر أيضاً رسالته إلى كولنز (Collins) بتاريخ ٢٠ حزيران/يونيو ١٦٧٤، في:

Herbert Western Turnbull, *The Correspondence of Isaac Newton* (Cambridge, [Eng.]: Royal Society at the University Press, 1959), pp.309-310.

ويحيل تورنبيل المراجع إلى رسائل أخرى حيث نجد المسألة نفسها. ونعرف ان الطريقة موجودة، في: =

(J. Raphson) ومـا زالت تعرض حتى يـومنـا هـذا في كتب الحسـاب العـددي تحـت اسم نيـوتن فـقط. وسـعى كـل مـن لاغـرانـج (Lagrange) وَ مـواريَ (J. R. Mouraille) وَ فـورييه (Fourrier)[٤] إلى معـالجة صعـوبـاتهـا. ووسّـع روفيني (Ruffini) (١٨١٣) و هورنر (Horner)[٥] (١٨١٩) بشكل مستقل الأبحـاث الخاصـة بڤيت ونيوتن، وقد اقترحا خوارزمية أكثر عملية لاستخراج جذر معادلة عددية من أيـة درجةٍ كانت.

هـذه هي الصورة المحفـوظة لإعـادة رسم تاريـخ هذه الـطريقـة. إن مؤرخـين للريـاضيـات أمثـال مـونتـوكـلا (Montucla) وهنكـل (Hankel) وكـانتـور (Cantor) و وايليتنـر (Wieleitner) و كـاجـوري (Cajori) و ترويفـك (Tropfke). . . اعـترفـوا جميعهم بأسبقية ڤيت، وعرضوا تعديل نيوتن، واستطاع البعض منهم وصف التحسين الذي أدخله لاحقاً روفيني وهورنر. ومنذ بداية القرن التـاسع عشر اعتمـدت الصورة نفسها من قبل لاغرانج، فقد كتب في بحثه عن المعـادلات العدديـة لجميع الـدرجات (١٧٠٩):

«إن ڤيت هـو أول من اهتم بحل المعـادلات من أية درجـة كانت. فقـد بيّن في بحثـه: (De numerosa potestatum adfictorum resolutione) كيف يمكن حلّ عدّة معادلات من هذا النـوع بعمليـات مماثلة لتلك التي تستخـدم في استخراج جـذور الأعداد. وقـد سعى هـاريـوت و اوغـتريـد

= De analysi per aequationes numero terminorum infinitas (1669).
واعطيت من جديد، في: *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1671).
ونشرت فقط عام ١٧٣٦. ونشر أول عرض لها في: Wallis, *Algebra*, pp.381-383.
انـظر أيضـاً: «L'Introduction,» dans: Buffon, *La Méthode des fluxions et des suites infinies* (1740); Florian Cajori, «Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation,» *American Mathematical Monthly*, vol.18 (1911), pp.29-30, and Derel Thomas Whiteside, *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (Cambridge, Mass.; London: University Press, 1964), vol.1, p.928 sq.

(٤) Lagrange, «Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés,» dans: *Oeuvres de Lagrange* (Paris: [s.pb.], 1878), p.159 sq; J.Mouraille, *Traité de la résolution des équations en générale* (Marseille: [s.pb], 1768), 1ère partie; J.Fourier, *Analyses des équations déterminées* (1830), et Florian Cajori, «Fourier's Improvement of the Newton-Raphson Method,» *Bibliotheca Mathematica*, vol.11 (1910-1911), pp.132-137.

(٥) W.G. Horner, «A New Method of Solving Numerical Equations of all Orders by Continuous Approximation,» in: *Phil. and Trans. Roy. Soc.* (London, 1819), Part 1, pp.308-335; David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw Hill, 1959); vol.1, pp.232-252, and Lagrange, Ibid., pp.16-17.

و بيل. . . إلخ إلى تسهيل تطبيق هذه الطريقة بإعطاء قواعد خاصة لإنقاص عدد تكرار التجريب حسب الحالات المختلفة، والتي تتم بحسب إشارات حدود المعادلات. لكن كثرة العمليات التي تتطلبها وعدم التيقن من نجاحها في عدد كبير من الحالات جعلته يتركها نهائياً». ويذهب لاغرانج أبعد من ذلك فيكتب: «وقد تبعت طريقة ڤيت طريقة نيوتن التي ليست في الحقيقة سوى طريقة للتقريب»(٦).

ليس من النادر أن نصادف هذه النبذة التاريخية مستعادة بعبارات مماثلة في تواريخ سابقة للرياضيات. فلم تكد تمر بضع سنوات، حتى كتب مونتوكلا: «من بين الإكتشافات التحليلية البحتة لڤيت علينا أن نصف أيضاً طريقته العامة في حلّ المعادلات التي تطول كافة درجاتها، إذ لم يتصدَّ أحد قبله لموضوع على هذه الدرجة من الاتساع. فمن تأمله في طبيعة المعادلات العادية، لاحظ ڤيت أنها ليست سوى قوى غير تامّة، وأدرك فكرة أنه بالطريقة نفسها التي تُستخرج بواسطتها جذور القوى غير التامة بالتقريب إلى أعداد، بالإمكان أيضاً استخراج جذر المعادلات، مما يعطينا واحدة من قيم المجهول. وبالنتيجة فقد اقترح قواعد لهذه الغاية في الجزء من مؤلفه المعنون: (De numerosa potestatum affect. resolutione) شبيهة بتلك التي تستخدم لاستخراج جذر القوة التامة ويمكن استخدامها بسهولة في المعادلات التكعيبية. ولقد استعمل هاريوت نصف كتابه (Artis Analyticae Praxis) لتوسيعها ونجدها مشروحة أيضاً عند اوغتريد و. واللّيس (Wallis) وفي جبر م. دولانّي (M. De Lagni). حتى أن واللّيس استخدمها في حلّ المعادلة من الدرجة الرابعة ودفع تقريبه حتى العُشْر الحادي عشر. لكن كان على المرء أن يتمتع بفكر قادر كفكر هذا المهندس كي يتعهد إجراء عملية شاقة إلى هذا الحد. أمّا الآن فلدينا طرق للتقريب أكثر ملاءمة. . .»(٧).

إذا كنا قد تمسكنا بإيراد هذه التسميات الطويلة فذلك لأنها تصف بدقة الجدول الإجمالي التاريخي والتحليلي للمسألة التي نحن بصددها انطلاقاً من ڤيت. سيجد كل من روفيني وهورنر فيما بعد مكانهما الحقيقي في الجدول المكمَّل. والكل سيتمثل في التاريخ النهائي لهذه المسألة إنْ في أعمال المؤرخين أم في الملاحظات التاريخية للرياضيّين مثل يونغ (Young) و بيرنسيد (Burnside) و ويتاكر (Whittaker) و روبنسون (Robinson) وغيرهم(٨).

---

(٦) Lagrange, Ibid., pp.16-17.

(٧) Jean Etienne Montucla, *Histoires des mathématiques*, 4 vols. (Paris: Blanchard, 1799), vol.1, pp.603-604.

(٨) انظر: William Burnside and A. Panton, *The Theory of Equations* (London: [n.pb.], 1912), vol.1, note B.

حيث كتبا: «The first attempt at a general solution by approximation of numerical equations was published in the year 1600 by Vieta. Cardan had previously applied =

بينما كانت هذه القصة تتكرر دون ملل حتى القرن التاسع عشر، جاءت في منتصف هذا القرن أبحاث كل من سيديللو (Séddilot) و ويبك (Woepcke)[9] لتنسف الثقة التي يمكن أن تنسب إليها. فبدراستها للمعلومات التمهيدية للفلكيّين والرياضيّين العرب في ضوء الجداول الفلكية لـِ أولغ بيغ (Olg-Beg) برهنا وجود طرق تقريب لحلّ المعادلات العددية، وكانت هذه الطرق متعددة وعلى درجة عالية من التطوير»[10].

= the rule of «false position» (Called by him «regula aurea») to the cubic; but the results obtained by this method were of little value».

انظر: Edmund Taylor Whittaker and George Robinson, *The Calculus of Observations: A Treatise of Numerical Mathematics,* 2nd ed. (1926), Chaps.6 and 41, and J.R. Young, *The Theory and Solution of Algebraical Equations* (London: [n.pb], 1843), p.248 sq.

(٩) انظر: Louis Pierre Eugène Amélie Sédillot, *Prolégomènes des tables astronomiques,* 2 vols. in 1 (Paris: Firmin, 1847), pp.69-83, et Franz Woepcke, «Discussions de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchés de Sin 1°,» *Journal des mathématiques pures et appliquées* (1854), p.19.

فحساب قيمة جيب ١° (Sin 1°) تطلّب حل المعادلة $X = \frac{(X^3 + A)}{B}$ حيث B هي من درجة أعلى من X. الطريقة المعروضة من قبل شلبي تستمد أساسها من فكرة مشتركة لمجموعة كاملة من طرق التقريب: أن نستبدل قدر ما نشاء المعادلة الأصلية بمعادلة خطية أو بأية معادلة مقاربة. ويفرض:

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k} x_k \quad \text{;حيث} \quad A = am + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k} a_k \quad \text{و} \quad B = bm$$

لذا:

$$X^3 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k} x_k\right)^3 = (bx_0 - a)\, m + \sum_{k=1}^{\infty} (bx_k - a_{k-1}) \frac{1}{m^{k-1}}$$

وبواسطة طريقة المعاملات غير المحددة نخلص إلى x_k حيث $k = 0,1,2,...$ وكون a_k و b هي أعداد صحيحة فإن قيم x_k لن تكون أعداداً صحيحة بشكل عام. ونأخذ عندها الجزء الصحيح فنجد:

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k} [x_k]$$

يقوم هذا النمط من الحل على «تعويض معادلة الدرجة الثالثة المعطاة بعدد لا نهائي من المعادلات الخطيّة». نجد وصفاً تفصيلياً لهذه الطريقة، في: Woepcke: Ibid., et «Additions à la discussion de deux méthodes arabes...,» *journal des mathématiques pures et appliquées,* vol. 19, p.153 sq, and Hermann Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter,* p.292.

(١٠) انظر: Hankel, Ibid, p.292.

أمام طابعها الدقيق لم يتردد هنكل في أن يكتب بخصوص احداها:

«Diese Schöne Methode der Auflösung numerischer Gleichungen steht allen seit =

ويؤكد إضافةً إلى ذلك بأنها الطريقة الأولى للتقريب العددي المتتالي التي نصادفها في تاريخ الرياضيات.

إن اكتشاف سيديللو و ويبك ألقى بالتأكيد ظلا من الشك حول الرواية التقليدية لتاريخ مسألتنا. ومع هذا لا يمكن إلاّ أن يكون هذا الشك ضمنياً بمقدار ما يكون النص الخاص بالرياضي شلبي(Šhalabi)لا يحتوي علاجاً منهجياً لمسألتنا المعنيّة، بل حالة خاصة عن حساب القيمة التقريبية لجيب ١° (sin 1°). فمن الجائز أنه لهذا السبب مرّت أبحاث سيديللو و ويبك دون أن تترك أثراً واضحاً. لكن هذا الرياضي يذكر الكاشي كاستاذه الجبري من القرن الخامس عشر: حيث انصرف كل الإنتباه إلى هذا الأخير. في عام ١٨٦٤ أوحى هنكل[١١]، دون أن يتمكن من تبرير ذلك، بأهمية الكاشي بالنسبة إلى تاريخ مسألتنا. صحيح أنه قبل ذلك بنصف قرن كان تيتلر (J. Tytler)[١٢] قد نوّه بذلك.

ولم تحصل الزعزعة بشكل صريح لجدول التاريخ التقليدي إلاّ في عام ١٩٤٨ وذلك بعد أن أعطى بول لوكي (Paul Luckey) للمرة الأولى دراسة موسّعة ومعمّقة لمؤلّف الكاشي. ففي مقالة أساسية[١٣] برهن أن الكاشي لم يكن مُبتكر الكسور العشرية

Viète in Occident erfundenen Approximationsmethoden an Feinheit und Eleganz = nicht nach».

(١١) المصدر نفسه، ص ٢٩٢ - ٢٩٣.

(١٢) J. Tytler, «Essay on the Binomial Theorem, as Known to the Arabs ,» *Asiatic Researcher* (Calcutta), vol.13 (1820).

(١٣) Paul Luckey, «Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik,» *Mathematische Annalen*, vol.120 (1948), pp.217-274.

لتلخيص طريقة الكاشي بخطوطها العريضة يجب أن نذكّر بأن المؤلف قد حلّ المعادلة $x^n - Q = 0$ فيأخذ كتقريب أول، أكبر عدد صحيح أدنى من $Q^{1/n}$، أي: $x_0 = [Q^{1/n}]$

فيحصل على: $Q = x^n = (x_0 + x_1)^n$

لذا: $(x_0^n - Q) + n x_0^{n-1} x_1 \approx 0$

أي: $x_1 \approx \frac{Q - x_0^n}{n x_0^{n-1}}$

إذن: $x = Q^{1/n} \approx x_0 + \frac{Q - x_0^n}{n x_0^{n-1}}$

ويبرهن لوكي أن الكاشي يستخدم جدول هورنر كي يحسب المعاملات لكل دالة محوّلة.

فقط، بل كان يمتلك عدا ذلك، الطريقة المسماة طريقة روفّيني ـ هورنر.

لقد كان الاكتشاف عظيماً، وكانت معرفة تاريخ الرياضيات قبل الكاشي مجزّأة وغير أكيدة الأمر الذي جعل لوكي ومؤرخي الرياضيات الذين اتّبعوا خطاه يواجهون صعوبة جمة في تعيين موقع عمل الكاشي من الناحية التاريخية، وهي صعوبة بديهية إجمالاً أمام عمل من وزن مفتاح الحساب(١٤). فهو بمستواه يحكم بجرأة على مجمل الأعمال الجبرية التي كانت معروفة من قِبل المؤرخين.

لكي يتلافى صعوبة كهذه، دون أن يحلّها، فإن مؤرخ العلوم أحياناً، ومؤرخ العلوم العربية غالباً ما يغيّر الإشكاليّة ضمنياً. فبدلاً من أن يحدد أمراً ما يلجأ إلى تصغيره، وعوضاً عن البحث في الشروط التي جعلت جبر مفتاح الحساب ممكناً لا يسعى إلاّ إلى تحديد هوية سلف محتمل له. إن تمييز نشاط الكاشي الجبريّ بدقة، سمح دون شك بانصافه تاريخيًّا. غير أن هذه المسيرة تتم مقلوبة بشكل عام، أي بمعزلٍ عن تحليل هذا النشاط، ولا يُؤخذ، سوى بالنتائج. وكما جرت العادة في هذا المجال، يحصل الرجوع إلى الاسكندريين للتفتيش عن سابق في هذا المجال. وبما أن الاسكندريين لم يعرفوا طريقة مماثلة، وبما أن الكاشي هو من القرن الرابع عشر والخامس عشر، وبما أنه قد عثر في الصين في القرن الثالث عشر على طريقة لاستخراج الجذر لمعادلة عددية قريبة من معادلة الكاشي، فقد أوحي وأُكّدَ دون الإثباتات اللازمة، أصلٌ صيني لها(١٥). كان هذا تفسير وتحليل لوكي اللذين أُخذا دون تمعّن من قبل مؤرخي الرياضيات.

هذا المسعى التاريخي ليس قابلاً للنقاش باستنتاجاته فقط بل بفرضياته أيضاً، فتاريخ الرياضيات مدركٌ على أنه تاريخ النتائج الرياضيّة بمعزل عن التسلسلات

---

(١٤) Paul Luckey, *Die Rechenkunst bei Ǧamšid b. Masʿūd al-Kāšī* (Wiesbaden: Steiner, 1951).

حيث يعطي لوكي تحليلاً للمؤلَّف مع ترجمة لعدد من المقاطع. والطبعة الوحيدة للمؤلف هي: غياث الدين جمشيد الكاشي، مفتاح الحساب، تحقيق احمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفني الشيخ، مراجعة عبد الحميد لطفي (القاهرة: دار الكاتب العربي للطباعة والنشر، ١٩٦٧). وتوجد ترجمة روسية لمؤلف الكاشي مع صور فوتوغرافية، دون طبع للمخطوطات، ترجمة ب. روسنفيلد، موسكو، ١٩٥٦.

(١٥) انظر: Luckey, «Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik,» p.248,

المفهومية التي أنتجتها، لا يُبقي من التاريخ سوى علاقة بين وقائع متتابعة وانتقال لقضايا. وبدورنا فإننا دون أن نقصد اعتماد موقف يقلل من النتائج الموضعية التي حصل عليها الرياضيّون، ويجعل من قيمتها الوحيدة إشارتها إلى النظرية التي تتعلق بها، يمكننا القبول بأن أية نتيجة هي نفسها بالنسبة إلى مؤلّفين مختلفين إذا كانت قواعد العلم التي تضبط تلك النتيجة هي نفسها من جهة، وإذا كانت الغايات التي وجهت هذين الرياضيّين متشابهة من جهة أخرى.

بالنسبة إلى مؤرخ مسألة موضعية كمسألة حل المعادلات العددية يبقى الجوهري في الأمر هو وضعها في مكانها بالنسبة الى العلوم التي تندرج ضمنها: أي الجبر والحساب. ومنذ عام ١٩٤٨ تحديداً بدأنا نشهد تحسناً نسبياً في معرفة تاريخ هذه العلوم عند العرب. إن اسم الإقليدسي[١٦] يسمح بفهم أفضل لمساهمة الكاشي في معرفة الكسور العشرية. واسم الكرجي ولاحقيْه الشهرزوري والسموأل[١٧] كما سبق أن بيّنا يثبتون بدقة أن مفتاح الحساب ليس سوى نهاية مطاف لنشاط ذي تاريخ طويل ولحقبةٍ مكثفة في الحساب والجبر. أمّا اسم الخيّام[١٨] واسم شرف الدين الطوسي[١٩] -

---

(١٦) ابو الحسن احمد بن ابراهيم الاقليدسي، «الفصول»، مخطوطات:
«Yeni-Cami (802), Istambul,» المكتوب عام ٩٥٢ حيث نجد نظرية في الكسور العشرية.

(١٧) انظر: Al-Samaw'al Ibn Yahaya Abbas al-Maghribi, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*, note et introduction par Rushdi Rashed et Salah Ahmad (Damas: Université of Damas, 1972).
ومقالة الكرجي في: D.S.B.

(١٨) Franz Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Al-Khayyâmi* (Paris: [s.pb.], 1951).

(١٩) إن حالة شرف الدين الطوسي ليست نادرة في تاريخ الرياضيات العربية، فعلى الرغم من تكرار التأكيد على أهمية مؤلفه من قبل الجبريين، نُواجه بغياب مطلق لأية دراسة لهذا المؤلف من قبل المؤرخين. وإذا كنا قد وجدنا أنفسنا في الوضع نفسه أو في وضع مشابه له مع السموأل، فإن حالة الطوسي تبدو أكثر غرابة وتبين فقر التاريخ في هذا المجال وكذلك تجعل من كل معرفة لنا بالجبر العربي وبعصر النهضة معرفة مشكوكاً بأمرها. يذكر الطوسي جيداً من قبل الجبريين العرب أنفسهم وكذلك من قبل المؤرخين.

وهكذا فإن رياضيي النصف الأول من القرن الثالث عشر شمس الدين بن إبراهيم المارديني نسب إليه ابتكار «طريقة الجدول»، أي الحل العددي للمعادلات التكعيبية. انظر «نصاب الجبر»، مخطوطة: «اسطنبول، فضل الله (١٣٦٦)». لم يعد الطوسي مجهولاً من قبل كاتبي السِيَر، القدماء منهم أو المعاصرين. فسارتون اعطى سيرته وذكر بأنه ألّف:
«A Treatise on algebra... in 1209-10... [which] is known only through a commentary =[talḫīs] by an unknown author».

الـذي سوف نبـيّن للمرة الأولى أهمّيـة عمله الجبري - فهـما على أهمية جوهـريـة ليس بالنسبة إلى الجبر فقط، ولكن بالنسبة الى الهندسة الجبرية أيضاً.

= انـظر: George Sarton, *Introduction to the History of Science*, 2nd ed, 3 vols. in 5, Carnegie Institution of Washington Publication, no.376 (Baltimore, Mad.: Wilkins, 1950), vol.2, pp.622-623.

هذا التأكيد كان قد وجد في فهرسة سوتر (Suter) كذلك في مخطوطة:

«India office 80th 767 (I.O.461),»

انظر: Heinrich Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Leipzig: Teubner, 1900), p.134, and Brockelmann, *Geschichte der Arab. Lit*, vol.1, p.472.

ومنذ ترجمات سوتر وكارًا داڤو (Carra de Vaux) عُرِفَ الـطوسي أيضاً كمبتكـر للاسـطرلاب الخطي (Astrolabe linéaire). انظر:

Carra de Vaux, «L'Astrolabe linéaire ou Bâton d'El-Tousi,» *Journal Asiatique*, vol.5 (1895), pp.404-516, and Heinrich Suter, «Zur Geschichte des Jakobsstabes,» *Bibliotheca Mathematica*, vol.9 (1895), pp.13-18, and vol.10 (1896), pp.13-15.

وبالنسبة الى الرواة القدماء للسِيَر، الذين استطعنا الرجوع إليهم على الأقل، فهم يذكرون الطوسي دون أن يعطوا معلومات مهمة عن سيرة حياته. انـظر: أبو الحسن عـلي بن يوسف القفـطي، **تاريـخ الحكماء**، تحقيق يوليوس ليبرت (ليـبزيغ: ديـتريخ، ١٩٠٣)، ص ٤٢٦، وشمـس الـدين أبو العبـاس أحمد بن خلكان، **وفيات الأعيان وانباء ابناء الزمان**، تحقيق احسان عباس، ٨ ج (بيروت: دار الثقافة، ١٩٧٠ - ١٩٧٢)، ج ٥، حيث يمكننـا أن نقرأ: «شيـخ شرف الدين المظفـر ابن محمـد ابن المظفـر الطوسي هو مبتكر الإسطرلاب الخطي المعروف تحت اسم العصا»، ص ٣١٤.

لا نعرف عن حياته حتى الآن سوى القليل. فقد عاش في القرن الثـاني عشر، وعلّم في دمشق حيث تتلمذ على يديه مهـذب الدين بن الحـاجب، وتتلمذ عـلى يديـه في الموصـل كمال الـدين بن يونس الشهير ومحمد بن عبدالكريم الحارثي، وأخيراً انتقل الى بغداد، ومنها إلى طز في خراسان، ومن المحتمـل أنه توفي عام ١٢١٣. من مؤلفاته:

أ - **رسالة في صنع الاسطرلاب المسطح**، «mas. Leiden (591) (Discours de l'astrolabe linéaire)». ب - **جواب على سؤال هندسيّ مطروح من الصديق شمس الدين**، ذكر من قبل سـوتر. ج - **رسـالة في الخطين اللذين يقربان ولا يتقابلان**، ذكر من قبل: Brockelmann, Ibid, vol.1, supp.Bd., p.850.

ومن المحتمل أنه بحث في خطوط التقارب. ج - وأخيراً الجبر.

ان بحثه في الجبر المعنون: «المعادلات» هو المخطوطة: «India Office 80th 767 (I.O. 461)».

وليس النص «تفسيراً» كما يسميه سارتون ولكنه ملخص. كما يشرح مؤلف - مجهول - الكتـاب: «فإني قصـدت في هذا الكتـاب تلخيص صناعـة الجبر والمقـابلة وتهذبت مـا وصـل إليّ من كـلام الفـاضـل الفيلسوف الأعظم شرف الدين المظفر بن محمد الطوسي، وتحويل كلامـه من إفراط التـطويل إلى حـد الإعتـدال. وأسقطت الجـداول التي رسمها في عمـل الحساب واستنبـاط المسـائل». الكتاب هـو إذن اقتبـاس لمؤلَّف الطوسي الجبـريّ حيث حذفت منه الجداول وبعض الأشكـال، ونعرف بـالتالي سبب=

من البديهي أنه من هذا المنظور التاريخي والنظري على السواء لا يمكن أن تطرح مسألة المعادلات العددية إلا بشكل مغاير. فسوف نورد ونشرح إذاً الفرضيتين التاليتين:

١ - إن عمل الكاشي - إنْ بالنسبة الى المعادلات العددية أم بالنسبة إلى الكسور العشرية - هو التتويج للتجديد الذي شُرع به من قبل جبريّي القرنين الحادي عشر والثاني عشر. وفرضية الأصول الصينية تبدو عندها من النوافل تاريخياً وغير مسنودة نظرياً.

إن مجموعتين من الوسائل النظرية والتقنية كانتا وقتها ضروريتين لطرح مسألة حلّ المعادلات العددية، فمن جهة كان هناك جبر منجز(٢٠) لكثيرات الحدود مع معرفة بصيغة ذات الحدّين بالنسبة إلى القوى الصحيحة الموجبة أياً كانت تلك القوى(٢١)، وخوارزميات مثبتة لاستخراج الجذور العددية وقابلة للتعميم(٢٢). ومن جهة أخرى

=صعوبة قراءة المخطوطة إذا أضفنا أخطاء الناسخ. وهذا بلا شك من الأسباب التي لم تثر حشرية المؤرخين. ولقد قمنا بتحقيق وترجمة وتحليل هذا الكتاب مع أعمال الطوسي الرياضية الأخرى. انظر:
Sharaf al-Dine al-Tusi, *Oeuvres mathématiques, algèbre et géométrie au XIIème siècle*, 2 vols. (Paris: Les Belles lettres, 1986).

(٢٠) نعرف الآن ان هذا الجبر كان قد أُنجز من قبل الكرجي ولاحقيه من أمثال السموأل. انظر: Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*, et Rushdi Rashed, «L'Arithmétisation de l'algèbre au VIème siècle,» dans: Actes du XIIIème congrès d'histoire des sciences, Moscou, 1971.

(٢١) انظر: Rushdi Rashed, «L'induction mathématique: Al-Karaji et As-Samaw'al,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol.9 (1972), pp.4-8.

(٢٢) لن نفهم عمل الطوسي على الأقل في هذا المستوى إذا لم نلفت الانتباه كفايةً إلى التوسع في الطرق التي ابتكرت لاستخراج جذور عددٍ ما. تَسِمُ حركتان في الواقع، تاريخ مسألتنا: هيمن على الأولى، الجبري الأول: الخوارزمي، بينما أُنجزت الثانية من قبل من جدّد الجبر، وهو الكرجي.
فإذا كان النص العربي لحساب الخوارزمي ما زال مفقوداً، فهناك نصّاً لاتينياً مستقىً من هذا الكتاب. انظر:
Kurt Vogel, *Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus: Das Früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern* (Aalen, 1963).
ينبئنا هذا النص أن مسألة استخراج الجذر التربيعي طرحت على الخوارزمي كمرحلة من ضمن دراسة منهجية لعمليات الحساب، إذ أعطى كقاعدةٍ لتقريب الجذر التربيعي للعدد N،

$$N = a^2 + r\,;\ \sqrt{N} = a + \frac{r}{2a}.$$

وأكّد هذا الواقع من قبل لاحقي الخوارزمي العرب، فالبغدادي (المتوفى عام ١٠٣٧) ينسب في=

كان توسيع نظرية المعادلات يهدف إلى فهم معادلات أخرى غير معادلات الدرجة الثانية أو تلك التي يمكن إرجاعها إليها. وأخيراً كان هناك بداية لدراسة المنحنيات بواسطة الجبر لمعالجة مسألة التقريب.

= كتابه التكملة، هذا التقريب إلى الخوارزمي ويذكر أن الرياضيين العرب قد تخلوا عن قصد عن هذا التقريب نظراً لعدم كفايته عند قيم $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$.

والأهم من قاعدة التقريب هذه الأفكار الأساسية للخوارزمي عن هذا الموضوع والتي يمكن لها أن تكون هندية الأصل. فهو يستعمل في آن مفكوك $(a+b)^2$ وكتابة N بالشكل التالي:

$$N = n_0\, 10^{m-1} + \ldots n_m.$$

وتقوم طريقته على: ما يلي: أ - تفريق مجموعة أرقام العدد الذي نريد استخراج جذره على مجموعات مؤلفة من رقمين، أي تفريق المواضع من نوع 10^{2k} حيث $k = 0,1,2,\ldots$ ، مبتدئين من اليمين باتجاه اليسار. ب - التفتيش بعد ذلك عن عدد بحيث يكون حاصل مربعه أكبر مربع موجود في آخر مجموعةٍ مؤلفة من رقمين عن اليسار. هذا العدد a مكتوباً بمرتبته العشرية، هو الرقم الأول للجذر. ج - طرح العدد a^2 للحصول على أول باقٍ وتحديد الرقم الثاني b ومرتبته العشرية من الجذر ثم طرح كلٍ من $2ab$ وَ b^2 من الباقي الأول وهكذا دواليك. لم يكن حساب الخوارزمي مباشراً وكان العرض ناقصاً وبالتالي فقد حاول الرياضيّون العرب تحسين التقريب وعرض الطريقة وأخيراً توسيعها كي تطال استخراج جذور من مرتبة أعلى: تلك كانت الأهداف الثلاثة التي سعى لاحقي الخوارزمي إلى تحقيقها.

هكذا يعطي الاقليدسي (٩٥٢ - ٩٥٣)، في كتابه أولاً التقريب $\sqrt{N} = a + r/(2a+1)$ ، ويذكر بأنه إذا كان تقريب الخوارزمي يتخطى قيمة الجذر فإن هذا التقريب يقصِّر عنه وأن: $\sqrt{N} = a + r/2a + 1/2$

انظر: أبو الحسن احمد بن ابراهيم الاقليدسي، **الفصول في الحساب الهندي**، تحقيق احمد سعيدان، تاريخ علم الحساب العربي، ٢ (عمان: اللجنة الاردنية للتعريب والنشر والترجمة، ١٩٧٣).

وأراد كوشيار بن اللبّان (حوالى ١٠٠٠) تحسين النتيجة وعرضها. فاقترح للمثل $N = 65342$ الأشكال التالية:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 2 & & & & \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & & & & \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = 2.10^2 \\ N \\ 2a \end{array} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} & 2 & & & \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ & 4 & & & \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a \\ N - a^2 \\ 2a \end{array} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} & 2 & 5 & & \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ & 4 & 5 & & \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (a+b);\ b = 5 \times 10 \\ N - a^2 \\ (2a+b);\ (2a+b)b \leqq N - a^2 \end{array} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{cccc} & 2 & 5 & \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ & 4 & 5 & \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a+b \\ N - a^2 - (2a+b)b \\ (2a+b) \end{array} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{array}{rccc} & 2 & 5 & 5 \\ & 3 & 1 & 7 \\ = & 5 & 1 & 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (a+b+c);\ c = 5 \times 10^\circ \\ N - a^2 - (2a+b)\,b - (2a+2b+c)\,c \\ 2\,(a+b+c) + r \end{array} \qquad (5)$$

إذا كانت هذه الوسائل مجتمعة بتصرف الرياضيين، فذلك على أثر وجود تيارين في القرن الحادي عشر كانا يهدفان إلى تجديد الجبر وتوسيع مجاله. ولن نتمكن على أية حال من فهم شيء عن هذا العلم انطلاقاً من القرن الحادي عشر إذا لم نشر بما يكفي إلى حضور هذين التيارين.

التيار **الأول** مرتبط بالتحديد في تطبيق الحساب على الجبر، وفي محاولات غير

= إذن: $\sqrt{N} = (a+b+c) + r/[2(a+b+c)+1]$

أو: $r = N - a^2 - (2a+b)b - (2a+2b+c)c.$

كما يظهر من هذا العرض: نلاحظ أنه يجهد كي يعطي أرقام الجذر فوق العدد N، دالاً بوضوح على منازلها وعلى المرتبة العشرية لكل عدد وجاعلاً بذلك الخطة «منتظمة». انظر نشرة أحمد سليم سعيدان من مخطوطة ابن اللبان، في:

Revue de l'institut des manuscrits arabes, vol.13, fasc.1, pp.65-66.

انظر أيضاً الترجمة الانكليزية مع مقدمة تاريخية:

M. Levy and M. Petruck, *Kūshayr ibn-Labbān, Principles of Hindu Reckonning* (Madison, 1965).

أمّا النسويّ وهو تلميذ ابن اللبّان فقد ذهب إلى أبعد من ذلك فيما يخص جذور الأعداد الكسرية على الأقل. وفيما بعد، فإن الرياضيين العرب حسّنوا هذا العرض ودلّوا على المجموعة ذات الرقمين بواسطة دوائر صغيرة شبيهة بتلك التي نجدها عند شرف الدين الطوسي. ولم يتوقف كوشيار بن اللبّان وتلميذه النسويّ عند هذا الحد بل وسّعا الطريقة نفسها كي تطال استخراج الجذر التكعيبي فاستخدما مفكوك $(a+b+\cdots+k)^3$ والتحليل العشري دائماً، فأعطيا الصيغة:

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{r}{3a^2+1}$$

كصيغة لتقريب الجذر التكعيبي للعدد $N = a^3 + r$ وهي صيغة تخصّهما وحدهما، إذ إن الرياضيين العرب الآخرين كانوا يستخدمون ما أطلق عليه فيما بعد ناصر الدين الطوسي اسم «التقريب الإصطلاحي»: $\sqrt[3]{N} = a + \frac{r}{3a^2+3a+1}$

أي التقريب الذي سوف نجده فيما بعد عند ليونار دي بيز (Léonard de Pise) انظر: نصير الدين الطوسي، «قوام الحساب،» تقديم أحمد سليم سعيدان، الأبحاث، السنة ٢٠، العدد ٢ (١٩٦٧)، ص ١٤١ وما يليها.

هذه الطريقة لاستخراج جذور «القوى البحتة» كما كانت تسمّى في القرن السادس عشر، كانت موجودة مع بعض فروقات غير جوهرية عند الرياضيين الذين سبقوا الطوسي وهذه النتيجة هي التي قصدنا تبيانها أكثر مما قصدنا التاريخ الفعلي لهذه المسألة. انظر أيضاً:

Heinrich Suter, «Über das Rechenbuch des al-Nasawī,» *Bibliotheca Mathematica*, vol.3, no.17 (1966), pp.113-119, and Luckey, «Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in des islamischen Mathematik».

مباشرة لتوسيع مفهوم العدد؛ إن أعمال الكرجي المتبوعة بأعمال لاحقيه أمثال السموأل زودت المسألة التي نحن بصددها بأول مجموعة من الوسائل التي سبق إحصاؤها. أما **التيار الثاني** فيرتبط بالجهود من أجل التقدم بالجبر بواسطة الهندسة، وقد قاد الدراسة الجبرية بشكل طبيعي إلى المنحنيات، الأمر الذي سمح بوضع أسس الهندسة الجبرية. وقد تميّز هذا التيار باسمي الخيّام وشرف الدين الطوسي، وشكل المجموعة الثانية من الوسائل المطلوبة، وبفضل هؤلاء الرياضيين سيكون بالإمكان طرح مسألة المعادلات العددية كما سنرى.

من الجائز أنه أمام صعوبة إعطاء معادلات من الدرجة الثالثة حلاً جبرياً سريعاً وأنيقاً، بذل هؤلاء الرياضيّون جهودهم لتأليف نظرية حول هذه المسألة ووجدوا أنفسهم منقادين إلى البحث عن طرقٍ أخرى عددية للحل. فالحاجز النظري ليس ذا قيمة للتثبيت فقط بل يمتلك دوراً كشفياً أيضاً.

٢ ـ لقد كان الطوسي يمتلك طريقة ترتبط بها طريقة ڤيت بشكل أساسي. ومرة ثانية أيضاً فإن الصورة المحفوظة من قبل المؤرخين مطروحة للتعديل.

بقول آخر، إذا كان بالإمكان مقارنة طريقة الكاشي بطريقة روفيني ـ هورنر فسيحدث كما لو أن طريقة ڤيت هي سابقة بالضرورة لطريقة هذين الأخيرين. لكن بينما يعثر روفيني و هورنر على طريقة الكاشي انطلاقاً من رياضيات مجددة بالتحليل، نجد أن الطريقة التي يستخرج ڤيت أفكارها الأساسية تستند إلى رياضيات تبقى، مهما قيل، هي نفسها بشكل أساسي. وهذا يطرح على المؤرخ مسألة تتعلق بفكرة ڤيت.

ولكي لا ننصرف نحن إلى مسيرة تاريخية انتقدناها آنفاً، فإننا مجبرون على متابعة المسألة بشكل سريع على الأقل، وضمن حدود هذه الدراسة، وذلك في مجالها ومضمونها، أي من خلال جبر الطوسي. وهنا أيضاً سوف نبين البداية لهندسة جبرية. لنبدأ إذن بعرض طريقة الطوسي وصلاتها بطريقة ڤيت.

ـ ٢ ـ

في نصٍ معروف، يُذكر أحياناً لكنه سرعان ما يُنسى، كتب الخيّام (١٠٤٤ ـ ١١٢٣/٤): «وللهند طرق في استخراج أضلاع المربعات والمكعبات مبنية على استقراء قليل، وهو معرفة مربعات الصور التسعة، أعني مربع الواحد والإثنين والثلاثة... الخ. وكذلك مضروب بعضها في بعض، أعني مضروب الإثنين في الثلاثة ونحوها. ولنا كتاب في البرهان على صحة تلك الطرق وتأديتها إلى المطلوبات. وقد غزّرنا أنواعها، أعني من استخراج أضلاع مال المال ومال الكعب

وكعب الكعب، بـالغاً مـا بلغ، ولم يسبق إليه، وتلك الـبراهين إنمـا هي براهـين عـددية مبنيـة عـلى عدديات كتاب الأسطقسات»[٢٣].

لم تكن محاولة الخيّام الأولى ولا الوحيدة. فإن البيروني (٩٧٣ ـ ١٠٥٠) المنتمي إلى رعيـل من الـريـاضيـين سبق الخيّـام، قـد ألّف كتـابـاً من ١٠٠ صفحـة عنـوانـه بالتحديد: في استخراج الكعاب وأضلع ما وراءه من مراتب الحساب[٢٤].

صحيح أن هذه المعلومات أخذت حتى الآن، لما فيها من قيمة، إذ إنها إشارات لآثار قد اختفت. ومن المعروف أن الكتابين لا يزالان مفقودين، إذ لدينا عن أحدهما ملخص مختصر أو (abstract) ولم يبقَ من الثاني سوى العنوان. وعلى الـرغم من كونـه موجزاً، فالملخص يسمح بالاعتقاد أن الخيّام كان يمتلك طريقة لاستخـراج الجذور من أية درجة كانت، وأن هذه الطريقة مبنية على مفكوك $(a+b+\cdots+k)^n$ حيث $n\in\mathbb{N}$، أو بالأحرى على معرفةٍ بصيغة خـاصة لمفكـوك ذات الحدّين وَ بقـانون تشكيـل جدول معـاملاتـه. بلغة القـرن السادس عشر، كـان الخيّام يمتلك طـريقة لاستخـراج جذور «القوى البحتة» وهي بالواقع الطريقـة نفسها الخـاصة بستيفـل (Stifel) وفيت المتعلقة بهـذه القوى. وبـالطبـع، نظراً إلى عـدم وجود نصـوص أخرى تستعيـد أفكار الخيّـام بالعبارات نفسها أو بعبارات أخرى، فالاستنتاج الأخير يبقى قائماً عـلى الإفتراض. إلا أن هذا الإفتراض يتعزز مع كتاب الطوسي، إن بصمته أم بالطريقة التي يستعملها.

فطريقة الطوسي تستند في جزء منها إلى معرفة بالمفكوك المنوّه به من قبل الخيّام، وأكثر من ذلـك فهي تبـدو كتعميم لاستخـراج جـذر «القـوى البحتـة» حتى «القـوى المقترنة». وفي الحقيقة فإن الحالة العامة فقط، أي تلك المتعلقة بالمعادلات المقترنة التي اهتم بها الطوسي ومعالجة هذه الحالـة، تبدو كـأنها تعميم لما سبق أن فعله الخيّـام. ولم يكن صمته أقل دلالـة، إذ نودّ القـول إن الطوسي يغيّب في الصمت المسـألة الخـاصة بـ $x^n=N$ حيث $n=2,3$ التي يفـوّض أمر حلّهـا عن تبصّر إلى القـارىء. يحـدث هـذا وكأن استخراج الجذر هذا كان في متناول أولئك الذين كانوا يدرسون الـرياضيـات في تلك الحقبة، أما هو فقد استبقى لنفسه المسألة العامة للمعادلات المقترنة.

(٢٣) Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Al-Khayyâmî*, p.13.

(٢٤) V. C.E. Schaw, *Chronologie Orientalischer Völker von Albirunî* (Leipzig: Neudruck, 1923), vol.8, p,xxxii; Eilhard Wiedemann, *Aufsätze zur arabischen wissenschafts geschichte*, 2 vols., Collectanea, VI/1, 2 (Hildestreim: Ilms, 1970), vol. 2, and D.J. Boilot, «L'œuvre d'al-Berunı: Essai bibliographique,» dans: *Mélanges* (Caire: L'Institut dominicain d'études orientales, 1955), vol.2, p.187.

لهذا السبب هل نستطيع التأكيد أن الطوسي قد عمّم بنفسه طريقة الخيّام؟ وبسبب جهلنا بمن جاء بين الخيّام والطوسي فإن أية نسبة تبقى غير أكيدة. ومع هذا فالشك يتأتى من صمت آخر للطوسي، فهو دون أن يشير إلى المبتكر المحتمل للطريقة، لا يدّعي، مع ذلك، نسبتها إليه. وليس هناك أي اسم مذكور في المخطوطة التي بحوزتنا. ولا يكفي استعماله للجداول[٢٥] وحده، في عرض طريقته ليدلّ على شيء مميّز في الحدود التي جعلت حسابياً مثل كوشيّار بن اللبّان يستعمل جداول الطوسي لاستخراج الجذور التربيعية والتكعيبية منذ بداية القرن الحادي عشر على الأقل، بحيث يمكننا القول فقط أن الطريقة المستعملة من قبل الطوسي - التي ندعوها هنا طريقة الطوسي - قد صيغت بعد الخيّام ولكن قبل الطوسي أو من قبل أحد هذين الرياضيين، وفي مطلق الأحوال ضمن تيار هذين الجبريين[٢٦].

لكن ما هي هذه الطريقة؟

إن مسيرة الطوسي هي هي طوال كتابه أي مناقشة وجود الجذور لكلٍ من المعادلات أولاً، ثم عرض كيف تحل المعادلة العددية المقابلة للمعادلة التي سبق أن نوقشت. إن استعادة جميع المعادلات المبرهنة من قبل الطوسي هو أمر مستبعد من إطار هذه الدراسة وسوف نعطي عدداً من الأمثلة يكفي تماماً لوصف الطريقة. وسوف نشرح بإسهاب، في مرحلة أوليّة، رغم الإطالة، نص الطوسي: $x^2+a_1x=N$ [٢٧].

---

(٢٥) نقع على استعمال معمّم للجداول من قبل السموأل، انظر:
Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al.*

(٢٦) وحده المارديني ينسب إلى الطوسي ابتكار هذه الطريقة، انظر: المصدر نفسه، وبسبب غياب تأكيدات اخرى فلن تكون هذه الشهادة حاسمة.

(٢٧) الطوسي، «قوام الحساب،» ص ٤٦ (ظهر الورقة) و ٤٩ (وجه الورقة). انظر أيضاً: شرف الدين الطوسي، الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر، تحقيق وتحليل وترجمة رشدي راشد، ٢ ج (باريس: دار الأداب الرفيعة، ١٩٨٦)، ص ٢٥ وما يليها:

«وأمّا استخراج الجذر: فنضع العدد على التخت، ويعدّ مراتبه بجذرٍ، ولا جذر، وحيث وقع عليه الجذر نضع صفرا، ونعرف المرتبة السمّية للجذر الأخير فيكون لها صورٌ ثلاث:

الصورة الأولى: أن يكون المرتبة السّمية للجذر الأخير أرفع من آخر مراتب عدد الجذور؛ مثل قولنا: مالٌ وأحد وثلاثون جذراً يعدل عدد مائة واثني عشر ألفاً وتسعمائة واثنين وتسعين.

فيعدّ من المرتبة السّمية للجذر الأخير. ونعدّ بتلك العدّة من أرفع مراتب عدد الجذور، فحيث ينتهي يُنقل إليه أولُ مراتب عدد الجذور، فيكون بهذه الصورة: ١١٢٩٩٢ / ٣١ ؛ لأن المرتبة/ السّميّة =

حيث: $N=n_0 10^m + n_1 10^{m-1}+\cdots+n_m$

إن المراتب المقترنة بالجـذور تحدد $\left[\frac{m}{2}\right]$ مجـالاً حيث $\left[\frac{m}{2}\right]$ هي الجزء الصحيح من $\frac{m}{2}$ ويقارن بـ k وهو المرتبة العشرية لِـ a_1. ولدينا حالتان: $k>\left[\frac{m}{2}\right]$ وَ $k\leqq\left[\frac{m}{2}\right]$

= للجذر الأخير إنما هي المئات، والمرتبة السّمية لأرفع مراتب عدد الجذور العشراتُ، فعددنا من المرتبة ل-٤٦-ظ السّمية للجذر الأخير إلى/ الجذر الأخير، وكان مرتبتان؛ وعـددنا من مـرتبة العشرات التي هي أرفـع ف-٥-و مراتب عدد الجذور بتلك العدّة، فنقلنا إليه أولَ مراتب عدد الجذور. ثم نطلب أكثر عددٍ نضعه فوق المرتبة التي وقع عليها الجذر الأخير وننقص مربعه مما تحته، ونضربـه في عدد الجـذور، وننقص المبلغ من العـدد؛ وهو الـثلاثة. فنضعـه مكان الصفـر الأخير، ونعمـل به العمـل المذكـور ليحصـل بهـذه الصـورة:

٣ ٥ ٥
١٣٦٩٢
٣١

، ونضع ضعف المـطلوب وهو ستـة بحذائـه في السطر الأسفـل، وننقل مـراتب السطر الأسفل <والأعلى> بمرتبة، ونضع مـطلوباً ثـانياً في الجـذر المتقدم عـلى الجذر الأخـير؛ وهو اثنان، ونعمل به ما عملنـا بالمـطلوب الأول، فيحصل بهـذه الصورة:

٣٢ ٥
٦٧٢
٦٣١

، ثم نـزيد ضعف المطلوب الثاني على المرتبة التي بحذائه في السطر الأسفل، وننقل مـراتب السطر الأسفـل <والأعلى> بمرتبة؛ ونضع مطلوباً ثالثاً في الجذر/ الأول، <وهـو واحد>؛ ونعمـل به العمـل المذكـور، فيرتفـع ل-٤٧-و العدد، ويحصل السطر الأعلى بهذه الصورة: ٣٢١، وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثانية: أن يكون آخر مراتب عدد الجذور أرفع من المرتبة السّمية للجذر الأخير؛ مثل قولنا: مـالٌ وألفان واثنـا عشر جذراً يعـدل عدد سبعـمائة ألف وثـمانية وأربعـين ألفاً وثـمانمائـة وثلاثـة وتسعين. فنضع عدد الجذور على رسم وضْع المقسوم عليه، فيكـون بهذه الصـورة:

٥ ٥ ٤
٧٤٨٨٩٣
٢٠١٢

، ونعمل العمل السابق إلى آخره.

الصورة الثالثة: ألاّ يكون المرتبة السّمية للجذر الأخـير أرفع من آخـر مراتب عـدد الجذور ولا أنزل. فنضع عدد الجذور على رسم وضْع المقسوم عليه، ونعمل به العمل المذكور.

وإنما وجب العمل على الوجه المذكور لأن العدد مركّب من المال الحـاصل من ضرب الجـذر في نفسه، ومن المسطح الحـاصل من ضرب الجـذر في عدد الجـذور؛ وآخرُ مـراتب المال إنمـا يحصل من ضرب آخرِ مراتب الجذر في نفسه، وآخرُ مراتب المسطح <يحصل> من ضرب آخر مراتب الجذر في آخر مراتب عدد الجذور. لكنّ آخر مراتب الجذر/ إنما هو المرتبة السمية للجذر الأخير المقابل للعدد، ل-٤٧-ظ ومنحطُّ ضرْب هذه * المرتبة في نفسها إنما يقع في مرتبة آخـر الجذور المقـابلة للعدد، وضربـه في آخر عدد الجذور في الصورة الأولى أنزل من ضربه في نفسه، فيقع منحط هذا * الضرْب قبلَ مرتبـةِ آخر الجذور المقابلة للعدد؛ فالحاصلُ مقابلَ الجذر الأخير إنما هو من المـال وهو آخـره؛ وآخره إنمـا هو من ضرب آخر الجذر في نفسه. فنطلب عدداً يُنقص مربعه من المرتبة المقابلة لآخر الجذور المقابلة للعدد.

وإذا استخرجنا المـطلوب نعلم أنه آخـرُ الجذر؛ وهـو مضروب في مراتب عـدد الجذور؛ فيُحتـاج إلى ضربه في مراتب عـدد الجذور ونقصـانِه من العـدد، فهو مـطلوب القسمة بـالنسبة إلى عـدد الجذور، وعددُ الجذور هو المقسومُ عليه. فإذا علمنا [أن] مطلوب القسمـة من أيّ مرتبـة - وهو أرفـعُ من جميع =

١ - الحالة الأولى: $\left[\frac{m}{2}\right] > k$ ، مثل $x^2+31x=112992$

(أ) نجزىء N إلى شرائح من رقمين بدءاً من اليمين. إن الأصفار الموضوعة فوق الأرقام في الجدول رقم (٣ - ١) تدلّ على هذه التجزئة. فإذا كانت مرتبة N تعادل m، . وهي هنا 5 فإن عدد الأرقام هو 6 وينتج عن ذلك أرقام ثلاثة للجذر x ونحصل على $2 = \left[\frac{m}{2}\right] = r$ وتكون بالتالي مرتبة x ممكنة.

إن مرتبة $a_1 = 31$ تعادل 1 و $r - k = 1$. فنضع في أسفل الجدول $a_1\,10^2$ وفي مثلنا نضع 31.10^2.

(ب) نفتش عن آخر رقم للجذر وذلك بتعيين أكبر مربع تتضمنه آخر شريحة من العدد N - ليكن 9 هذا المربع - ونفرض $x_1 = 3.10^2$. نضع في أعلى الجدول x_1^2 وَ $31x_1$ ونطرحها من N فنحصل على: $N_1 = N - f(x_1)$ حيث $f(x_1) = x_1^2 + a_1\, x_1$

= مراتب عدد الجذور - علمنا قدر انحطاط مرتبةِ آخرِ عدد الجذور عن مرتبته، فنقلنا آخر مراتب عدد الجذور إلى المرتبة المنحطّة عن المرتبة التي فيها المطلوبُ بقدر انْحطاطِ مرتبته، لأن ضرب المطلوب في آخر عدد الجذور يقع منحطاً عن ضربه في نفسه بقدر انحطاط مرتبة عدد الجذور عن مرتبته، ووضعنا ضعف المطلوب في السطر الأسفل، ونقلنا مراتب السطر الأسفل / بمرتبةٍ لأن آخر المراتب الباقية في العدد من المسطح حاصل من ضرب هذا المطلوب في آخر عدد الجذور؛ ل - ٤٨ ويكون آخر المراتب الباقية <في العدد> من المال أرفع من المراتب الباقية من المسطح، لما مرّ في المطلوب الأول. فالمطلوب الثاني - وهو المطلوب <المضروب في ضعف آخر> الجذر، وهو بعينه المطلوبُ الذي يحصل منه آخر المسطح الباقي - ننقصُ مربعه وهو المال ونضربه في السطر الأسفل، ليحصل ضربه في ضعف المطلوب الأول، وفي مراتب عدد الجذور <وننقص حاصل الضرب من الباقي>. ثم عند النقل نزيد ضعفه على السطر الأسفل لأنّا نحتاج إلى ضرب المطلوب الثالث في ضعف المطلوب الأول والثاني، وفي عدد الجذور بعد نقصان مربعه. /وسائرُ المطالب يستمرّ بيان ف - ٥ أعمالها على هذا القياس.

وأما في الصورة الثانية: فلأن آخر مراتب عدد الجذور أرفعُ من المرتبة الأخيرة للجذر، فآخر مراتب المسطّح أرفع من آخر مراتب المال؛ فآخرُ العدد هو <من> آخر المسطّح، فنقلنا آخر عدد الجذور إلى آخر العدد. وإذا علمنا [أن] آخر مراتب الجذر من أيّ مرتبة فنعلم أن مربعه في أيّ مرتبة، وهي المرتبة المقابلة للجذر الأخير، فيُنقص مربعه من تلك المرتبة ونضربه في مراتب عدد الجذور، وينقص حاصل الضرب من العدد؛ وبقية/ البيان ما مرّ. ل - ٤٨

وأما الصورة الثالثة: فلأن الجذر هو بعينه من مرتبة آخرِ عددِ الجذور، لأنه لو كان مرتبةُ آخر الجذر أرفع لكان مرتبة آخر الجذور المقابلةِ للعدد أرفع، ولو كان أنزلَ لكان أنزلَ؛ وإذا كان كذلك كان ضربُ المطلوب في نفسه وضربُه في آخر عدد الجذور يقعان في مرتبةٍ واحدة، وهي مرتبة آخر الجذور المقابلة للعدد، فينقل آخرُ عدد الجذور إلى تلك المرتبة، وبقية البيان ما مر».

(ج) نفرض $x=x_1+y$ ونجد: $x_1^2+y^2+2x_1y+31(x_1+y)=N$

إذن: $y^2+(2x_1+31)y=N_1$

(د) نجزىء N_1 بالطريقة نفسها التي جزأنا بها N ونجري الأسلوب نفسه، وبذلك نحدّد $r_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]$ حيث m_1 هي مرتبة N_1. نهتم الآن بحد الطرف الثاني ونضع في أسفل الجدول: $(2x_1+31)10^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}$. نلاحظ أن الرقم الأخير لهذا العدد قد وقع تحت الرقم الأخير للعدد N_1 وأنه أكبر منه. وبما أننا سوف نضيف إلى y $(2x_1 + 31)$ مربع y فإن حاصل جمعهما يبقى أكبر من N_1، نكون قد بينا إذن أن الرقم 3 الذي

جدول رقم (٣ - ١)

$x^2+31x=112992$
$a_1=31$
$f(x)=x^2+31x$

				3	2	1
			3	2		
		3				
		0		0		0
N	1	1	2	9	9	2
x_1^2		9				
a_1x_1			9	3		
				0		0
$N_1=N-x_1^2-a_1x_1$		1	3	6	9	2
x_2^2				4		
$(2x_1+31)\ x_2$		1	2	6	2	
						0
$N_2=N_1-x_2^2-(2x_1+31)\ x_2$				6	7	2
x_3^2						1
$[2(x_1+x_2)+31]\ x_3$				6	7	1
$N_3=N_2-x_3^2-[2(x_1+x_2)+31]\ x_3=0$						
$2(x_1+x_2)+31$				6	7	1
$(2x_1+2x_2+31)\ 10$			6	7	1	
$(2x_1+31)\ 10$			6	3	1	
$(2x_1+31)\ 10^2$		6	3	1		
$a_1 10^2$			3	1		

وجدناه، هو آخر رقم للجذر. نقوم بإزاحة مقدارها واحد ونبحث عن y ذات مرتبة تعادل $\left[\frac{m_1}{2}\right] - 1$. ومرتبة y هنا تعادل 1 وفيها يخص المرتبة فإن:

$$\alpha^2.10^2 + 6.10^2\,\alpha.10 = 10^4$$

إذن:
$$\alpha^2 + 60\alpha = 10^2$$

نقسم إذن 130 على 60 أو 13 على 6 فنحصل على قيمة تقريبية لِـ y تعادل x_2 وذلك بإهمالنا في العدد N_1 لحدود y ذات المراتب الأعلى من 1 ونحصل بذلك على

$$x_2 = 20$$

(هـ) نحمل إلى أعلى الجدول: x_2^2 وَ x_2 $(2x_1 + 31)$ ونطرح الكل من N_1.

وهكذا نحصل على:
$$N_1 - x_2^2 - (2x_1 + 31)\,x_2 = N_2$$

(و) نعاود الأسلوب ذاته ونفتش عن x_3 بحيث إن $x = x_1 + x_2 + x_3$

لدينا:
$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 31\,(x_1 + x_2 + x_3) = N$$

إذن:
$$x_3^2 + x_3[(2x_1 + 2x_2) + 31]\,x_3 = N_2$$

نجزىء N_2 لشرائح من رقمين ونعين المرتبة m_2 وتعادل 2؛ $m_2 = 2, \left[\frac{m_2}{2}\right] = 1$. نتبين إذا كانت المرتبة 1 توافق x_3. ونكتب في أسفل الجدول

$$[2(x_1 + x_2) + 31]\ 10$$

نعاود مقارنة المرتبة التي حصلنا عليها مع m_2، وكون العدد الحاصل هو أكبر من m_2، لذا نجد أن 2 هو بالضبط الرقم الثاني للجذر. فنحدّد إذن x_3.

(ز) نزيح السطر الأخير في أسفل الجدول ونفتش عن x_3 بمرتبة صفر. فنجد أن $x_3 = 1$.

(ح) نتثبت من أن: $N_3 = N - x_3^2 - [2(x_1 + x_2) + 31]\,x_3 = 0$

يعطي الطوسي جدولاً مجملاً - حذفه الناسخ - لكننا تمكّنا من إعادة إنشائه طبقاً للوصف الكتابي للمؤلف وأضفنا فقط إلى جانب الجدول رموزاً لما عبّر عنه الطوسي بكلمات.

٢ - الحالة الثانية: $\left[\frac{m}{2}\right] \leq k$

وهي الحالة حيث $\left[\frac{m}{2}\right] \leq k$. لتحديد الرقم الأول من الجذر يلجأ الطوسي إلى قسمة N على a_l أو إلى طرح المربع الأكبر، فإذا كانت القسمة تعطي

الإشارة إلى هذا الرقم أحياناً، فهي في أحيان أخرى لا تعطي أية إشارة. وبالنسبة إلى ما تبقى فالطريقة هي نفسها، وتستعمل أيضاً مع بعض التكيّفات في حالة المعامـلات السالبة. وهكذا بالنسبة إلى المعادلة:

$$x^2 + 578442 = 2123\,x$$.[٢٨]

لدينا الجدول التالي:

جدول رقم (٣ - ٢)

$x^2 + 578442 = 2123\,x$
$a_1 = 2123$
$f(x) = x^2 - 2123\,x$

				3	2	1
			3	2		
		3				
		0		0		0
N	5	7	8	4	4	2
$x_1(a_1 - x_1)$	5	4	6	9		
				0		0
$N_1 = N - f(x_1)$		3	1	5	4	2
$(a_1 - 2x_1 - x_2)\,x_2$		3	0	0	6	
						0
$N_2 = N - f(x_1 + x_2)$			1	4	8	2
$(a_1 - 2x_1 - 2x_2 - x_3)\,x_3$			1	4	8	2
$N_3 = 0 = N - f(x_1 + x_2 + x_3)$						
$a_1 - 2x_1 - 2x_2 - x_3$			1	4	8	2
$a_1 - 2x_1 - 2x_2$			1	4	8	3
$(a_1 - 2x_1 - 2x_2)\,10$		1	4	8	3	
$(a_1 - 2x_1 - x_2)\,10$		1	5	0	3	
$(a_1 - 2x_1)\,10$		1	5	2	3	
$(a_1 - 2x_1)\,10^2$	1	5	2	3		
$(a_1 - x_1)\,10^2$	1	8	2	3		
$a_1 10^3$	2	1	2	3		

من الـواضح أن الـطوسي يطبق طـريقتـه عـلى المعـادلـة $x^2 + a_1 x = N$ حيث $a_1 \in \mathbb{Z}$. هذه الطريقة تطول المعادلات التكعيبية الموضوع الأسـاسي لكتاب الـطوسي

(٢٨) انظر: الطوسي، «قوام الحساب،» ص ٥١ (وجه الورقة)، و ٥٢ (ظهر الورقة).

دون تغيير في الأفكار الأساسية أو تعديل ملحوظ في مستوى العرض. لنعط بعض الأمثلة:

.[٢٩]$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x = N$

جدول رقم (٣ - ٣)

$x^3 + 12x^2 + 102x = 34\,345\,395$
$a_1 = 12$
$a_2 = 102$
$f(x) = x^3 + 12x^2 + 102x$

						3	2	1
				3	2			
		3						
		0			0			0
N	3	4	3	4	5	3	9	5
x_1^3	2	7						
$3(x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2)\, x_1$		1	1	1	0	6		
					0			0
$N_1 = N - f(x_1) = N - x_1^3 - a_1 x_1^2 - a_2 x_1$		6	2	3	4	7	9	5
x_2^3					8			
$3[(x_1^2 + 2x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2) + (x_1 + \frac{1}{3} a_1)\, x_2]\, x_2$		5	9	1	0	8	4	
$N_2 = N - f(x_1 + x_2)$			3	1	5	9	5	5
x_3^3								1
$3[(x_1^2 + 2x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2) + (x_1 + \frac{1}{3} a_1)\, x_2 + (x_1 + \frac{1}{3} a_1 + x_2)\, x_2 + (x_1 + x_2 + \frac{1}{3} a_1)\, x_3]\, x_3$			3	1	5	9	5	4
$[(x_1^2 + 2x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2) + (x_1 + \frac{1}{3} a_1)\, x_2 + (x_1 + \frac{1}{3} a_1 + x_2)\, x_2 + (x_1 + x_2 + \frac{1}{3} a_1)\, x_3]$			1	0	5	3	1	8
$[(x_1^2 + 2x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2) + (x_1 + \frac{1}{3} a_1)\, x_2 + (x_1 + \frac{1}{3} a_1 + x_2)\, x_2]$			1	0	4	9	9	4
$[(x_1^2 + 2x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2) + (x_1 + \frac{1}{3} a_1)\, x_2 + (x_1 + \frac{1}{3} a_1 + x_2)\, x_2]\ 10$		1	0	4	9	9	4	
$[(x_1^2 + 2x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2) + (x_1 + \frac{1}{3} a_1)\, x_2]\ 10$			9	8	5	1	4	
$(x_1^2 + 2x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2)\ 10$			9	2	4	3	4	
$(x_1^2 + 2x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2)\ 10^2$		9	2	4	3	4		
$(x_1 \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2)\ 10^2$			1	2	3	4		
$\frac{1}{3} a_1 10^4 + \frac{1}{3} a_2 10^2$				4	3	4		
$\frac{1}{3} a_2$							3	4
$\frac{1}{3} a_2 10^2$					3	4		
$\frac{1}{3} a_2 10^4$			3	4				

---

(٢٩) المصدر نفسه، ص ٨٧ (ظهر الورقة)، و ٨٢ (وجه الورقة).

ويميّز الطوسي دائماً ثلاث حالات:

الحالة الأولى

$\left[\frac{m}{3}\right]>k_1$ و $\left[\frac{m}{3}\right]>\left[\frac{k_2}{2}\right]$ حيث k_1 و k_2 هي بالتتالي مراتب a_1 وَ a_2.

مثال: $x^3+12x^2+102x=34345395$

المناقشة هي من النوع نفسه الخاص بالمعادلة من الدرجة الثانية، المقصود أيضاً نقل المناقشة السابقة للحالة حيث $n=3$. لهذا السبب سنعطي من الآن فصاعداً الجداول وحدها.

الحالة الثانية

$\left[\frac{m}{3}\right]<\left[\frac{k_2}{2}\right]$ وَ $k<\left[\frac{k_2}{2}\right]$ حيث k_1 وَ k_2 هي بالتتالي مراتب a_1 و a_2

مثال: $x^3+6x^2+3000000x=996694407$

جدول رقم (٣ - ٤)

$x^3+6x+3000000x=996694407$
$a_1=6$
$a_2=3000000$
$f(x)=x^3+6x+3000000x$

							3	2	1
					3	2			
			3						
			0			0			0
N	9	9	6	6	9	4	4	0	7
x_1^3			2	7					
$3(x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)\,x_1$	9				5	4			
						0			0
$N_1=N-f(x_1)$		6	9	1	5	4	4	0	7
x_2^3						8			
$3[x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)+(x_1+\frac{1}{3}a_1)\,x_2]\,x_2$		6	5	8	3	4	4		
									0
$N_2=N-f(x_1+x_2)$			3	3	1	2	0	0	7
x_3^3									1
$3[(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)+(x_1+\frac{1}{3}a_1)\,x_2+(x_1+\frac{1}{3}a_1+x_2)\,x_2+(x_1+x_2+\frac{1}{3}a_1)\,x_3]\,x_3$			3	3	1	2	0	0	6
$[(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)+(x_1+\frac{1}{3}a_1)\,x_2+(x_1+\frac{1}{3}a_1+x_2)\,x_2+(x_1+x_2+\frac{1}{3}a_1)\,x_3]$			1	1	0	4	0	0	2
$[(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)+(x_1+\frac{1}{3}a_1)\,x_2+(x_1+\frac{1}{3}a_1+x_2)\,x_2]$			1	1	0	3	6	8	
$[(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)+(x_1+\frac{1}{3}a_1)\,x_2+(x_1+\frac{1}{3}a_1+x_2)\,x_2]\,10$		1	1	0	3	6	8		
$[(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)+(x_1+\frac{1}{3}a_1)\,x_2]\,10$		1		9	7	2	4		
$(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)\,10$		1		9	1	2			
$(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)\,10^2$	1		9	1	2				
$(x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2)\,10^2$	1				6				
$\frac{1}{3}a_1 10^4+\frac{1}{3}a_2 10^2$	1				2				

الحالة الثالثة

$$\left[\frac{k_2}{2}\right]<k_1 \quad \text{و} \quad \left[\frac{m}{3}\right]<k_1$$

كمثل: $x^3+30000x^2+20x=3124315791$

الطريقة هي هي مع هذا التعديل البسيط المفروض بسبب الشروط التي وردت أعلاه: يقترح الطوسي أن نقسم هنا بـ «عدد المربعات» (معامل x^2) للحصول أولاً على الرقم الأول للجذر أو كما يكتب: «نضع [في الجدول] عدد المربعات كما المقسوم عليه والعدد كما المقسوم، نستخرج العامل ونعرف درجته». ولكي نبين أخيراً أن الطوسي طبق طريقته على دالّة كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة ($\mathbb{Z}$) نأخذ كمعادلة أخيرة:

$$x^3-a_1x^2-a_2x-c=0$$

ولن نعالج سوى الحالة الأولى حيث $\left[\frac{m}{3}\right]>k_1$ وَ $\left[\frac{m}{3}\right]>\left[\frac{k_2}{2}\right]$

مثال: $x^3=30x^2+600x+29792331$ (فوق 30 و600: 0 0 0) المعالج في الجدول رقم (٣ - ٥)

هذه الأمثلة المختلفة تظهر أن طريقة الطوسي عامة وجيدة الإحكام. ورغم أن هذه العمومية تبقى ضمنية بصورة ما لأسباب متعددة البواعث دون شك، فبالإمكان إدراك مغزاها. والحقيقة أن نص الطوسي مختصر جداً كما لو أنه كان معداً في الأصل لنوع معين من التعليم، أي مصاحباً بالضرورة بشرح شفهي. تحت هذا الشكل تظهر المخطوطة الوحيدة المحقّقة حتى الآن، وأخطاء النقل التي ارتكبها الناسخ لا تسهل الفهم إطلاقاً، إضافة إلى أسباب أخرى جوهرية تعقد المهمة. أمن المحتمل أن الحضور الضمني لمفاهيم على درجة من الأهمية مثل «المشتق» جعل عبارة المؤلف تلميحية؟ دون هيكلية مستقلة ودون عنوان يبقى المفهوم بحد ذاته إضافة إلى طريقة عرضه مسألة تبحث عن حل أكثر من كونها وسيلة للحل كما سوف نرى:

$$x^3+a_1x^2+a_2x=N \qquad (1)$$

يكتب الجذر كما نعلم: $x=\alpha\,10^2+\beta\,10+\gamma$

سوف يحدد الطوسي بالتتالي كلاً من: α,β,γ

سنشير إلى دالّة المتغير الحقيقي بـ $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x$

إن المقارنة بين المرتبة العشرية للجذر المطلوب ومراتب معاملات (1) تسمح

جدول رقم (٣ - ٥)

$$x^3 - 30x^2 - 600x = 29\,792\,331$$
$$a_1 = -30$$
$$a_2 = -600$$
$$f(x) = x^3 - 30x^2 - 600x$$

						3	2	1
				3	2			
		3						
N		0			0			0
x_1^3	2	9	7	9	2	3	3	1
$+3(\frac{1}{3}x_1a_1 + \frac{1}{3}a_2)\,x_1$	2	7						
		2	8	8				
					0			0
$N_1 = N - f(x_1) = N - x_1^3 + a_1x_1^2 + a_2x_1$		5	6	7	2	3	3	1
x_2^3					8			
$3[(x_1^2 - 2x_1\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2) + (x_1 - \frac{1}{3}a_1)\,x_2]\,x_2$		5	3	7	6			
$N_2 = N - f(x_1 + x_2)$								0
x_3^3			2	8	8	3	3	1
$3[(x_1^2 - 2x_1\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2) + (x_1 - \frac{1}{3}a_1)\,x_2$								1
$+ (x_1 - \frac{1}{3}a_1 + x_2)\,x_2 + ((x_1 + x_2) - a_1)\,x_3]\,x_3$			2	8	8	3	3	
$N_3 = N - f(x_1 + x_2 + x_3)$								
$[(x_1^2 - 2x_1\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2) + (x_1 - \frac{1}{3}a_1)\,x_2$								
$+ (x_1 - \frac{1}{3}a_1 + x_2)\,x_2 + ((x_1 + x_2) - a_1)\,x_3]$				9	6	1	1	
$[(x_1^2 - 2x_1\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2) + (x_1 - \frac{1}{3}a_1)\,x_2$								
$+ (x_1 - \frac{1}{3}a_1 + x_2)\,x_2]$				9	5	8		
$[(x_1^2 - 2x_1\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2) + (x_1 - \frac{1}{3}a_1)\,x_2$								
$+ (x_1 - \frac{1}{3}a_1 + x_2)\,x_2]\,10$			9	5	8			
$[(x_1^2 - 2x_1\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2) + (x_1 - \frac{1}{3}a_1)\,x_2]\,10$			8	9	6			
$(x_1^2 - 2x_1\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_2)\,10$			8	3	8			
$(x_1^2 - 2x_1\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_2)\,10^2$		8	3	2				
$\frac{1}{3}x_1a_1 10^2 + \frac{1}{2}a_2 10^2$			3	2				
$\frac{1}{3}a_2 10^2$				2				
$\frac{1}{3}a_1 10^4$			1					

كما رأينا بضبط اختيار معاملات مختلف الأرقام الخاصة بالجذر. إن تحديد هـذه الأرقام بالمعنى الدقيق والآلي إلى حدٍ ما يحصل بالطريقة التالية:

يتمّ تحديد $x_1 = \alpha\, 10^2$ وفقاً للحالة، إما بالقسمة، أو بـالبحث عن أكبر مكعب يتضمنه N.

نكتب $x = x_1 + x_2$ ونسعى لتحديد x_2 . ويكون لدينا وفقاً لـ (1):

$$N = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + N_1$$

إذن: $$N_1 = (3x_1^2 + 2a_1x_1 + a_2)\, x_2 + (3x_1 + a_1)\, x_2^2 + x_2^3$$

تحدّد N_1 وفق اختيار x_1 ويحصل الطوسي على قيمة تقريبية x_2' لـ x_2، وبإهمال الحدود ذات المراتب الأعلى من 1 في N_1 يحصل على:

$$x_2' = \frac{N_1}{3x_1^2 + 2a_1x_1 + a_2} = \frac{N_1}{f'(x_1)} \qquad (2)$$

نشير بـ f' إلى الدالّة المشتقة من f، نكتب الآن: $x = ((x_1 + x_2') + x_3)$

ونسعى إلى تحديد x_3. فنفرض:

$$N_2 = N - f(x_1 + x_2') = 3(x_1 + x_2')^2 x_3 + 2a_1(x_1 + x_2')\, x_3 + a_2 x_3$$
$$+ 3(x_1 + x_2')\, x_3^2 + x_3^2 + x_3^3$$

نستخدم N_2 لتحديد x_3 بالطريقة نفسها التي استخدمنا بها N_1 لتحديد x_2'.

وبعبارة أخرى، الطريقة عامة وإذا ما كان الطوسي قد طبقها على المعادلات من درجة أقل أو مساوية لثلاث فقط، فذلك ضمن الحدود التي تتناول تكوين نظرية هذه المعادلات. إن الحالة العامّة لا تتطلب مفاهيم أخرى مجهولة من قبل المؤلف. لتكن إذن المعادلة التالية:

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = N \qquad (3)$$

ولنفرض: $$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x$$

إن الدالّة قابلة للإشتقاق عدة مرات ككل الدوال التي درسها الطوسي. وبإمكاننا معرفة المجال الذي ينتمي إليه الجذر، ليكن $x \in [10^r, 10^{r+1}[$. يكون لـ x الشكل التالي: $\varrho_0 10^r + \varrho_1 10^{r-1} + \cdots + \varrho_r$ بحيث إن $r = \left[\frac{m}{n}\right]$

وحيث m هو المرتبة العشرية لـ N.

نحدّد x_1 كما ورد أعلاه أي إما بالقسمة أو بالبحث عن العدد الصحيح الأكبر للقوة n المتضمنة في N.

نفرض: $N_1 = N - f(x_1)$

و $x=x_1+x_2$ و $N_1=g(x_2)$ حيث g هي كثيرة الحدود من x_2 بدرجة $(n-1)$.

نحصل على قيمة تقريبية x_2' لِـ x_2، حيث x_2' محدّدة كما يلي:

$$N_1=n x_1^{n-1} x_2'+a_1(n-1)\, x_1^{n-2} x_2'+\cdots+2a_{n-2} x_1 x_2'+a_{n-1} x_2'. \tag{4}$$

نتعرّف هنا على مشتقة f في النقطة x_1، وَ:

$$x_2'=\frac{N_1}{f'(x_1)}. \tag{5}$$

بمعاودةٍ متتاليةٍ للعملية نفترض أننا حدّدنا كلاًّ من: $x_1, x_2', \ldots, x_{k-1}'$

وَ $x=x_1+x_2'+\cdots+x_{k-1}'+x_k$ حيث $k=2, \ldots, n$

x هو القيمة التقريبية لِـ x_k: وَ x_k' معطاة بواسطة الصيغة:

$$x_k'=\frac{N_k}{f'(X_{k-1})} \tag{6}$$

حيث: $N_k=N-f(x_1+x_2'+\cdots+x_{k-1}')$

$$X_{k-1}=x_1+x_2'+\cdots+x_{k-1}'.$$

وهكذا فإن قيمة تقريبية لِـ x تصبح كما يلي:

$$x_1+x_2'+\cdots+x_n'$$

حيث تعطي الصيغة (6) قيم x_i'.

نجد إذن أن التعميم لا يتطلب أبداً إدخال مفاهيم جديدة غير مستعملة في الأمثلة التي درسها المؤلف.

ومع ذلك يجب ألاّ نفاجأ بِـ (4) ففي الواقع، إذا كانت f كثيرة حدود من درجة n فإن:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+x_2 f'(x_1)+\frac{x_2^2}{2} f''(x_1)+\cdots+x_2^n \tag{7}$$

وكذلك:

$$f(x_1+x_2'+\cdots+x_{k-1}'+x_k)= \tag{8}$$

$$f(x_1+x_2'+\cdots+x_{k-1}')+x_k f'(x_1+x_2'+\cdots+x_{k-1}')+\cdots+x_k^n$$

وهذا ما يوضح الصيغة (6).

لكننا إذا ما تحدثنا بلغة «المشتق»، ألا ننزلق بغفلة منا إلى معنى غريب عن نظرية الطوسي؟ سوف نعود إلى هذه المسألة فيما بعد، يكفي الآن أن نلاحظ:

١ - انه في كل هذه الأمثلة وبطريقة منتظمة جداً يستعمل الطوسي بشكل منهجي بالنسبة الى المقسوم عليه عبارات تتطابق جبرياً مع المشتق الأول.

٢ - انه في هذا المجال، حتى لو لم يشر بوضوح إلى الدوال فهذا الغياب حاضر مسبقاً، خاصة عندما يتعلق الأمر بتحديد الجذر الصحيح الموجب لمعادلة عددية بواسطة طريقة التقريبات المتعاقبة، هذا من جهة. ومن جهة أخرى حتى لو لم يبحث الطوسي إلا عن هذه الجذور الموجبة فطريقته تسمح أيضاً بالحصول على الجذور السالبة لِـ (1)، إذ يكفي أن تطبق باستبدال $f(x)$ بِـ $f(-x)$.

٣ - وكما سوف نرى، فإن العبارة الجبرية لِـ «المشتق» قد استُعملت خلال مناقشة مسألة وجود جذور المعادلات الجبرية. إن المعادلات العددية التي عالجها الطوسي هي دائماً بالنسبة إليه بمثابة مثلٍ عن هذه المعادلات الجبرية التي برهن سابقاً وجود جذور لها.

قبل استعادة هذه الأسئلة، أي قبل إعادة وضع حل المعادلات العددية إلى مكانه في عمل المؤلف الجبري، لندرس الصلات بين طريقة الطوسي وطريقة ڤيت.

- ٣ -

إن عمل ڤيت فيما يتعلق بالمعادلات العددية ليس أقل سهولة للتناول من دراسة الطوسي. وكما قلنا سابقاً، فإن الطوسي يستعمل الطريقة كجزء من معرفة رياضية مكتسبة، ومن العبث على كل حال أن نبحث في مؤلفه عن كيفية انتقال هذه المعرفة وبواسطة مَن. المهم في هذه الطريقة يكمن في الجداول. وباستثناء بعض التبريرات حول مقارنة المراتب العشرية ومفكوك الصيغة $(a + b + \ldots + k)^n$ حيث $n = 2, 3$، والقسمة والعبارات التي يجب إدخالها في الجدول، فإن النص لا ينطق بشيء عن المساهمة الخاصة بالطوسي أو بتلك التي استطاع إستعارتها من سابقيه.

كان بإمكاننا توقع حالة مختلفة مع ڤيت لكن ذلك لم يحصل، فعدا التبريرات المشابهة لتلك الخاصة بالطوسي، وهي تكاد لا تكون أكثر وضوحاً ورغم أن مؤلفه مطبوع وليس مخطوطاً، لا نجد فيه سوى تأملات عامة في «الاتجاه التحليلي».

في هذه الحالة كما في تلك لا تقدم معرفة المبتكر فائدة تذكر إن بالنسبة إلى

السيرة الذاتية أم بالنسبة إلى مسألة التبرير الفعلي، أي ما هي المفاهيم الرياضية التي ساهمت في ابتكار هذه الطريقة؟ ففي حالة ڤيت وبخصوص هذه المفاهيم تحديداً تتشعب التفسيرات. إن تضارب التفسيرات قد بدأ منذ القرن الماضي على أية حال. ويكفي للإقتناع بهذا أن نذكر أسماء بعض مشاهير المؤرخين مثل: هانكل (Hankel) و ريتر (Ritter) و كنتور (Cantor) و اينستروم (Eneström) و تروبفك (Tropfke).

إن نص ڤيت لا يقدم مساعدة كبيرة بالنسبة إلينا والجوهري يبقى دوماً في الجداول. ومع ذلك فالنص يفيدنا بما يلي:

- يجري حل «القوى المقترنة» بالأسلوب نفسه لحل «القوى البحتة»[٣٠].

- الحل هو «تحليلي» أي أنه يتبع المسار المعاكس للمسار المتبع بتشكيل القوى المقترنة مراعياً الموضع والمرتبة والتزايد والتناقص للمعاملات كما تلك التي للمجهول[٣١].

إذا كانت هذه الإعتبارات مشابهة لإعتبارات الطوسي ولكن معبر عنها باللغة التي نعرفها، فهناك فارق مهم يظهر منذ البداية ولا يمكن تجاهله بين الرياضيين. فبينما يبرهن الطوسي، في البداية، وجود جذر أو عدة جذور موجبة للمعادلات، حيث المعادلات العددية هي النماذج على ذلك، نجد أن ڤيت لا يطرح هذه المسألة في أي مكان من مؤلفه، ويقدم المعادلة العددية المطلوب حلها دون شرح تمهيدي. هذا الفارق سيكون على أية حال هدفاً للتفكير عند أولئك الذين كانوا دائماً ضحية لأسطورة خلقها رينان (Renan) وتانيري (Tannery)... الخ أي الذين قابلوا ما بين المظهر العملي القابل للحساب للرياضيات العربية وبين الطابع النظري للرياضيات اليونانية ورياضيات عصر النهضة. ولدراسة ڤيت سوف نبدأ بالمعادلة التالية:

$$1Q+7N \text{ يساوي } 60750$$

---

(٣٠) François Viète, *De numerosa potestatum purarum, atque adfectarum* (Leiden, 1646), reproduction (Olms, 1970). «Numerosam resolutionem potestatum purarum imitatur proxime resolutio adfectorum potestatum ...,» pp.173, and 221.

(٣١) انظر: المصدر نفسه:

«Intelligunter videlicet componi adfectae potestates à duobus quoque lateribus, immiscentibus se subgradualibus magnitudinibus, una vel pluribus, & in eadem resolvuntur contratria compositionis via, observato coefficientium subgradualium, sicut potestatis & parodicorum graduum, congruente situ, ordine, lege, et progressu».

يبدأ ڤيت كما الطوسي بتفريق الشرائح من رقمين ابتداء من اليمين، وعوضاً عن وضع الأصفار فوق مراتب المربعات فهو يضع نقاطاً تحت هذه المراتب نفسها[32]:

ثم يعطي الجداول التالية:

جدول رقم (٣ - ٦)

أ - استخراج الضلع الأول الجزئي

المعامل الخطي		7		تحت الجانب، عدد من	عدد أصفار 0 0 0
		.	. .	النقاط الجانبية بقدر	بقدر نقاط تربيعية N. 2 4.
				النقاط التربيعية	أو أضلاع جزئية Q. 4 16.
	6	0 7	5 0	النقط التربيعية	
	.	N .	N ..		
	Qj	Qij	Qiij	مربع الضلع الأول	
سطوح يجب طرحها	4				
		1 4		سطح الضلع الأول بالمعامل	
مجموع سطوح يجب طرحها	4	1 4			
باقي المربع المقترن الواجب حله	1	9 3	5 0		

(٣٢) انظر: Viète, Ibid. p.174,
حيث يكتب: «Ex adfecto igitur quadrato ut eruantur latera, sedes unitatum quadrata singularia metientium per binas alternas, ut in analysi puri quadrati, distinguuntur figuras punctis commode à dextra ad laevam subtus collocatis».

ب - استخراج الضلع الثاني الجزئي

معامل خطي { ضلع جزئي أعلى للقواسم			7	
باقي المربع المقترن الذي يجب حلّه	1	9 3̣	5 0̣	
ضعف الضلع الأول { الجزء الأدنى للقواسم		4		
مجموع القواسم		4 0	7	
مجموع سطوح يجب طرحها	1	6		الضلع الثاني مضروب بضعف الأول
		1	6	مربع الضلع الثاني
		2	8	الضلع الثاني مضروب بالمعامل
مجموع سطوح يجب طرحها	1	7 8	8	
الباقي من المربع المقترن الذي يجب حلّه؟؟		1 4	7 0	

ج - استخراج الضلع الثالث الجزئي كما لو أنه الثاني

معامل طول { الجزء الأعلى للقواسم		7̣	0 0 0 / N 2 4. 3 / Q 57 6. 9
باقي المربع المقترن الذي يجب حلّه	1 4	7 0	
ضعف الضلع الخارجي { الجزء الادنى للقواسم	4	8	
مجموع القواسم	4	8 7	
سطوح يجب طرحها	1 4	4	الضلع الثاني مضروباً بضعف الأول
		9	مربع الضلع الثاني
		2 1	الضلع الثاني مضروباً بالمعامل
مجموع السطوح التي يجب طرحها تعادل باقي المربع المقترن الواجب حلّه	1 4	7 0	

نستنتج أنه إذا كانت $IQ + 7N$ تعادل 60750 فإن IN تعادل 243 «بالضبط وفقاً للوجهة المعاكسة الخاصة بالتشكيل»، كما يكتب ڤيت.

إن أفضل وسيلة لمقارنة طريقتي ڤيت والطوسي تكمن دون شك في استعادة مثل ڤيت ومعالجته بطريقة الطوسي في الجدول (٧). نلاحظ عندئذ أن القسم (١) من (٦)

وأن القسمين (١ ، ١') من (٧) وأن (٢) من (٦) وَ(٢ ، ٢') من (٧) وأن (٣) من (٦) وَ(٣ ، ٣') من (٧) هي متكافئة على التوالي.

وعدا عن ذلك، عندما نعلم **أن الطوسي يعطي**، فضلاً عن الجداول المجمعة، التي حذفها الناسخ، جداول جزئية خلال الوصف، لا يمكننا إلا أن نندهش أمام التشابه. والفارق الوحيد هو في أن فيت عوضاً عن أن يضع الأصفار فوق الأرقام، يضعها تحتها وعوضاً عن وضع القواسم نهائياً في أسفل الجدول مع فارق الضرب بمعامل تقريباً، فهو يضعها بطريقة ما في أعلى الجدول.

جدول رقم (٣ - ٧)

		2	4	3	
	2	4			
2					
0		0		0	x_1^2
6	0	7	5	0	
4					a_1x_1
	1	4			
		0		0	$N_1=N-f(x_1)$
1	9	3	5	0	x_2^2
	1	6			
1	6	2	8		$(2x_1+a_1)\ x_2$
				0	$N_2=N-f(x_1+x_2)$
	1	4	7	0	x_3^2
				9	$(2x_1+2x_2+a_1)\ x_3$
	1	4	6	1	
					$N_3=N-f(x_1+x_2+x_3)$
		4	8	7	$2x_1+2x_2+a_1$
	4	8	7		$(2x_1+2x_2+a_1)\ 10$
	4		7		$(2x_1+a_1)\ 10$
4		7			$(2x_1+a_1)\ 10^2$
		7			$a_1 10^2$

إن الفارق بين الطريقتين ليس جوهرياً ويترك التماثل بينهما على حاله.

ويستمر هذا التشابه لدى مواجهة الحالات الأخرى للمعادلة من الدرجة الثانية. وهكذا في الحالة حيث $\left[\frac{m}{2}\right]>k$ وجدنا أن الطوسي يؤخر المعامل كي يتمكن

من إجراء القسمة[٣٣].

كما يظهر في المثل الذي يعطيه: $954N + 1Q$ يعادل 18487

وبما أن اختيار القواسم مهم بالنسبة إلى شرح الطريقة، فنلاحظ بالنسبة إلى هذا المثل نص ڤيت[٣٤].

إذا طبقنا ما كتبه ڤيت على المثل المعالج، نأخذ كجزء من القواسم ما نرمز اليه بـ $2x_1$ دون أن نهمل بالطبع، وضعها في مكانها وحسب الترتيب الذي يناسبها. يبقى أيضاً أن ندرج بالعناية نفسها بين القواسم العليا «المقادير التي هي معاملات» وهي هنا a_1 ولدينا أخيراً كمجموع قواسم: $a_1 + 2x_1$ وهو ما يسمح بتحديد x_2.

بالنسبة إلى المعادلات من الدرجة الثانية بإمكاننا إذن أن نؤكد أنه لا يوجد فارق ملحوظ بين طريقة الطوسي وطريقة ڤيت. فهل هناك فارق مهم بالنسبة إلى المعادلات من درجة أعلى؟

لدرس هذا السؤال سوف نجري الطريقة نفسها التي تمت للمثل السابق على المعادلة: $IC + 30N$ تساوي 14.356.197. بإمكاننا توقع رؤية ظهور الفارق المهم بين الطريقتين. ففي الواقع، ان نص ڤيت يترك مجالاً للإفتراض أن مجموع القواسم الذي يسمح بتحديد x_2 سيكون في هذه الحالة $a_1 + 3x_1 + 3x_1^2$، فتغير الطريقة من طبيعتها بعض الشيء.

---

(٣٣) المصدر نفسه، ص ١٧٥، حيث يعبّر ڤيت بتعابير مشابهة عندما يكتب:
«Coefficiens itaque ad succedentes sedes ordine revocanda est, donec sit locus divisioni, à qua tunc opus inchoare magis consentaneum est».

(٣٤) في القاعدة الثالثة في استنتاجاته يكتب ڤيت في موضوع تشكيل القواسم وترتيبها ومكانها بعد استخراج الضلع الأول الجزئي، انظر: المصدر نفسه، ص ٢٢٦:
«Tertia cura esto, ut post eductionem primi lateris singularis & emendatam congrua subductione expositam resolutioni magnitudinem, dividentes scansoriae in suo collocentur site of ordine, tam superius quam inferius. Ac inferius quidem collocentur multiplices laterum elicitorum gradus parodici, ipsimet qui dividerent in analysi purae potestatis, ut pote.
In analysi quadrati dumplum lateris eliciti.
In analysi cubi, Prima, dividen scansoria magnitudo, Triplum lateris eliciti.
Secunda, triplum quadratum ejusdem».

جدول رقم (٣ ـ ٨)

أ ـ استخراج الضلع الأول الجزئي

معامل السطح					3	0 ·	·	·	عدد الأصفار 0 0 0 تحت الجانبي
مكعب مقترن يجب حلّه	1	4	3	5	6	1	9	7	بمقدار النقاط N.2 4 بمقدار نقاط التكعيبية حيث Q.4.16 الأضلاع الجزئية الأضلاع الجزئية C 8.64 نقاط تكعيبية أو أماكن لمكعبات
		· Cj	Q	N	· Cij	Q	N	· Ciij	
مجسمات يجب طرحها أولاً		8							مكعب الضلع الأول
					6	0			حاصل ضرب الضلع الأول بمعامل السطح
مجموع المجسمات الواجب طرحها		8	0	0	6	0			
باقي المكعب المقترن الواجب حلّه		6	3	5	0	1	9	7	

ب ـ استخراج الضلع الثاني الجزئي

الأجزاء العليا للقواسم (معامل السطح)	·				3	0 ·	·	
باقي المكعب المقترن الواجب طرحه	6	3	5	0 ·	1	9	7 ·	
الأجزاء السفلى من القواسم: ثلاثي التربيع للضلع الأول	1	2						
الأجزاء السفلى من القواسم: ثلاثي الضلع الأول			6					
مجموع القواسم	1	2	6	0	3	0		
مجسمات يجب طرحها	4	8						حاصل ضرب الضلع الثاني بثلاثي مربع الضلع الأول
		9	6					حاصل ضرب مربع الضلع الثاني بثلاثي الضلع الأول
			6	4				مكعب الضلع الثاني
				1		2	0	حاصل ضرب الضلع الثاني بمعامل السطح
مجموع المجسمات التي يجب طرحها	5	8	2	5	2	0		
باقي المكعب المقترن الواجب حلّه		5	2	4	9	9	7	

ج - استخراج الضلع الثالث الجزئي كما لو أنه الضلع الثاني

معامل المستوى } الجزء الأعلى من القواسم		3 0 .	
باقي المكعب المقترن الواجب حله	5 2 4	9 9 7	
ثلاثي مربع الضلع الأول } الجزء الأعلى من القواسم	1 7 2	8	
ثلاثي الضلع الأول		7 2	
مجموع القواسم	1 7 3	5 5 0	
مجسمات يجب طرحها	5 1 8	4	حاصل ضرب الضلع الثاني بثلاثي مربع الضلع الأول
	6	4 8	حاصل ضرب الضلع الثاني بثلاثى الضلع الأول
		2 7	مكعب الضلع الثاني
		9 0	حاصل ضرب الضلع الثاني بمعامل السطح
مجموع المجسمات الواجب طرحها يساوي باقي المكعب المقترن الواجب حله	5 2 4	9 9 7	

إذا كانت $IC + 30N$ تساوي $14,356,197,IN$ و 243 باتباع الإتجاه نفسه ولكن بمنحنى معاكس لاتجاه التشكيل.

ولمقارنة الطريقتين، لنستعد المثال نفسه حسب الطوسي في الجدول رقم (٣ - ٩).

نلاحظ إذن أن «مجموع القواسم» يكف عن أن يكون هو نفسه عندما نطبق طريقة الطوسي على أمثلة ڤيت. فبينما يكون هذا المجموع 1260300 في القسم الثاني من الجدول الخاص بڤيت فهو 1200300 حسب طريقة الطوسي. فإلامَ يرد هذا الفارق على وجه الدقة؟

كي نفهم هذا الفارق، نعود إلى المعادلة: $x^3+a_1x^2+a_2x=N$ التي نوقشت سابقاً، فقد رأينا في الواقع أن:

$$x_2' = \frac{N_1}{3x_1^2+2a_1\,x_1+a_2}$$

حيث $$N_1 = (3x_1^2+2a_1x_1+a_2)\,x_2+(3x_1+a_1)\,x_2^2+x_2^3$$

جدول رقم (٣ - ٩)

		0			0			0
x_1^3	1	4	3	5	6	1	9	7
$a_1 x_1$		8						
					6			
					0			0
$N_1 = N - f(x_1)$		6	3	5	0	1	9	7
x_2^3				6	4			
$3(x_1^2 + \frac{1}{3}a_1 + x_1 x_2)\ x_2$		5	7	6	1	2		
								0
$N_2 = N - f(x_1 + x_2)$			5	2	4	9	9	7
x_3^3							2	7
$3(x_1^2 + \frac{1}{3}a_1 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)\ x_3$			5	2	4	9	7	
$N_3 = N - f(x_1 + x_2 + x_3)$								
$x_1^2 + \frac{1}{3}a_1 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$				5	8	3	3	
$(x_1^2 + \frac{1}{3}a_1 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)\ 10$			5	8	3	3		
$(x_1^2 + \frac{1}{3}a_1 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_2)\ 10$			5	7	6	1		
$(x_1^2 + \frac{1}{3}a_1 + x_1 x_2)\ 10$			4	8		1		
$(x_1^2 + \frac{1}{3}a_1)\ 10$			4			1		
$(x_1^2 + \frac{1}{3}a_1)\ 10^2$		4			1			
$\frac{1}{3}a_1\ 10^2$					1			

وبالنسبة إلى ڤيت، لدينا:

$$N_1 = (3x_1^2 + 2a_1 x_1 + a_2)\ x_2 + (3x_1 + a_1)\{x_2\}\ x_2 + x_2^3$$

حيث $\{x_2\}$ تستبدل بـ10 عند إجراء القسمة وتتحول صيغة الطوسي السابقة إلى الصيغة التالية مع ڤيت:

$$x_2 = \frac{N_1}{(3x_1^2 + 2a_1\ x_1 + a_2) + 10\,(3x_1 + a_1)}$$

وبصورة أكثر عمومية، إذا عدنا إلى المعادلة (3) فإن (5) تصبح مع ڤيت:

$$x_2' = \frac{N_1}{f'(x_1) + \frac{10^{m-1}}{2} f''(x_1) + \cdots + \frac{10^{(n-2)(m-1)}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_1)}$$

ومنها نستنتج صيغة مقابلة لـ(6).

هذا هو إذن الفارق الوحيد المهم بين الطريقتين، وقد تمسكنا في أن نشـدد عليه لندفع مقارناتنا لأبعد ما يمكن. يبقى حسب رأينا أن طريقة ڤيت بجوهرهـا قريبـة من طريقة الطوسي والمسألة المختلف عليها ليست متشعبة التحديدات لدرجة أنها يمكن أن تجر بذاتها كل هذه المشابهة. إن الوسائل المعـروضة، وتفصيـلات العرض تتشـابه إلى الدرجة التي تسمح بالتساؤل: ألم يكن ڤيت على صلة بهذا التيار في الجبر العربي الذي يشكل الطوسي أحد ممثليه؟

- ٤ -

في الحالة الراهنة من تـاريخ الجـبر ليس بإمكـاننا القـول بدقـة حسب أي طرق وعبر أية معارج يمكن لأعمال هؤلاء الجبريين أن تعرف في زمن ڤيت. ما يمكننا افتراضه على الأقل هو أنه إذا كـان قد حصـل انتقال فهـو يستتبع تحـريفات. وفي الـواقع فـإن طريقة الطوسي هي بمعنى ما أكثر «حداثة» من طريقة ڤيت.

فمن كـلا الطريقتـين نجد أن طـريقة الـطوسي هي الأقرب إلى طـريقـة نيـوتن ورافسـون (Raphson) بـل إلى طـريقـة روفيني - هـورنـر. لكن قبـل استخـلاص استنتاجات متسرّعة، علينا توضيح نقطة ذات أهمية خاصة هي أن مجمـوع التفسيرات التي عبّر عنها تظهر منسجمة مع الواقع من وجهـة النظر الـرياضيـة وبإمكـاننا منـاقشة ذلك وحتى التأكد من صحته، لكنها تبدو مغـالية من وجهـة تاريخيـة. وبالفعـل، هل نملك الحق باستبدال عبارات جبريـة بعبارة «المشتق»، حتى ولو كانت بـالنسبة إلى لغـة أخرى مطابقة لمفهوم «المشتق»؟ بالإختصار هل نسمح لأنفسنـا بالحـديث بلغة أخـرى غير لغة النظرية التي نحن بصدد كتابة تاريخها؟

إن جـواباً شـافياً لهـذه الأسئلة يلزمنا بصنـع تاريـخ آخـر: أي تـاريـخ مفهـوم المشتق. وليس ذلـك من أجل ممـاثلة كائن ريـاضي معطى نهائيـاً مـرة واحـدة بصـورة ترنسندنتالية ولا تاريخية، بل على العكس، من أجل التعرف إلى كـائن رياضيّ ينـدرج في لغة أو أسلوب له تاريخه بالضرورة، ويتحدد بواسطة العرض والبرهـان. إنها مهمة مستحيلة بـالنسبة إلى حـدود هذه الـدراسة، لأنها تتـطلب استعـادة الفكـر الـريـاضي لإحدى كبريات المدارس الـرياضيـة العربيـة حيث تندرج أسـماء بشهرة ثـابت بن قرّة وابراهيم بن سنان والخازن والقوهي. . .

يكفينا هنا أن نبين الاستخدام المنهجي الذي استخدمه الطوسي لمفهوم «المشتق»

في أقسام أخرى من مؤلفه. نكتفي إذن بأن نبين أن الطوسي يفكر بالدالّة دون أن يذكرها، لكنه لجأ بطريقة منهجية إلى شكل آخر من هذا المفهوم الذي سوف يعرف لاحقاً بالمشتق. ونفهم عندها المعنى والموقع لطريقته في حل المعادلات العددية. لنعد إلى جبره ولنوضح هذه الأطروحة بمثال.

إن بحث الطوسي كما قلنا آنفاً هو بحث في المعادلات، حيث غرضه مدوّن في العنوان، أي أن المقصود على وجه الدقة هو جعل نظرية المعادلات من الدرجة الأدنى أو المساوية لثلاثة، مصاغة كلامياً. إن التصنيف الذي أعطاه الطوسي هو نفسه تصنيف الخيّام[٣٥]:

(1)	$x = a$	(2)	$x^2 = a$	(3)	$x^2 = ax$
(4)	$x^3 = ax^2$	(5)	$x^3 = ax$	(6)	$x^3 = a$
(7)	$x^2 + ax = b$	(8)	$ax + b = x^2$	(9)	$x^2 + a = bx$
(10)	$x^3 + ax^2 = bx$	(11)	$ax^2 + bx = x^3$	(12)	$x^3 + ax = bx^2$
(13)	$x^3 + bx^2 = a$	(14)	$x^3 + a = bx$	(15)	$a + bx = x^3$
(16)	$x^3 + bx^2 = a$	(17)	$x^3 + a = bx^2$	(18)	$a + bx^2 = x^3$
(19)	$x^3 + ax^2 + bx = c$	(20)	$a + bx + cx^2 = x^3$	(21)	$x^3 + a + bx = cx^2$
(22)	$x^3 + ax^2 + b = cx$	(23)	$a + x^3 = bx + cx^2$	(24)	$x^3 + ax^2 = bx + c$
(25)	$x^3 + ax = bx^2 + c$				

سنضع على أية حال تاريخ هذه النظرية، يكفي أن نذكّر هنا بالمسارات الأساسية للطوسي:

(١) لكي يحل المعادلات صنّفها إلى قطاعين، الأول يحتوي على المعادلات التي تملك دائماً حلولاً (يعطيها الطوسي)، والثاني يتعلق بالمعادلات التي ليس لها حل إلاّ باستيفاء شروط معينة، ويقوم بعد ذلك بإجراء المناقشة.

(٢) بواسطة تحويل افّيني: $x \rightarrow x + a$ أو $x \rightarrow a - x$ يحول المعادلات المطلوب حلها إلى أخرى يعرف حلها.

(٣) كي يحل هذه المعادلات، يدرس القيمة العظمى للعبارات الجبرية، ويأخذ «المشتق الأول» لهذه العبارات، ثم يعدمه ويبرهن أن جذر المعادلة التي يحصل عليها إذا ما عوض في العبارة الجبرية أعطى القيمة العظمى للعبارة.

---

(٣٥) الطوسي، «قوام الحساب،» ص ٤٢ (ظهر الورقة)، و٤٣ (وجه الورقة).

(٤) إنه لا يدرس «القيمة العظمى» لا للحجم ولا للمساحة لكنه يدرس «النهايات».

(٥) عند عثوره على أحد جذور المعادلة التكعيبية، يحصل، وذلك كي يتمكن من تحديد الجذر الآخر، أن يدرس معادلة من الدرجة الثانية، هي حاصل قسمة المعادلة التكعيبية على $(x-r)$ حيث r هو الجذر الذي عثر عليه. بعبارة أخرى، إنه يعرف أن كثيرة الحدود ax^3+bx^2+cx+d تقبل القسمة على $(x-r)$ إذا كان r جذراً للمعادلة: $ax^3+bx^2+cx+d=0$

(٦) قد يحصل له أنْ يعثر على هذه المعادلة من الدرجة الثانية من نوع لم يكن قد درسه سابقاً مثل $x^2-bx=c$ ، فيردّها عندئذ بواسطة تحويل افيني إلى نوع معادلة معروف.

(٧) بعد أن يكون قد درس المعادلة يحاول أن يعين حداً أقصى وحداً أدنى لجذورها.

(٨) إذا أعدنا تجميع المعادلات المتشابهة مثل: $ax^3+bx=c$ و $ax^3+c=bx$ و $ax^3=bx+c$ التي ليست سوى $ax^3+bx+c=0$ ، بإمكاننا عندئذ أن نعثر من جديد وبشكل مسبق على الصيغة المسماة صيغة «كاردان» (Cardan)، أو بعبارة أخرى، إن هذه الصيغة حاضرة موضعياً لا بشكلٍ شامل في حالة الجذور الحقيقية.

كل ما قلناه عن المسارات الأساسية للطوسي يسمح بشرح كيف أنه استطاع ابتكار طريقة الحل العددية أو بالأصح، كيف أن هذه الطريقة استطاعت أن تمكن من استعمال مفهوم «المشتق». لكن بعضاً من تأكيداتنا السابقة قد يكون مثاراً للدهشة. إننا مدركون جيداً لأبعادها، لكن علينا أولاً تقديم الدليل. وبما أن البرهان الوحيد المقنع هو في جعل نص الطوسي يتحدث عن نفسه، فسوف نأخذ ثلاثة أمثلة من مؤلف هذا الرياضي: الأول لكي نبيّن الدراسة الجبريّة للمنحنيات، والثاني كي نوسّع المناقشة التي تنبىء مسبقاً بكاردان (Cardan) عبر حضور الصيغة المسماة «صيغة كاردان»، والثالث لكي نستخلص كيف أن التحويل الافّيني، وقابلية القسمة والمشتق قد تناسقت في حل المعادلة.

١ ـ حل المعادلة $x^3=ax+b^1$ (٣٦)

كان الطوسي قد أعطى في مقدمة كتابه:

ـ معادلة القطع المكافىء بالنسبة إلى محورين متعامدين، حيث الأول هو محور القطع المكافىء، والآخر هو المماس في رأس القطع المكافىء.

ـ معادلة القطع الزائد بالنسبة الى محورين متعامدين حيث الأول هو محور القطع الزائد، والآخر هو المماس في رأس القطع الزائد.

ـ معادلة القطع الزائد المتعامد بالنسبة إلى خطّي تقاربه.

لكي يحل المعادلة المطلوبة، يلجأ إلى الطريقة التالية:

ليكن $AB=\sqrt{a}$ و $AC=\frac{b}{\overline{AB}^2}=\frac{b}{a}$. نرسم القطع المكافىء P، رأسه A و «ضلعه القائم» ـ ضعف الوسيط ـ $\sqrt{a}$، كذلك نرسم القطع الزائد E، رأسه A وقطره المجانب AC (انظر الرسم).

يبرهن الطوسي أولاً أن هذين المخروطين يتقاطعان في نقطة غير النقطة A، ويجري البرهان على الشكل التالي:

معادلة P تعطي (أنظر لاحقاً) $\overline{AS}^2=\overline{BM}^2$ إذن:

$$AS=BM=AN=NM \qquad (1)$$

ومعادلة E تعطي:

$NC\times AN=\overline{QN}^2$ لكنّ $NC\times AN>\overline{AN}^2=\overline{NM}^2$ إذن:

$$QN>NM \qquad (2)$$

وهذا يبين أن النقطة M هي داخل E. نأخذ الآن AF بحيث:

$$AF>4\,AB \qquad (3)$$

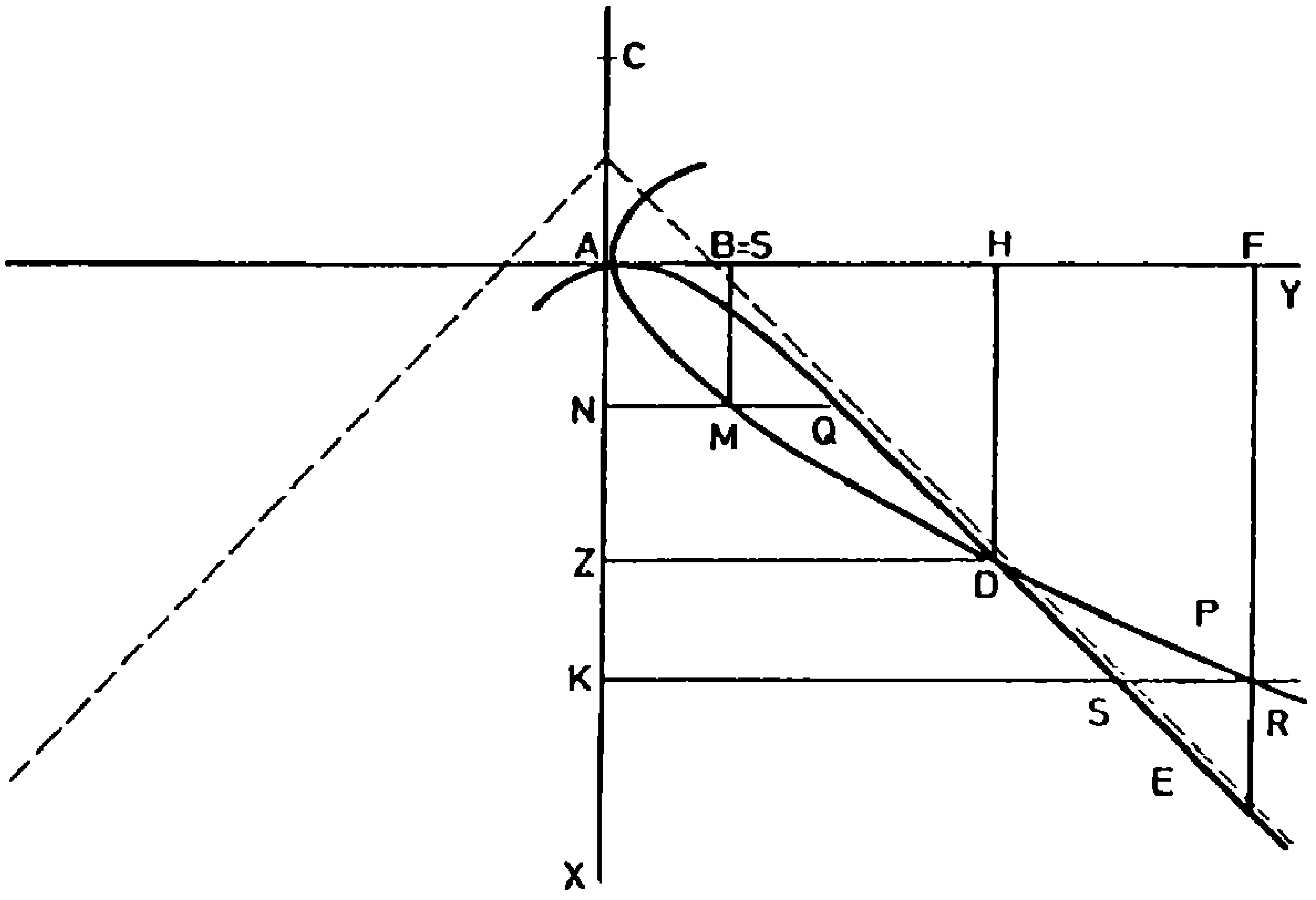
و

$$AF\times AB>\overline{AC}^2 \qquad (4)$$

---

(٣٦) المصدر نفسه، ص ٥٨ (وجه الورقة)، و ٥٩ (ظهر الورقة).

شكل رقم (٣ - ١)



ومن معادلة القطع المكافئ نحصل على:

$AF \times AB = \overline{RF}^2 > \overline{AC}^2$ إذن $RF > AC$ أو $AK > AC$ إذن:

$$2\,AK > KC > 2\,AC \qquad (5)$$

من معادلة P و (3) نحصل على:

$$\frac{\overline{RK}^2}{\overline{RF}^2} = \frac{\overline{AF}^2}{AF \cdot AB} = \frac{AF}{AB} > 4$$

وهذا يعطي إذا أخذنا (5) في الاعتبار:

$$RK > 2\,RF = 2\,AK > KC \qquad (6)$$

وبما أن $AK \times KC = \overline{KS'}^2$ (معادلة E) نستنتج من ذلك أن $RK > KS'$.

وهـذا يبين أن R هي خـارج E، إذن P و E يتقاطعـان في نقطة D. أقـول إن AZ هو الحل المطلوب؛ لأن: معادلتي P وَ E تعطيان فعلاً:

$$\frac{AB}{AZ} = \frac{AB}{DH} = \frac{DH}{AH} = \frac{AZ}{DZ} = \frac{DZ}{CZ}$$

إذن:
$$\frac{AB}{AZ} = \frac{AZ}{DZ} = \frac{DZ}{CZ}$$

إذن:
$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AZ}^2} = \frac{AZ}{CZ}$$

إذن:
$$\overline{AB}^2 \times CZ = \overline{AZ}^3$$

وهي مساواة يمكننا كتابتها على الشكل التالي:

$$\overline{AB}^2 \times AC + \overline{AB}^2 \times AZ = \overline{AZ}^3$$

وهذا يبين أن AZ هو حل.

وفي ترميز آخر غير ترميز الطوسي سبق أن اتبع عن قرب، فإن معادلتي P وَ E بالنسبة للمحورين AX وَ AY هي على التوالي:

$$x^2 = \sqrt{a}\, y,$$

$$x\left(\frac{b}{a} + x\right) = y^2$$

اذن: $x\,(x^3 - a\,x - b) = 0$. فإذا استبعدنا الحل المبتذل $x = 0$ لحصلنا على معادلتنا.

نستنتج من عرض الطوسي:

أ - إن تقاطع القطع المكافىء والقطع الزائد مبرهن جبرياً، أي بواسطة معادلتي المنحنيين.

ب - يمكننا الاعتقاد أنه في هذه المرحلة جرّب الطوسي أن يحل هندسياً هذه المعادلة التكعيبية.

إن استعمال مفردات مثل «داخل» و«خارج» أثناء البرهان يمكن أن يعزز مثل هذا الاعتقاد، وإذا ما نظرنا عن قرب فإننا نصل إلى استنتاج آخر. في الحقيقة، فإن الطوسي لم يكن مجبراً إطلاقاً على النظر إلى الشكل، فقد كان يستعمل معادلات المنحنيات. هذا الاستعمال ظاهر في المثل السابق كما في كل الأمثال التي ستتبع على السواء. وكونه كان يعمل ضمن المجال الموجب، لذلك فالرسم الشامل للمنحنيات غائب، والمفردات: الخارج والداخل تطابقان في استعمال الطوسي مفردتي الأكبر والأصغر. وبصورة أدق، لا يقصد هنا الهندسة ولكن المقصود هو حدس هندسي لفكرة الاستمرارية. وبلغة مختلفة عن لغة الطوسي، يريد المؤلف أن يبرهن: إنه إذا كان لدينا $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} x^2$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + \frac{b}{a} x}$, حيث $a > 0$ وإذا وجد عددان α و β بحيث ان $(f-g)(\alpha) > 0$ و $(f-g)(\beta) < 0$ عندئذ توجد نقطة γ، $\gamma \in]\alpha, \beta[$، بحيث ان $(f-g)\,(\gamma) = 0$. فالحدس «الهندسي» لدى الطوسي مبني إذن على فكرة استمرارية $(f-g)$ حيث f و g هما دالّتين مستمرتين.

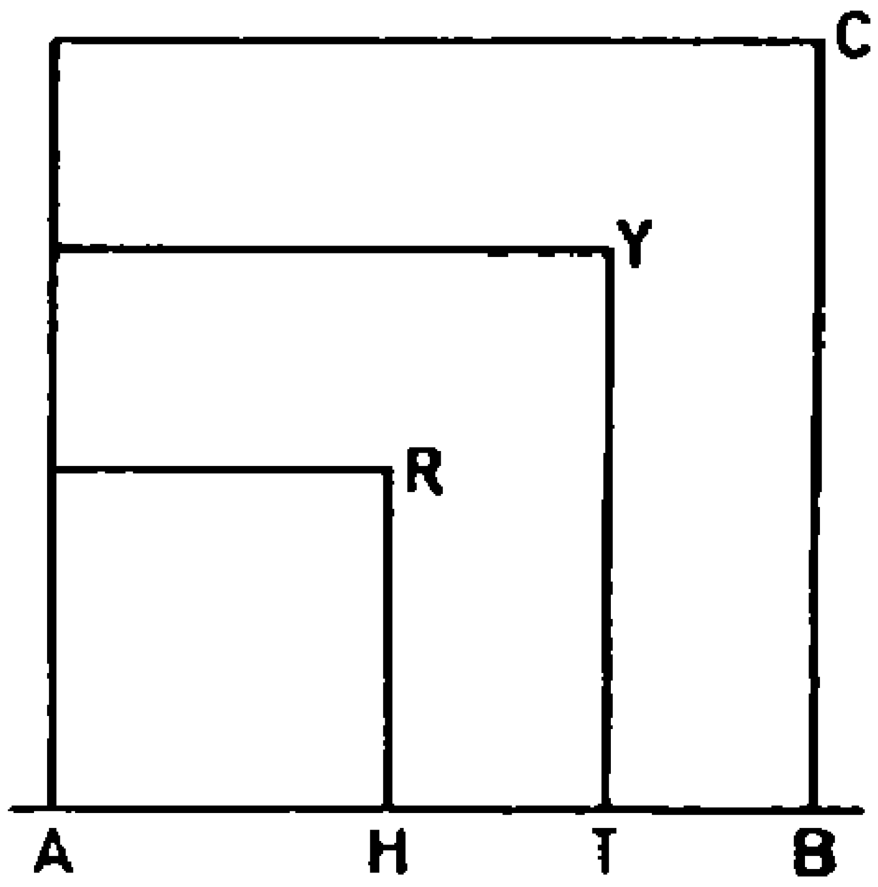
٢ ـ حل المعادلة $x^3+a=bx$ [٣٧]

يلاحظ الطوسي أولاً أن x^2 يجب أن يكون أصغر من b، ويكتب المعادلة عندئذ على الشكل $x\,(b-x^2)=a$. وبصورة أدق، هو يفترض أن b تعادل مساحة المربع AC (انظر الشكل ٣ ـ ١) وأن x^2 تعادل مساحة المربع AY فتصبح المعادلة عندئذ $AT\ [CY]=a$ حيث:

$$\text{مساحة } [CY] = \text{مساحة } AC - \text{مساحة } AY$$
$$= (AB+AT)\times BT$$

حيث يجد المؤلف نفسه مجبراً على دراسة القيمة العظمى لِـ $AT\ [CY]=x\,(b-x^2)$ بحيث $0<AT<AB$. ويعطي عندها المقدمة التالية:

شكل رقم (٣ ـ ٢)



مقدمة: ليكن مساحة المربع AR = $\frac{1}{3}$ مساحة المربع AC

إذن: $AT\,[CY]$ تأخذ قيمتها العظمى عندما يكون $AT=AH$

أ ـ يفترض أن $AT>AH$ ويبيّن فيما يلي أن $AH\ [CR]>AT\ [CY]$

وبالفعل لدينا:

$$[CR]\times AH=[CY]\times AH+[YR]\ AH, \tag{1}$$
$$[CY]\times AT=[CY]\times AH+[CY]\times HT. \tag{2}$$

وبما أن مساحة AR = $\frac{1}{3}$ مساحة AC = $\overline{AH}^2$ نحصل على:

$$[CR]=(AB+AH)\ BH=2\,\overline{AH}^2 \tag{3}$$

---

(٣٧) المصدر نفسه، ص ١١٣، و ١٢٠ (وجه الورقتين).

ولدينا من جهة ثانية:

$$(AT+AH)\times AH=(TH+2\,AH)\times AH>2\,\overline{AH}^2 \qquad (4)$$

وإذا أخذنا بالاعتبار (3):

$$(AB+AT)\times BT=[CY]<[CR]=2\,\overline{AH}^2. \qquad (5)$$

(4) و (5) تعطيان: $(AB+AT)\,BT<(AT+AH)\times AH$

إذن: $\frac{BT}{TH}\times\frac{AB+AT}{AT+AH}<\frac{BT}{TH}\times\frac{AH}{BT}$

وهذا بدوره يعطي: $[CY]\times HT<[YR]\times AH$

من (1) و (2) نحصل أخيراً على:

$$[CR]\times AH>[CY]\times AT$$

ب ـ يفترض أن $AT<AH$ ، ويقوم بإجراء برهان مشابه للذي سبق، ويرجع فيما بعد للمعادلة ويميّز حالات ثلاث:

١ ـ $[[CR]\times AH<a]\Leftrightarrow\left[2\left(\frac{b}{3}\right)^3<a\right]$

وتكون المسألة مستحيلة $[CY]\times AT<[CR]\times AH<a$ أينما كانت T على AB

٢ ـ $[[CR]\times AH=a]\Leftrightarrow\left[2\left(\frac{b}{3}\right)^3=a\right]$

للمسألة حلّ وحيد هو $\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. والبرهان المعطى هو تثبتٌ وفيما يخص وحدانية الحل فهي تحصل بسبب المقدمة.

٣ ـ $[[CR]\times AH>a]]\Leftrightarrow\left[2\left(\frac{b}{3}\right)^3>a\right]$

للمسألة حلان، واحد أصغر من AH والثاني أكبر من AH.

ولأن $[CR]\times AH$ هو أكبر من a، فيوجد إذن عدد موجب K بحيث إن:

$$[CR]\times AH=a+K \qquad (6)$$

عندها، يفترض الطوسي المعادلة: $x^3+K=HQ\times x^2$ حيث $QA=2\,AH$

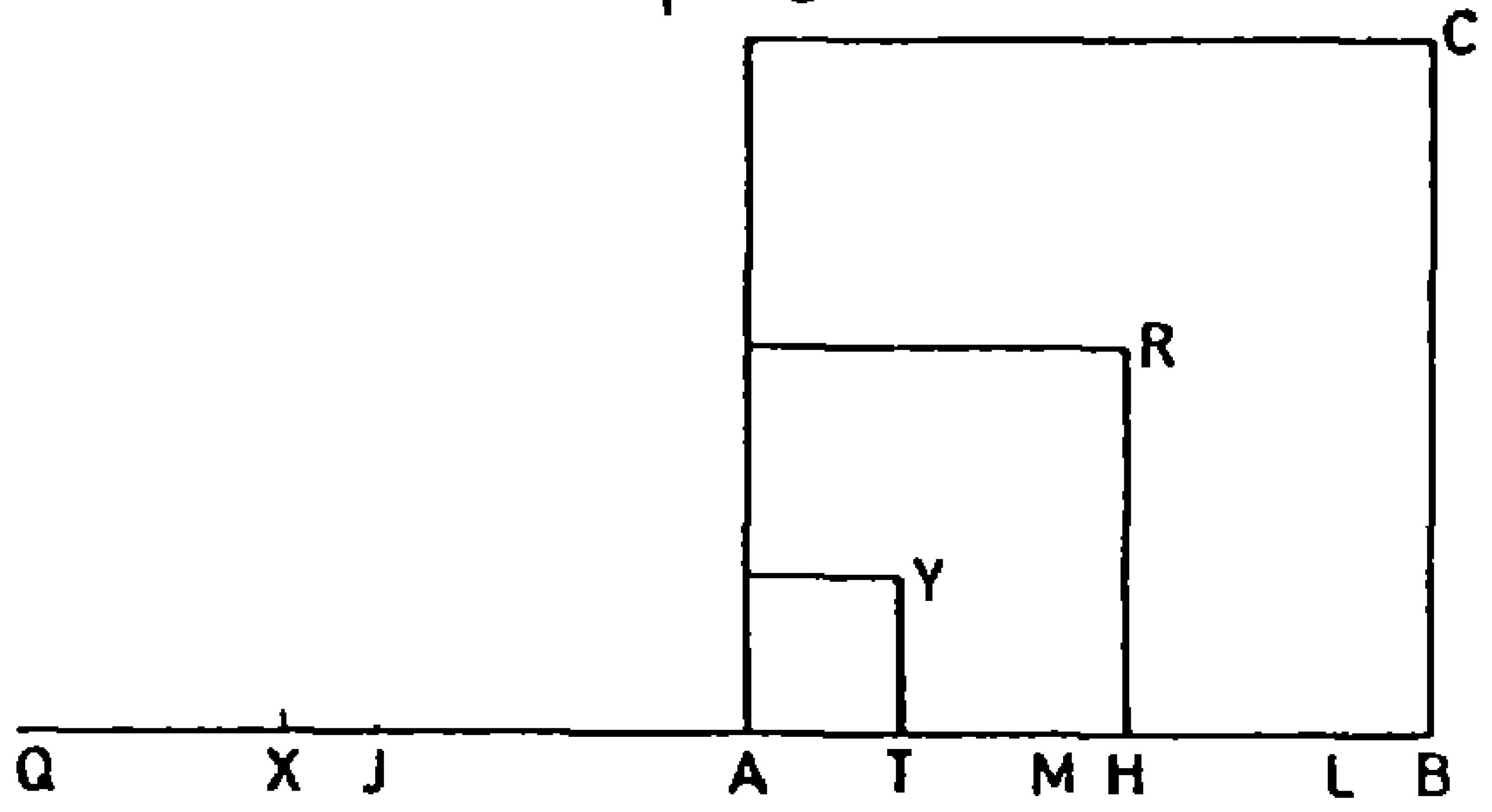
(انظر الشكل رقم (٣ ـ ٣)). ولقد سبق للطوسي أن درس هذه المعادلة.

ليكن HL جذر هذه المعادلة، أي: $\overline{HL}^3 + K = HQ \times \overline{HL}^2$

فإذا كان $HT = HL$، فإن هذا الحل يكتب على الشكل التالي:

$$\overline{HL}^2 \times QT = K \qquad (7)$$

شكل رقم (٣ - ٣)



ويبرّر الطوسي هذه الكتابة بواسطة التحويـل الأفّيني $x \mapsto \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - x$.

ولكي يبرهن عن وجود الجذر الأصغر أي AT، يـبرهن الطوسي أولاً أن HL أي HT هو أصغر من AH، لأن لدينا على التوالي:

$$[CR] \times AH = 2\,\overline{AH}^3$$

$$\overline{AH}^2 \times AQ = 2\,\overline{AH}^3$$

$$[CR] \times AH = \overline{AH}^2 \times AQ = 2\,\overline{AH}^3 \qquad (8)$$

ولدينا من جهة ثانية:

$2\,BH \times AH + \overline{BH}^2 = [CR] = 2\,\overline{AH}^2$ إذن:

$$BH < AH \qquad (9)$$

نأخذ عندها $AM = BH$، لدينا:

$$\overline{AM}^2 + 2\,AM \times AH = 2\,\overline{AH}^2$$

لكن: $2\,HM \times AH + 2\,AM \times AH = 2\,\overline{AH}^2$

إذن: $\overline{AM}^2 + 2\,AM \times AH = 2\,HM \times AH + 2\,AM \times AH$

وهذا يعطي: $\overline{AM}^2 = 2\,HM \times AH$ إذن:

$$\frac{HM}{AM} = \frac{AM}{2AH} = \frac{AM}{AQ} \qquad (10)$$

ليكن: $XQ = AM$ و $XJ = MH$ ، تكتب (10) إذن:

$$\frac{XJ}{XQ} = \frac{XQ}{JH}$$

وإذا ضربنا الطرفين بالمقدار: $\frac{JQ + XQ}{XQ}$ يكون لدينا:

$$\frac{JQ + XQ}{XQ} \times \frac{XJ}{XQ} = \frac{JQ + XQ}{XQ} \times \frac{XQ}{JH}$$

وبعد إجراء الاختزال نحصل على:

$$\overline{JQ}^2 \times JH = \overline{BH}^2 \times BQ = 2\,\overline{AH}^3 > K$$

وهذا يعطي، مع أخذنا بالاعتبار لِـ (9) و (7):

$HL < HB < AH$ [٣٨]

بعد أن أتم التعليل، كتب الطوسي على هذا النحو:

$$[CR] \times AH = [CR] \times AT + [CR] \times HT,$$
$$[CR] \times HT = 2\,\overline{AH}^2 \times HT,$$
$$2\,\overline{AH}^2 \times HT = 2\,[RY] \times HT + 2\,\overline{AT}^2 \times HT,$$
$$2\,[RY] \times HT = 2\,(HT \times AH + HT \times AT)\,HT,$$

إذن:

$$\begin{aligned}[CR] \times AH &= [CR] \times AT + 2\,\overline{AT}^2 \times HT + 2\,\overline{HT}^2 \times AH + 2\,\overline{HT}^2 \times AT \\ &= [CR] \times AT + [RY]\,\overline{AT} + HT^2 \times QT \\ &= [CY] \times AT + \overline{HT}^2 \times QT\end{aligned}$$

---

(٣٨) إن الاستنتاج $HL < HB$ ليس صالحاً لكل قيمة لِـ a، وليس ضرورياً هنا لأنه بإمكاننا أن نبين مباشرة أن $HL < HA$ وهذا ما بحث عنه الطوسي. وفي الواقع فإن HL هو جذرٌ للمعادلة $K = HQx^2 - x^3$ حيث $HQ = 3AH$.

لنفرض $f(x) = 3AHx^2 - x^3$

نحصل على: $f'(x) = 3x\,(2AH - x)$

إذن:

$f'(x) = 0$ إذا كان $x = 0$ أو $x = 2AH$ وَ $f'(x) > 0$ إذا كان $x \in]0, 2AH[$ وبالتالي فإن f هي دائمة التزايد حيث $f(0) = 0$ وَ $f(AH) = 2AH^3$ وبالتالي إذا كان $K < 2AH^3$ يوجد إذن $x_0 \in]0, AH[$ بحيث إن $f(x_0) = K$ إذا فرضنا $x_0 = HL$ فإن: $HL < AH$.

لكن: $[CR]\times AH=a+K$ و $\overline{HT}^2\times QT=K$ (أنظر (6) و (7))، إذن:

$[CY]\times AT=a;$

أي أن $(b-\overline{AT}^2)\,AT=a$. وهذا يبيّن أن AT هو جذر للمعادلة أصغر من AH.

ـ إذا ما نظرنا لبرهان الطوسي يمكننا أن نلاحظ أننا نحصل على المعادلة المساعدة $x^3+K=HQ\times x^2$ من المعادلة الأصلية بواسطة التحويل الأفّيني $x\mapsto\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}-x$. فلكي نحصل على جذر المعادلة الأصلية كان من الطبيعي أن نطرح من $\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ جذر المعادلة المساعدة. وهذا ما فعله الطوسي.

ـ لكي يجد جذر المعادلة الآخر والأكبر من AH، حل الطوسي المعادلة: $x^3+HQ\,x^2=K$ وهي المعادلة الحاصلة بواسطة التحويل الأفّيني $x\mapsto\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+x$ للمعادلة الاصلية.

ما أن يدرس المعادلة ويجد الجذر حتى يجمع الطوسي هذا الجذر للمقدار $\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ فيحصل بذلك على الجذر المطلوب.

ـ يمكن مقارنة مناقشة الطوسي بمناقشة كاردان فيما يخص المعادلة نفسها[٣٩]:

$$x^3+a=bx$$

يناقش الطوسي أولاً وجود الجذور (الموجبة) للمعادلة

$$x^3+a=bx \qquad a\geqq 0 \quad b\geqq 0$$

ويلاحظ أن أيّ حل (موجب) لهذه المعادلة يجب أن يكون أصغر أو مساوياً لـ $b^{\frac{1}{2}}$ لأنه إذا كان x_0 جذراً فإننا نحصل على:

$$x_0^3+a=bx_0$$

وبالتالي $x_0^3\leqq bx_0$

أي: $x_0^2\leqq b$

وعلى هذا الجذر أن يحقق من ناحية ثانية المساواة:

$$bx-x^3=a$$

---

(٣٩) Girolama Cardano, *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis* (1545), Chap.xiii.

يبحث الطوسي عن القيمة التي تجعل $y=bx-x^3$ تأخذ قيمتها العظمى، وبإعدامه للمشتق الأول يحصل على $x=\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. فتكون القيمة العظمى:

$$b\times\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

يوجد إذن جذر موجب عندما ـ وفقط عندما ـ يكون:

$$a\leqq 2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow\frac{b^3}{27}-\frac{a^2}{4}\geqq 0$$

وهكذا فإن دور المميز قد أثبت وأعد جبرياً لدراسة المعادلة التكعيبية. لتأكيد مجمل القضايا التي قُدّمت سابقاً، لندرس حالتين فقط من النقاش يثيرهما الطوسي للمسألة التالية:

٣ ـ حل المعادلة

$$x^3+a=bx^2+cx \qquad (1)$$ (٤٠)

سنتتبع مناقشتها باعتمادنا نص الطوسي عن قرب، حيث يميّز بين حالات ثلاث. وسنتناول اثنين منها:

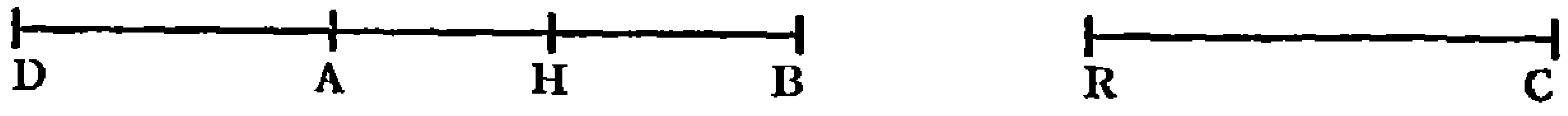
$$b=\sqrt{c} \qquad (I)$$

يبرهن أولاً استحالة المسألة إذا كان $a>b^3$ لأن

$$AB=\sqrt{c}$$

$$RC=b=AB$$

لنفرض أن المسألة ممكنة ولنميز حالتين:



أ ـ BD هو جذر أكبر بالتمام من AB. بعد أن نعوّض في (١) نحصل على:

$$\overline{BD}^3-AB\times\overline{BD}^2=\overline{AB}^2\times BD-a$$

لذا:

$$\overline{AB}^2\times BD-\overline{BD}^2\times AD=a$$

---

(٤٠) الطوسي، «قوام الحساب»، ص ١٤٣ (وجه الورقة).

ولدينا من جهة أخرى:

$$\overline{AB}^2 \times BD - \overline{AB}^2 \times AD = \overline{AB}^3$$

لذا:

$$\overline{AB}^3 - a = (\overline{BD}^2 - \overline{AB}^2) \times AD = (AB + BD) \times \overline{AD}^2 \geqq 0$$

لذا: $a \leqq \overline{AB}^3$

ب ـ BH هو جذر أصغر بالتمام من AB. وبالمقارنة مع الحالة (١) نحصل بالمثل على:

$$a - \overline{AB}^2 \times BH = \overline{BH}^2 \times AH,$$

$$\overline{AB}^3 - \overline{AB}^2 \times BH = \overline{AB}^2 \times AH$$

لذا:

$$a - \overline{AB}^2 \times BH \leqq \overline{AB}^3 - \overline{AB}^2 \times BH$$

لذا: $a \leqq \overline{AB}^3$

في جميع الحالات حيث تكون المسألة ممكنة يجب أن يكون $a \leq \overline{AB}^3 = b^3$ وعندها يدرس الطوسي الحالات الثلاث التالية:

(١) $a > \overline{AB}^3$، سبق ورأينا أن المسألة مستحيلة.

(٢) $a = \overline{AB}^3$ يوجد حل وحيد هو AB. وبرهان الطوسي عبارة عن مجرّد تحقّق.

(٣) $a < \overline{AB}^3$ ويكون لدينا حلّان.

لأنه إذا كان $BK = AB$ (انظر الشكل (٣ ـ ٤)) وكانت المعادلة:

$$x^3 + AK\, x^2 = \overline{AB}^3 - a \tag{2}$$

وهي معادلة سبق درسها في بحث الطوسي. ليكن AD الحل لِـ(2) إذن BD هو حل للمعادلة (١)، لأنه إذا كان AD (2) نحصل على

$$\overline{AD}^2 \times DK + a = \overline{AB}^3 \tag{3}$$

لكنّ

$$\overline{AD}^2 \times DK = AD \times AD\,(DB + AB) = [TM] \times AD$$

تكتب (3) إذن:

$$[TM] \times AD + a = \overline{AB}^3$$

ونحصل بالتالي على:

$$[TM]\times AD+\overline{AB}^2\times AD+a=\overline{AB}^3+\overline{AB}^2\times AD,$$

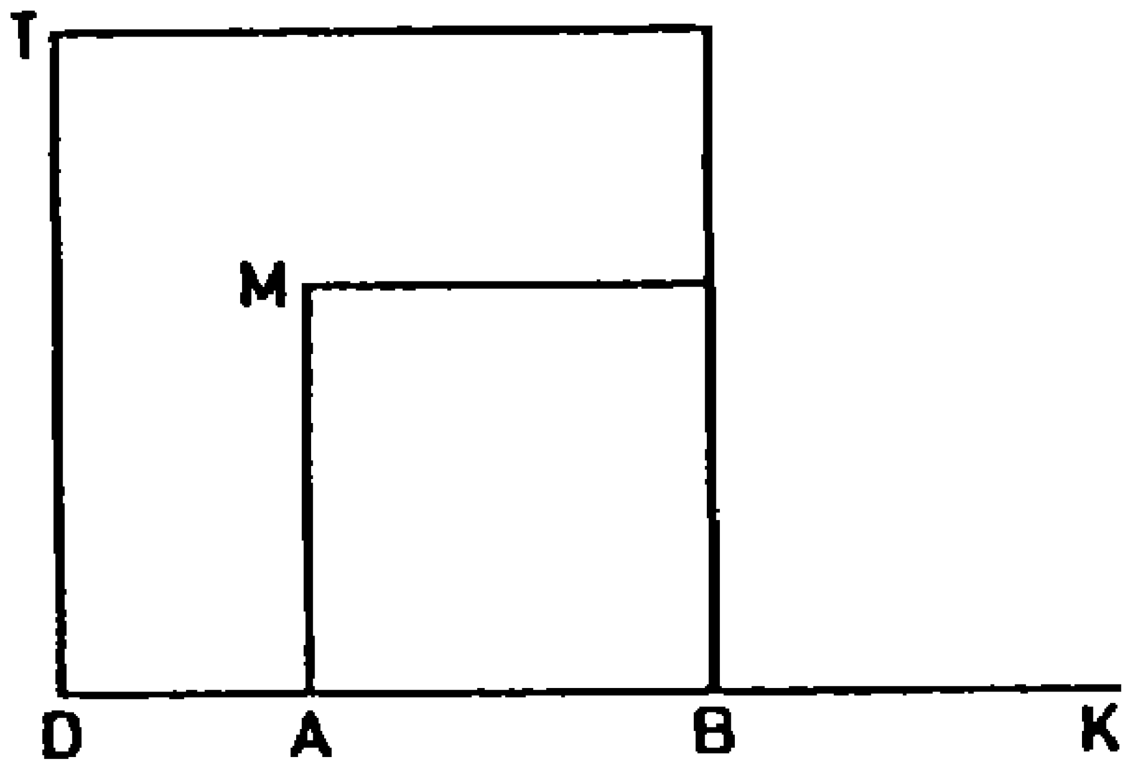
$$\overline{BD}^2\times \overline{AD}+a=\overline{AB}^2\times BD,$$

$$\overline{BD}^2\times AD+\overline{DB}^2\times AB+a=\overline{AB}^2\times BD+\overline{DB}^2\times AB,$$

$$\overline{BD}^2\times BD+a=\overline{AB}^2\times BD+\overline{BD}^2\times AB,$$

وهذا يثبت أن BD هو جذر للمعادلة المطلوبة.

شكل رقم (٣ - ٤)



ويعطي الطوسي عندها إيضاحات أخرى عن الجذر BD : BD محدود من الأعلى[٤١]، فقد سبق أن رأينا في (3) أن:

$$\overline{AB}^3-a=\overline{AD}^2\times DK$$

إذن: $\overline{AD}^2\times DK<\overline{AB}^3$

وبما أن $DK>AB$، نحصل على $AD<AB$، إذن:

$$DB=AD+AB<2\,AB$$

لإيجاد الجذر الآخر، يأخذ الطوسي المعادلة:

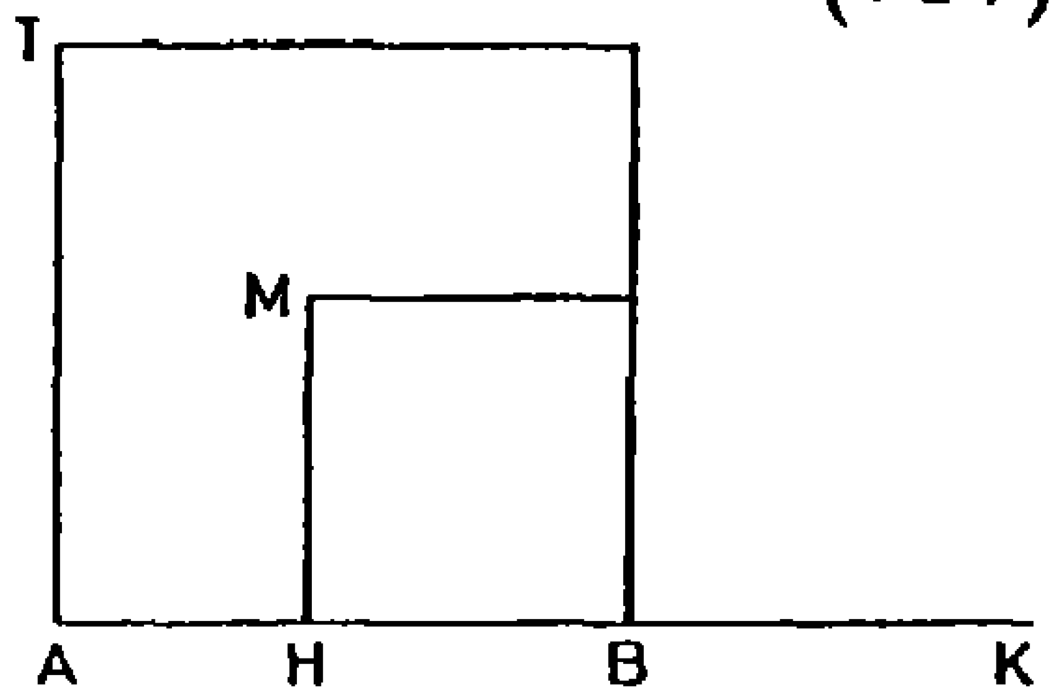
$$x^3+\overline{AB}^3-a=AK\times x^2 \qquad (4)$$

إذا كان AH جذراً لـ(4) (AH هو أصغر من AB وفقاً لدراسة سابقة أجراها الطوسي على هذا النوع من المعادلة)، (انظر الشكل رقم (٣ - ٥))، فإن BH يكون جذراً للمعادلة (1).

---

(٤١) المصدر نفسه، ص ١٤٤ (وجه الورقة)، حيث يذكر الطوسي عبارة «نهاية في الاعظم».

شكل رقم (٣ ـ ٥)



كون AH جذراً لـ (4)، لدينا إذن:

$$\overline{AH}^2 \times HK = \overline{AB}^3 - a \quad (5)$$

لكن:

$$\overline{AB}^3 = \overline{AB}^2 \times BH + \overline{AB}^2 \times AH = \overline{AB}^2 \times BH + \overline{BH}^2 \times AH + [TM] \times AH$$
$$= \overline{AB}^2 \times BH + \overline{BH}^2 \times AH + (AB + BH)\,\overline{AH}^2$$
$$= \overline{AB}^2 \times BH + \overline{BH}^2 \times AH + \overline{AH}^2 \times HK;$$

ومن ناحية أخرى، نحصل من (5) على:

$$\overline{AB}^3 = a + \overline{AH}^2 \times HK$$

لذا: $\overline{AB}^2 \times BH + \overline{BH}^2 \times AH = a$

لذا: $\overline{BH}^3 + a = \overline{AB}^2 \times BH + AB \times \overline{BH}^2$

وهذا يثبت أن BH هو بالفعل حل لـ (1).

ويبرهن الطوسي بطريقة مماثلة لتلك التي استخدمها بالنسبة إلى الجذر الأول بأن BH هو محدود من الأدنى.

ملاحظة: في حالة وجود حلين وانطلاقاً من (1) ومستعيناً بالتحويلات الافينية:

$$x \mapsto x + AB$$
$$x \mapsto AB - x;$$

يحصل الطوسي بالتوالي على:

$$x^3 + AK\,x^2 = \overline{AB}^3 - a$$
$$x^3 + \overline{AB}^3 - a = AK\,x^2$$

يضيف إلى AB الجذر الأول ويطرح من AB الجذر الثاني ليحصل على الجذور المطلوبة.

$$b > \sqrt{c} \qquad (11)$$

ليكن $AB = \sqrt{c}$ و $BC = b$ و $x = BH$. تكتب المعادلة (1):

$$\overline{BH}^2 \times BC - \overline{BH}^3 + \overline{AB}^2 \times BH = a$$

وهذا يقود الطوسي لدراسة **القيمة العظمى للعبارة**:

$$b\,x^2 - x^3 + c\,x = \overline{BH}^2 \times BC - \overline{BH}^3 + \overline{AB}^2 \times BH$$

إن المقدمة التالية تعطي النتيجة التي توصل إليها الطوسي:

مقدمة: لتكن المعادلة من الدرجة الثانية

(6) $\frac{2}{3}\,BC \cdot x + \frac{1}{3}\,\overline{AB}^2 = x^2$ وليكن BD جذراً لهذه المعادلة:

إذن مهما كانت H مختلفة عن D، نحصل على:

$$\overline{BH}^2 \times BC - \overline{BH}^3 + \overline{AB}^2 \times BH < \overline{BD}^2 \times BC - \overline{BD}^3 + \overline{AB}^2 \times BD \qquad (7)$$

يبرهن الطوسي بادىء الأمر أن: $AB < BD < BC$

وكما رأينا في (6) فإن BD هو حاصل جمع:

$$x_1 = \frac{2}{3}\,BC \qquad (8)$$

مع

$$x_2 = \frac{1}{3}\,\frac{\overline{AB}^2}{BD} \qquad (9)$$

فإذا كان $BD = AB$، وانطلاقاً من (6)، نحصل على:

$$\overline{AB}^2 = \frac{2}{3}\,BC \times AB + \frac{1}{3}\,\overline{AB}^2 > \overline{AB}^2$$

وهذا محال. وإذا كان $BD < AB$ وانطلاقاً من (9)، نحصل على: $x_2 > \frac{1}{3}\,AB$

ومن (8)، نحصل على: $x_1 > \frac{2}{3}\,AB$، إذن:

$$BD = x_1 + x_2 > \frac{1}{3}\,AB + \frac{2}{3}\,AB = AB$$

وهذا أيضاً محال، وبما أن $BD > AB$ وانطلاقاً من (9)، نحصل على:

$$x_2 < \frac{1}{3}\,AB < \frac{1}{3}\,BC;$$

لذا فإننا نحصل من (8) على:

$$BD = x_1 + x_2 < \frac{1}{3}\,BC + \frac{2}{3}\,BC = BC$$

ويعود الطوسي إلى برهان المقدمة، مميّزاً بين عدة حالات:

$$BC > BH > BD.$$

١ ـ

عندها، فإن (7) تكتب:

$$\overline{BH}^2 \times CH + \overline{AB}^2 \times BH < \overline{BD}^2 \times CD + \overline{AB}^2 \times BD,$$

$$\overline{BD}^2 \times CD + \overline{AB}^2 \times BD = \overline{BD}^2 \times CH + \overline{BD}^2 \times HD + \overline{AB}^2 \times BD$$

$$\overline{BH}^2 \times CH + \overline{AB}^2 \times BH = \overline{BD}^2 \times CH + (BD + BH)\ HD \times CH$$
$$+ \overline{AB}^2 \times BD + \overline{AB}^2 \times DH$$

فيكون الفرق بين طرفي (7) إذن:

$$\overline{BD}^2 \times HD - \overline{AB}^2 \times DH - (BD + BH)\ HD \times CH$$
$$= (BD + AB)\ AD \times HD - (BD + BH)\ HD \times CH$$

ويُردّ برهان المقدمة إذن إلى برهان أن:

$$(BD + AB)\ AD > (BD + BH) \times CH$$

غير أن:

$$2\ BD \times CD = 2\ BD \times DH + 2\ DB \times CH$$
$$(BH + DB)\ CH = 2\ DB \times CH + DH \times CH$$

لكن:

$$2\ BD \times DH > DH \times CH$$

ونظراً إلى (٨) لدينا:

$$2\ BD > 2 \cdot \tfrac{2}{3} CB > CB > CH$$

لذا فإن:

$$2\ BD \times CD > (BH + DB)\ CH$$

ولكن حسب (٦) وبتعويض BD عن x نحصل بعد الاختزال على:

$$2\ BD \times CD = (BD + BA)\ AD \qquad (9')$$

وينتج من هنا، أن:

$$(BD+BA)\,AD>(BH+DB)\,CH$$

بهذا يتم برهان المقدمة في هذه الحالة.

٢ - $BH=BC$

في هذه الحالة تصبح (7) كما يلي:

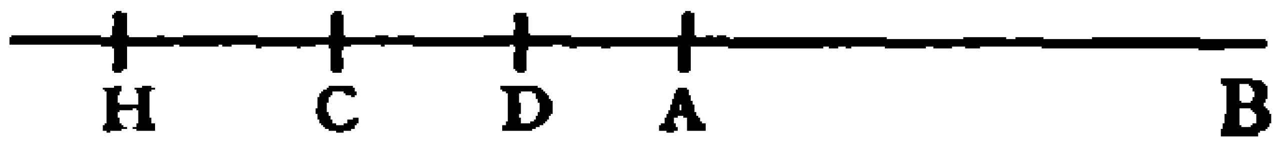
$$\overline{AB}^2\times BC<\overline{BD}^2\times CD+\overline{AB}^2\times BD$$

ويصبح الفرق بين الطرفين:

$$\overline{BD}^2\times CD+\overline{AB}^2\times BD-\overline{AB}^2\times BC=\overline{BD}^2\times CD-\overline{AB}^2\times CD>0$$

حيث $(BD>AB)$ مما يثبت المقدمة في هذه الحالة أيضاً.

٣ - $BH>BC$



في هذه الحالة تكتب (7):

$$\overline{AB}^2\times BH-\overline{BH}^2\times CH<\overline{BD}^2\times CD+\overline{AB}^2\times BD$$

وبما أن $BH>AB$، يكون لدينا:

$$\overline{AB}^2\times BH-\overline{BH}^2\times CH<\overline{AB}^2\times BH-\overline{AB}^2\times CH=\overline{AB}^2\times CB$$

وسبق أن رأينا في الحالة (٢) أن:

$$\overline{AB}^2\times BC<\overline{BD}^2\times CD+\overline{AB}^2\times BD$$

هذا يثبت المقدمة في هذه الحالة.

٤ - $AB<BH<BD.$

٥ - $AB=BH.$ تُعالج هذه الحالات بالطريقة نفسها.

٦ - $AB>BH.$

لنرمز بالحرف S للقيمة العظمى التي حصلنا عليها، أي:

$$S=\overline{BD}^2\times CD+\overline{AB}^2\times BD$$

ولنعد إلى المعادلة (١). يميّز الطوسي حالات ثلاث:

١ ـ $S < a$ المسألة مستحيلة.

٢ ـ $S = a$ يوجد حل وحيد هو BD نفسه.

٣ ـ $S > a$ يوجد حلان: جذر أكبر من BD وآخر أصغر من BD.

البحث عن الجذر الأكبر

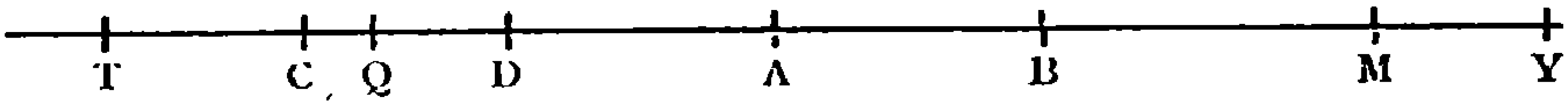
$$a > \overline{AB}^2 \times BC \tag{a}$$

في هذه الحالة يوجد جذر محصور بالتمام بين BD و BC. لنفرض أن:

$$\begin{cases} BY = BD \\ MY = CD \end{cases} \tag{10}$$

ولتكن المعادلة:

$$x^3 + DM\ x^2 = S - a. \tag{11}$$



يبيّن الطوسي أنه لو أضفنا BD الى جذر هذه المعادلة لحصلنا على الجذر المطلوب للمعادلة (١) لكن قبل أن يبرهن هذه القضية يبين أن الجذر DQ للمعادلة (١١) هو أصغر من DC. لأن:

$$S - a < S - \overline{BA}^2 \times CB = \overline{BD}^2 \times CD + \overline{AB}^2 \times BD - \overline{AB}^2 \times CB$$
$$= \overline{BD}^2 \times CD - \overline{AB}^2 \times CD = (BD + AB) \times AD \times CD$$

وبموجب ('٩) فإن: $$(BD + AB)\ AD = 2\ DB \times DC$$

لذا:

$$S - a < 2\ DB \times \overline{DC}^2 = DY \times \overline{CD}^2 = \overline{CD}^2 \times CM = \overline{CD}^3 + CD^2 \times DM$$

لكن $$S - a = \overline{DQ}^3 + \overline{DQ}^2 \times DM$$

لذا $$DQ < CD$$

ثم يبرهن الطوسي أن BQ هو الجذر المطلوب لأنه بحسب ('٩) نجد أن:

$$(DB+BA)\,DA \times DQ = YD \times CD \times DQ$$
$$= YD \times DQ \times CQ + CM \times \overline{DQ}^2$$
$$= YD \times DQ \times CQ + \overline{DQ}^2 \times QM + \overline{DQ}^2 \times CQ$$
$$= DQ \times CQ \times YQ + \overline{DQ}^2 \times QM$$
$$= (QB+BD)\,DQ \times CQ + \overline{DQ}^2 \times QM;$$

نضيف $\overline{BA}^2 \times BQ$ إلى الطرفين الأول والأخير، فنحصل على:

$$\overline{BD}^2 \times DQ + \overline{BA}^2 \times BD = (QB+BD)\,DQ \times CQ + \overline{DQ}^2 \times QM + \overline{BA}^2 \times BQ$$

نضيف $\overline{BD}^2 \times CQ$ إلى الطرفين، فنحصل على:

$$S = \overline{BD}^2 \times CD + \overline{BA}^2 \times BD = \overline{BQ}^2 \times CQ + \overline{BA}^2 \times BQ + \overline{DQ}^2 \times QM. \qquad (12)$$

وبما أن DQ هو جذر للمعادلة (11) نحصل على:

$$\overline{DQ}^3 + DM \times \overline{DQ}^2 = S - a$$

لذا: $$\overline{DQ}^2\,(DQ + DM) = S - a$$

إذن: $$\overline{DQ}^2 \times QM = S - a$$

وبعد التعويض في (12) نحصل أخيراً على:

$$\overline{BQ}^2 \times CQ + \overline{BA}^2 \times BQ = a$$

لذا: $$\overline{BQ}^2\,(BC - BQ) + \overline{BA}^2 \times BQ = a$$

إذن: $$\overline{BQ}^3 + a = BC \times \overline{BQ}^2 + \overline{BA}^2 \times BQ$$

هذا يبيّن بأن BQ هو جذر للمعادلة (1).

$$a = \overline{BA}^2 \times BC \qquad \text{(b)}$$

يبرهن الطوسي بتحقق بسيط أن BC هو الجذر المطلوب.

$$a < \overline{BA}^2 \times BC \qquad \text{(c)}$$

يجد الطوسي جذر (11) ويبرهن أنه بإضافة BD إلى هذا الجذر نحصل على الحل المطلوب. ولكي يقيم هذا البرهان، يتحقق أولاً من أن الجذر DT للمعادلة (11) هو أكبر من CD.

وحسب المعطى يكون لدينا: $a < \overline{BA}^2 \times BC$

لذا: $S - a > S - \overline{AB}^2 \times CB$

لكن:

$$S - a = \overline{DT}^3 + DM \times \overline{DT}^2$$

$$S - \overline{AB}^2 \times CB = \overline{BD}^2 \times CD + \overline{AB}^2 \times BD - \overline{AB}^2 \times CB$$
$$= \overline{CD}^3 + DM \times \overline{CD}^2$$

لذا: $\overline{CD}^3 + DM \times \overline{CD}^2 < \overline{DT}^3 + DM \times \overline{DT}^2$

إذن: $CD < DT$

يعود الطوسي عندها إلى المعادلة (١). نعلم أن S هي بالتعريف قيمة العبارة:

$$BC \times x^2 + \overline{AB}^2\, x - x^3 \quad \text{حيث} \quad x = BD$$

لدينا إذن: $BC \times \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2 \times BD = S + \overline{BD}^3$

إذا أضفنا $\overline{BA}^2 \times DT$ إلى الطرفين، نحصل على:

$$\overline{AB}^2 \times BT + BC \times \overline{BD}^2 = S + \overline{BD}^3 + \overline{BA}^2 \times DT$$

وإذا أضفنا $BC\ (\overline{TB}^2 - \overline{DB}^2)$ إلى الطرفين، نحصل على:

$$\overline{AB}^2 \times BT + BC \times \overline{BT}^2 = S + \overline{BD}^3 + \overline{BA}^2 \times DT + (\overline{TB}^2 - \overline{BD}^2)\ BC$$

لنضف أخيراً إلى الطرفين المقدار:

$$\mathscr{H} = (\overline{TB}^2 - \overline{BD}^2)\ TC + (\overline{BD}^2 - \overline{BA}^2)\ TD$$

نحصل على:

$$\overline{AB}^2 \times BT + BC \times \overline{BT}^2 + \mathscr{H} = S + \overline{BT}^3. \qquad (13)$$

لكن:

$$(\overline{BD}^2 - \overline{BA}^2)\ TD = (BD + BA) \times AD \times TD = 2\ BD \times CD \times TD$$

وحسب ('9):

$$(\overline{TB}^2 - \overline{BD}^2)\ TC = (TB + BD) \times BT \times TC$$
$$= 2\ TC \times BD \times DT + \overline{DT}^2 \times TC$$

لذا: $\mathscr{H} = 2\ BD \times TD \times DT + \overline{DT}^2 \times TC$

$$= MC \times \overline{TD}^2 + \overline{DT}^2 \times TC = \overline{TD}^2 \times MT.$$

وبما أن TD هو جذر لـ (11)، نحصل على:

$$S-a=\overline{TD}^3+DM\times\overline{TD}^2=\overline{TD}^2\times MT$$

إذن: $\mathscr{H}=S-a$

بالتعويض في (13) نحصل على:

$$\overline{BT}^3+a=\overline{AB}^2\times BT+BC\times\overline{BT}^2$$

وهذا يبيّن أن BT هو الحل المطلوب وأن $BT>BD$ و $BT>BC$.

زيادة على ذلك يدرس الطوسي المسألة التالية: إذا كانت AB و BC معطاة فإن جماعة جذور جماعة المعادلات.

$$(x^3+a=\overline{AB}^2+BC\,x^2 \quad \text{حيث} \quad 0<a<\overline{AB}^2\times BC$$

التي هي أكبر من BD تشكّل المجال $]BD, BT_1[$ حيث BT_1 هو جذر المعادلة:

$$x^2=\overline{AB}^2+BC\,x$$

بالفعل فإن BT_1 ليس جذراً لأية معادلة من جماعة المعادلات لأن:

$$\overline{AB}^2\times BT_1+BC\times\overline{BT}_1^2=\overline{BT}_1^3<\overline{BT}_1^3+a$$

هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى مهما كان BQ من المجال $]BD, BT[$ يوجد a بحيث يكون BQ جذراً للمعادلة:

$$x^3+a=\overline{AB}^2\,x+BC\,x^2$$

لأن:

$$\overline{BT}^3-\overline{BQ}^3=\overline{BT}^3-\overline{BQ}^2\,(BT_1-T_1Q)=(\overline{BT}^2-\overline{BQ}^2)\,BT_1+\overline{BQ}^2\times T_1Q,$$

$$\overline{BT}^3-(\overline{AB}^2\times BQ+BC\times\overline{BQ}^2)=\overline{AB}^2\times BT_1+BC\times\overline{BT}_1^2-\overline{AB}^2\times BQ$$
$$-BC\times\overline{BQ}^2=(\overline{BT}_1^2-\overline{BQ}^2)\,BC+\overline{AB}^2\times T_1Q.$$

وبالمقارنة نجد أن:

$$\overline{BQ}^3<\overline{AB}^2\times BQ+BC\times\overline{BQ}^2$$

إذن، يوجد a بحيث ان:

$$\overline{BQ}^3+a=\overline{AB}^2\times BQ+BC\times\overline{BQ}^2$$

نستنتج إذن أن الطوسي أدّى به الأمر في هذه الحالة أولاً إلى إيجاد القيمة

العــظمى للعبــارة: bx^2+cx-x^3 . ولكي يحــدد هــذه القيمــة العــظمى أعــدم $x^2=\frac{2}{3}bx+\frac{1}{3}c$ ، أو بعبارة أخرى، لقد أعدم المشتق الأول لهذه المعادلة.

بعـد أن يبرهن أن الجـذر BD يقابـل القيمة العـظمى، فيحددهـا بـ S كي يميز الحالات الثلاث:

أ ـ $S < a$ استحالة

ب ـ $S = a$ حل وحيد

ج ـ $S > a$ حلّان

والحالة الأخيرة تقسم بدورها إلى حالات ثلاث:

١ ـ $a > \overline{BA}^2 \times CB$

يحول المعادلة بواسطة $x \mapsto DB + x$ ويجد $x^3 + DM\,x^2 = S - a$ وقـد سبق له أن درسها.

كي يجد الجذر الآخر يحول المعادلة بواسطة $x \mapsto BD - x$

٢ ـ $a = \overline{BA}^2 \times BC$

الحل المطلوب هو BC. والبرهان عبارة عن تحقّق.

٣ ـ $a < \overline{BA}^2 \times BC$

لإيجاد أحد الجذرين، يحل المعادلة المحولة بواسطة $x \mapsto DB + x$

لايجاد الجذر الآخر يحل المعادلة التي سبق تحويلها بواسطة: $x \mapsto DB - x$

ـ ٥ ـ

إذا كنا نفهم بالنظرية الهندسية للمعادلات التكعيبية استعمال الأشكال الهنـدسية لتحـديد الجـذور الحقيقية لهـذه المعادلات فـإن دراسـة الـطوسي تتعـدى هـذا الإطـار بأشواط. إن الأمثلة التي سقناها بأسلوب الرياضي نفسه تبين جيداً أن المقصود محاولـة مختلفة كلياً لا يلعب فيها الشكل الهنـدسي إلا دوراً مساعـداً. والطوسي بعيـداً عن أن يضطر إلى استخدامه، يفكر بالدالة ويدرس المنحنيات بواسطة معادلاتها.

إنها مرحلة أساسية من تاريخ الهندسة الجبرية نعالجها في مكان آخر كقضية بحد

ذاتها. ويبدو من الثابت أن تاريخ الهندسة الجبرية لا يمكن إدراكه في غياب دراسة لم تحصل حتى الآن لهذا التيار الجبري العربي الذي أثاره الخيام ووسعه الطوسي.

ومع هؤلاء الجبريين أيضاً، رأينا ظهور استعمال «المشتق» خلال مناقشة المعادلات الجبرية. مع هذا فالكل يعلم أن استعمال «المشتق الأول» المرتبط بالبحث عن النهايات العظمى (Maxima) لم يكن جديداً وحتى لو وجد في هذا أو ذاك من الأمثلة فقد بقي عرضيّاً ولم يحصل أن أصبح جزءاً من ضمن حل المعادلات التكعيبية إلاّ مع الطوسي فقط.

إن تعميم هذا الاستعمال أصبح محدداً بالفعل بإعداد نظرية المعادلات. إن فرقاً مهماً نتج على السواء عن التوسيع الذي تمّ في المجال نفسه للجبر وعن بحوث الرياضيين التي كانت تطول مجالات أخرى.

وبالفعل فإن أعمال بني موسى وابن قرّة وحفيده ابراهيم بن سنان والقوهي وابن الهيثم وكثير غيرهم ممن لم يكونوا جبريين، حول تحديدات اللامتناهية في الصغر هيأت بطريقة غير مباشرة لمحاولات مثل محاولة الطوسي. إن تاريخاً مدققاً ورزيناً لمفاهيم التفاضل قبل البداية التي حدثت مع نيوتن (Newton) وليبنز (Leibniz) يبرهن بأي معنى يمكننا التأكيد على أن الرياضيين الذين وردت أسماؤهم سابقاً قد أنجزوا دراسة هذه التحديدات.

برفض المعالجة الهندسية للعمليات الجبرية، الظاهر عند بني موسى والمؤكد من جديد عند لاحقيهم، وباكتشاف قوانين حسابية جديدة ضرورية في حساب المساحات والأحجام، فقد عمموا مفهوم العدد.

ومع هذا ورغم الأهمية الظاهرة لهذه النتائج فإن حساب التحديدات المتناهية في الصغر لا يمكن أن يتحول حساباً تفاضلياً وتكاملياً كما سوف يظهر عند نيوتن وليبنز، لأن غياب الترميز الجبري الموسع والفعال كان حاجزاً أساسياً في وجه هذا التحول. وفي الواقع فإن هذا الترميز بالضبط هو الذي سمح بتسمية هذا المفهوم الموجود في أبحاث الرياضيين والمقصود به المشتق.

ويبقى السؤال بمجمله ماثلاً: كيف تمكن الطوسي من استعمال مفهوم من دون اسم بهذا الشكل المنهجي؟ لا يفسر هذا الحدث إلاّ من خارج تقليد العاملين بـ «المتناهيات بالصغر»، ولم يكن ليصبح ممكناً إلاّ بتوسيع الجبر نفسه. إن التعداد البسيط والتصنيف للمعادلات الضروريين لإعداد نظرية المعادلات التي كان الجبر

يختلط بها، والبحث عن طريقة لحل المعادلات التكعيبية قادت إلى توسيع مجال التطبيق لمفهوم المشتق وتعميم هذا التطبيق. إن مفهوم المشتق المماثل بفضل العاملين بـ «المتناهيات بالصغر» والموسع من قبل الجبريين كان محكوماً عليه بالبقاء مكتوماً بسبب الضعف في الترميز الجبري. ونعرف على أية حال أن هذا الضعف استمر، وأنه حتى القرن السابع عشر كان الترميز الجبري يطبق بصورة أفضل على المفاهيم التفاضلية، أكثر مما يطبق على الجبر بحد ذاته. إن أقل ما يمكننا تأكيده إذن، هو أن الرياضي الذي منهج استعمال مفهوم مماثل وإن لم يكن ذا تسمية، كان بمستوى أن يوسّعه ليشمل المعادلات الجبرية، أيّ حل المعادلات العددية. وتلك كانت حالة الطوسي.

وهكذا، فإذا ما رد حل المعادلات العددية إلى مضمونه ـ أي الجبر ـ فإنه يكشف بصورة أفضل عن معنى لم يكف لحظة عن أن يعنيه أي التعويض عن غياب حل جبري ظاهر بواسطة إشارات الجذور لمعادلات من درجة أعلى من اثنين. وحتى وجود الصيغة المسماة بـ «صيغة «كاردان» (Cardan) موضعياً إن لم يكن شمولياً بعد لا يستطيع أن يقوم مقام مثل هذا الحل. وبالمقابل فإن الجبر احتوى على الوسائل المفهومية التي تسمح بطرح مسألة المعادلات العددية من أية درجة كانت.

هذا الجبر بالذات، وطريقة حل المعادلات العددية الخاصة بالطوسي يبينان أن تاريخ الجبر العربي وتاريخ جبر عصر النهضة يجب أن يكتبا بمعظمهما من جديد. ولكي نساعد على تحقيق هذا الأمر سنختتم بهذا التكهن الذي نقترحه على المؤرخين: هذا التقليد الجبري ـ تقليد الخيّام والطوسي ـ استطاع البقاء وعرف من قبل جبريي القرن السادس عشر، ومن بين هؤلاء هناك ڤيت بالدرجة الأولى.

الفَصْل الرَّابع

نَظريَّة الاعدَاد والتحْليل التوَافيقي

أولاً: التحليل الديوفنطسي في القرن العاشر: مثال الخازن[1]

ملخــص

ساهم كتاب المسائل العددية لديوفنطس، الذي أدخل في القرن التاسع بأشكال مختلفة، في تطوير رياضيات تلك الحقبة، إذ سمح أولاً بتوسيع ما كان موجوداً لدى الجبريين العرب بمعزل عن الترجمة العربية لديوفنطس أي التحليل الديوفنطسي القديم.

أما الإسهام الثاني وهو غير معروف كالإسهام السابق، لكنه أكثر أصالة منه، ونقصد به الإنطلاق نحو أبحاث جديدة في التحليل الديوفنطسي الحديث بالاتجاه الذي يفهمه باشيه دي مزرياك (Bachet de Méziriac) وفيرما (Fermat). إن تحليل النصين غير المنشورين يسمح بإثبات هذا الحدث بشكل قاطع. سنبيّن هنا أن هذه الأبحاث التي أثارتها قراءة ديوفنطس هي مع ذلك من أعمال الرياضيين الذين وضعوا أنفسهم عمداً خارج الجبر، وآثروا أسلوباً مختلفاً عن أسلوب «المسائل العددية» لديوفنطس.

لقد كانت مساهمة كتاب المسائل العددية لديوفنطس في الرياضيات العربية، أكثر وأقل أهمية في الآن نفسه مما نسب إليها. الواقع أن العديد من المؤرخين بعد أن فسّروا كتب ديوفنطس بعبارات الجبر، أسقطوا تفسيرهم على التاريخ وبالغوا في تقدير مساهمة هذا الرياضي في تشكيل وتطوير هذا العلم. جميعهم يتفقون رغم تشعب آرائهم على اعتبار كتاب المسائل العددية إرثاً من المسائل العددية المكافئة في معظمها لمعادلات (أو لنظم من المعادلات) غير محددة من درجة $\leqq 9$ وذات مجهولين أو أكثر

---

(١) *Revue d'histoire des sciences*, vol.32, no.3 (1979), pp.193-222.

ولا تحتوي إلا على مقادير نسبية (منطّقة) وحلول هذه المعادلات يجب أن تكون أعداداً نسبية موجبة وأعداداً صحيحة إذا أمكن، لكن لم تصغ أية شروط حول هـذه النقطة. إنّ **المسائل العددية** لم تعالج إلا أعداداً نسبية موجبة ولم تشر في أيـة لحظة إلى الأعـداد الجبرية الصماء بحدّ ذاتها ولا إلى معيار لمعرفة إن كـان العدد نسبيـاً (منطّقـاً) أو أصمـاً بشكل عام. وإذا ما اتفق أن درس ديوفنطس الشروط التي بها يمكن معـرفة إن كـانت الأعداد نسبية أم لا، فمن أجل البحث عن حل نسبي موجب فقط. وفي النهايـة يبدو عمل ديوفنطس مفسراً بعبارات تـدل على مفـاهيم المتغير، والـوسيط، والقوة، والحـلّ العام. وهكذا فعندما يبحث ديوفنطس في مسألة «قسمة مربع ما إلى مربعين آخـرين» يفسر النص مباشرة بأنه مسألـة معادلـة من الدرجـة الثانيـة بمتغيرين مكـافئة للمعـادلة $x^2 + y^2 = a^2$. وبما أن الرياضي أثناء حله ينسب للمعطى a قيمة خـاصة، فقـد رأوا في هذا تمثيلاً لوسيط ما في الحالات المشابهة.

إن تفسيراً كهذا يمكن دون شـك أن ينير المؤرخ الـذي يتصدى لـدرس الترابط الداخلي وتنظيم كتاب **المسائل العددية**. لكن منذ اللحظة التي يُعزى فيها هذا التفسير إلى المؤلف نفسه، يُطرح أمام مجال التأريخ صعوبتان عـلى الأقل: المجـازفة في إشـاعة فكرة أن مقدمة ديوفنطس استطاعت أن تكـون مصدراً للجـبر، والحيلولة بـالتالي دون فهم تيار آخر من الرياضيين الذين أخذوا عمل ديوفنطس كما هو بـالفعل، أي كعمـل حسابي.

إننـا نعلم وهذا صحيـح، أن الجبر تلقى اسمـه وتشكـل كعلم مستقـل بـذاتـه وتطور إن على الصعيد المفهومي أم على الصعيد التقني (بمـا فيه دراسـة المعادلات غـير المحددة) قبل ترجمة كتاب **المسائل العددية** من قِبل قسطا بن لوقا(٢)، فمن المسموح بـه إذن التأكيد في تاريخ الرياضيات العربية أن ديوفنطس هو لاحق للخـوارزمي رغم أنه عاش قبله بقرون عديدة. لقد أدخل التفسـير الجبري إذن أخـطاء في المنظور التـاريخي للرياضيات، مع أن تفسيراً كهذا يجب أن يُعزى إلى الجبريين العرب أنفسهم إذ يكفي أن نـذكر بـأن العنوان نفسـه لكتاب **المسـائل العـددية** قـد تـرجم ببسـاطـة من قِبلهم بـ «صناعة الجبر»(٣). سنبين من جهة أخرى أن التحليل الديوفنطسي في حلقـة الأعداد

---

(٢) انـظر: Rushdi Rashed, «Les Travaux perdus de Diophante, I et II,» *Revue d'histoire des sicences*, vol.27, no.1 (1974), pp.3-30, et vol.28, no.2 (1975), pp.97-122.

(٣) Rushdi Rashed, *L'Art de L'algèbre de Diophante*, Traduit du grec par Qustā b. Lūqā (Caire: [s.pb.], 1975).

الصحيحة Z، أي بالمعنى الذي قصده باشيه دي مزرياك (Bachet de Méziriac) فيما بعد، أبصر النور في القرن العاشر بتأثير من الترجمة العربية لكتاب المسائل العددية، غير أن التفسير الجبري لا يسمح مطلقاً بفهم هذه المساهمة الجديدة لمؤلف ديوفنطس التي تبقى الهدف الأساسي لهذه الدراسة.

من الواضح إذن في جميع الأحوال أنه لا يمكننا الإجابة بشكل صحيح عن المسألة التاريخية لتأثير المسائل العددية دون أن ندرك، بادىء ذي بدء، وبحدود التحليل النظري رياضيات ديوفنطس نفسها. لقد أجرينا هذا التحليل في مكان آخر[٤]، ودعمنا طرحاً قد يبدو غريباً وهو أن كتاب المسائل العددية قد ساهم خلال القرن العاشر في تشكيل فصل سوف يحمل إلى الأبد اسم ديوفنطس أكثر من مساهمته في الجبر.

ففي الواقع نصادف في القرن العاشر أعمالاً عديدة ترتبط بالتحليل الديوفنطسي بالمعنى الخاص بالقرنين السادس عشر والسابع عشر كان يمكن لها أن تبدو ببساطة أعمالاً فردية متناثرة، إتضحت هيكليتها ما ان ارتبطت بمقدمة ديوفنطس فظهرت عندها كعناصر لتيار من البحث كان باعثه الأساسي قراءة المسائل العددية لديوفنطس، ومُعَدّ ـ سلبياً على الأقل ـ عن طريق دمج المعادلات الديوفنطسية ذات الحلول النسبية (المنطّقة) في الجبر. يبقى أن نبين باختصار كيف أن هذه القراءة الحسابية بحد ذاتها كانت ممكنة.

كان هدف الرياضي في المسائل العددية واضحاً:

بناء نظرية حسابية (ἀριθμητικὴ θεωρία) بحيث إن عناصرها تشكل الأعداد باعتبارها كثرة من الوحدات (μονάδων πλῆθος)،وأجزاءها الكسرية باعتبارها كسوراً لمقادير. إن عناصر النظرية ليست حاضرة بذاتها فقط بل أيضاً كأنواع من الأعداد. إن عبارة (εἶδος) التي ترجمها قسطا بن لوقا بكلمة «نوع» وترجمها باشيه (Bachet) لاحقاً بكلمة (Species) لا تقتصر فقط على معنى «القوة المجهولة». يمكننا أن نبين أن هذا المفهوم يشمل على السواء ودون تمييز قوة كثرة معينة وقوة عدد من أي كثرة كان وغير محدد آنياً، ولكن يمكن أن يصبح في نهاية الحل محدداً دائماً. هذا العدد هو

(٤) انظر إلى مقدمتنا للمطبوعة باللغتين للكتب العربية لـ «الحساب» في الطبعة الجديدة من مجموعة «الحساب» (اليونانية والعربية)، اللارد ـ راشد: (Paris: Belles Lettres, [sous presse]).

العدد غير المعلن (ἄλογος ἀριθμός) والمسمى «الشيء». كي نـدرك جيداً هـذا المفهوم للنوع يجب أن نذكر بأن ديوفنطس يتحدث عن أنواع ثلاثة مختلفة: نوع العدد الخطي، ونوع العدد السطحي، ونوع العدد الجسمي. لدينا إذن ثلاثة أنواع أساسية تقابل المقادير المعروضة في الكتاب ∆ من ما وراء الطبيعة لأرسطو التي تم الحصول عليها انطلاقاً من قابلية القسمة غير المنتهية وفق الكمية. بخصوص هذه الأنواع الثلاثة فقط، يتحدث ديوفنطس عن طبيعة (φύσις) «طبع» الأعداد. لدينا في الواقع ثلاثة أنواع من الأعداد: الأول هو الخاص بالعدد المشارك للوحدة والذي يقسم بطريقة واحدة، الثاني هو الخاص بالعدد المشارك بالقوة والذي يقسم بطريقتين، أي على عددين مساويين لأضلاعه، الثالث هو نوع العدد المشارك وفقاً للمكعب ويقسم بطرق ثلاث. هذه الأنواع تولد كل الأنواع الأخرى التي تأخذ اسماءها منها في نهاية المطاف وهكذا فمال المال ومال مال المال، ومال كعب الكعب هي مربعات، وكعب كعب الكعب هو مكعب. بعبارة أخرى، الأنواع المتولّدة لا يمكن أن توجد إلا بالتركيب، وقوة كل منها هي حكماً مضاعف للعدد 2 أو 3. ويفهم حالاً لماذا النسخة العربية من الكتاب IV هي بعنوان «المربعات والمكعبات» وتعالج على السواء مال المال، ومال كعب الكعب، وكعب كعب الكعب، ولهذا السبب أيضاً لا يظهر المربع المكعب إطلاقاً في نصوص مسائل الحساب اليونانية والعربية رغم تحديد ديوفنطس له. أخيراً ولهذا السبب يغيب عن نص ديوفنطس مال مال الكعب. لكن بفضل مفهوم الأنواع هذا، فإن عدداً ما يمكن أن يعتبر منتمياً إلى أنواع عدة في الوقت نفسه: نعرف أهمية هذه السمة إن بالنسبة إلى صياغة المسائل أم بالنسبة إلى حلها. ويتضح في الوقت نفسه تركيب المسائل العددية. فالمقصود توفيق هذه الأنواع فيما بينها ضمن متطلبات معينة وبمساعدة عمليات الحساب الأولية. إن حل هذه المسائل يعني محاولة متابعة كل حالة «حتى لا يبقى سوى نوع واحد من الجهتين».

لكن دراسة منهجية للنص تكشف أن ديوفنطس يقصد بـ «الحل» أعداداً محددة أو بالأحرى أعداداً نسبية (منطّقة) موجبة. وأكثر من ذلك، يحصل أنه قبل المباشرة بالمناقشة أن يفرض على الأعداد المعطاة والأعداد الوسيطة شروطاً اضافية كأن يفرض للمسألة حلاً وحيداً نسبياً (منطّقاً). ويصف ديوفنطس المسألة في هذه الحالة بـ (πλασματικός) وهي عبارة تحددها بشكل تام الكلمة «مهيأة». إن تصوراً للحل كهذا يفسر لماذا لم يميز ديوفنطس في أية لحظة بين مسائل محددة وأخرى غير محددة، ولماذا لم يذكر في أي مكان درس المسائل المستحيلة كونها كذلك. نعلم في الواقع أنه

في تصنيفه للمسائل، يدرج مجموعات من مسائل محددة ضمن مسائل غير محددة. ونعلم أيضاً أن مسائل كان يجب أن تدرج في المسائل العددية غابت عنه مثل المسألة المكافئة للمعادلة $x^3 + y^3 = z^3$

رغم أن ديوفنطس خلال حلوله، قد أجرى عملياته بواسطة التعويض والحذف ورد الأنواع، أي بواسطة تقنيات جبرية، فإن كتاب المسائل العددية ليس كتاباً جبرياً. وبلغتنا اليوم، المقصود بذلك كتاباً حسابياً ليس في حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بل في نصف ـ الحقل الموجب للأعداد النسبية (المنطّقة)

ضمن الإطار الضيق نسبيّاً لنصف ـ الحقل هذا، علينا أن نعزو المسؤولية الرئيسية لتطور التقنيات الجبرية التي كانت دون شك شديدة الأهمية بالنسبة إلى الجبريين العرب.

إن كتاب المسائل العددية المقروء في ضوء الجبر الحديث الذي شكله الخوارزمي ولاحقوه، وجد مكانه في عداد الأعمال التي تناولت التحليل غير المحدد. حتى انه قدم دفعاً مهماً لتطور هذا الفصل من التحليل الذي أشير إليه بتسمية خاصة: «في الاستقراء»[5]، كما تشهد بذلك أعمال الكرجي مثلاً والمقصود به بالضبط التحليل الديوفنطسي في نصف ـ الحقل الموجب للأعداد النسبية (المنطّقة).

وهكذا نرى أن تأثير ديوفنطس على الجبريين العرب هو من باب التوسيع لا من باب التجديد. لكننا نلاحظ في الوقت نفسه أن التحليل الديوفنطسي للأعداد النسبية ألغى نفسه مندمجاً كلياً في الجبر بواسطة التحليل غير المحدد.

هذه هي الحالة التي واجهت البعض من رياضيين آخرين خلال القرن العاشر. هؤلاء الرياضيون الذين لم يكونوا جبريين في غالبيتهم، يرتبطون بمعنى ما بالتقليد

---

(٥) على الرغم من أنها ليست من لغة القرآن، يظهر هذا التعبير في الترجمات المختلفة لأرسطو، عند ترجمة ε'παγωγη'. غير أن معنى «استقراء» (induire) متضمن في مصدر الفعل العربي. وهكذا فإننا نجد في: اللسان، المكتوب في القرن الثالث عشر انطلاقاً من شهادات أكثر قِدَماً «قروى»، «اقترا»، «استقرا» البلدان أو الناس، أو الأشياء يعني عاينها وتفحصها على التوالي. وقد أُخذ بهذا المعنى للفعل منذ ذلك الوقت من كافة المعاجم وقواميس المفردات دون استثناء. انظر مثلاً: **Al-Tahānawī**, *Dictionary of the Technical Terms Used in the Science of the Musulmans* (Calcutta: [n.pb.], 1862), p.1229.

ولقد حرّف هذا المعنى ليدل به على التحليل السيّال (التحليل غير المحدد) منذ القرن العاشر، لمزيد من التفاصيل في هذا النقاش، أنظر مطبوعتنا باللغتين لديوفنطس.

الإقليدسي، وعدا ذلك فقد كانوا ملمّين بجبر عصرهم إضافة إلى إلمامهم بمؤلف ديوفنطس أيضاً.

لأنهم إقليديون، فالحساب بالنسبة إليهم يبقى حساب الأعداد الصحيحة الممثلة بخطوط مستقيمة. وعلى العكس من **المسائل العددية** لديوفنطس، فقد جعل هذا التمثيل احترام قواعد البرهان ممكنة كما كانت قد حددت وطبقت في كتب حساب **الأصول**.

وبما أنهم كانوا على علم بالجبر وبمؤلفات ديوفنطس، فقد تحاشوا المسائل غير المحددة وذات الحلول في مجموعة الأعداد النسبية، كما هي، فكرسوا أنفسهم للمسائل المشتركة بين **الأصول** و **المسائل العددية** لديوفنطس كنظرية ثلاثيات فيثاغورس مثلاً. إن هذا التوفيق بين الحسابين، أو بعبارة أخرى قراءة ديوفنطس في ضوء إقليدس، قادتهم بشكل طبيعي إلى التحليل الديوفنطي بالمعنى المقصود في القرنين السادس عشر والسابع عشر وإلى مسائل أخرى يتضمنها هذا التحليل، كتمثيل الأعداد الطبيعية على اعتبارها مجموع مربعات، والتوافق التربيعي مثلاً... إلخ. نفهم عند ذلك الحيز الخاص الذي شغلته القضية III ـ ١٩ من **المسائل العددية** في أعمالهم.

لا نعرف عن هذا التيار إلا القليل حتى الآن. ففي القرن التاسع عشر سبق لويك أن ترجم وحلل بحثين رياضيين يعالجان بعض الموضوعات من التحليل الديوفنطي، الأول لرياضيٍ مجهول الاسم(٦)، والثاني للخازن(٧)، وكلا البحثين يعالجان المثلثات العددية قائمة الزاوية، وهكذا فقد جذب بنظرته الثاقبة المعهودة انتباه المؤرخين إلى وجود هذه الأبحاث قبل القرن السادس عشر، وبدورنا، فقد نوهنا بأهمية هذه المسألة بالنسبة إلى مجموعة واسعة من رياضيي القرن العاشر ولاحظنا أن السموأل في كتابه **الباهر**(٨) لم يشر إلى ديوفنطس فقط إذ إنه يشير عندما يتعلق الأمر

---

(٦) انظر: فرانز ويبك، ترجمة مقطع مجهول المؤلف حول تشكيل المثلثات القائمة الزاوية من الأعداد الطبيعية، وبحث في الموضوع نفسه من قبل أبي جعفر محمد بن الحسين. وفي أبحاث حول عدة مؤلفات ليونارد دوبيز اكتشفت ونشرت من قبل: (Mr. le Prince Balthazar Boncompagni) وحول الصلات القائمة بين هذه المؤلفات وأعمال الرياضيين العرب، انظر: ويبك، ج ١، حيث نجد مقتطفات وترجمة لمؤلفات عربية غير منشورة (روما، ١٨٦١).

(٧) انظر: ويبك، المصدر نفسه.

(٨) Al-Samaw'al Ibn Yahya Abbas al-Maghribi, *Al-Bāhir en algèbre d'As-*=

بالمثلثات العددية القائمة الزاوية إلى السجزي(٩) وابن الهيثم(١٠)، ومؤخراً فقد ألمح عادل أنبوبا(١١) بحق على أهمية هذه النزعة في الرياضيات العربية في القرن العاشر وخاصة عند الخازن. وفي الحقيقة فإننا نعرف بحثين آخرين كانا قد حفظا، يعالجان المثلثات العددية القائمة الزاوية. الأول لأبي الجود بن الليث(١٢) والثاني كتبه الخازن ويفوق الأول أهمية، لسنا هنا بوارد التأريخ لهذه النظرية، لكننا سوف نستخلص بعض ملامحها فقط كي ندرس بعد ذلك بحثين من تلك الحقبة، أحدهما للخازن والثاني مجهول المؤلف، وكلاهما يعد شهادة عن الحالة والأسلوب الخاصين بالتحليل الديوفنطسي في القرن العاشر.

لنسجل إذن:

١ - ينوه الرياضيون بوضوح بأن هذه الأبحاث جديدة ومجهولة من قبل الأقدمين وكذلك من قبل المعاصرين. وهكذا فكاتب النص مجهول المؤلف، يكتب بعد أن يعطي مبدأ تكون المثلثات العددية القائمة الزاوية: «هذا هو الأصل في معرفة الأقطار للمثلثات التي هي أصول الأجناس(١٣)، ولم أجد هذا ذكر في شيء من الكتب القديمة(١٤) ولا ذكره أحد ممن وضع الكتب في الحساب من المحدثين ولا علمت أنه انفتح لأحد من قبلي».

٢ - إنهم يقيمون تمييزاً واضحاً بين التحليل غير المحدد وهذا الفصل. وهكذا

Samaw'al, notes et introduction par Rushdi Rashed et Salah Ahmad (Damas: Université de Damas, 1972), =

انظر النص العربي، ص ١٤٦ - ١٥١، والمقدمة الفرنسية، ص ٦٤ - ٦٦.

(٩) المصدر نفسه.

(١٠) المصدر نفسه.

(١١) Adel Anbouba, «L'Algèbre arabe au IXème et Xème siècles: Aperçu général,» *Journal for the History of Arabic Science*, vol.2, no.1 (1978).

انظر بشكل خاص الملاحظات حول عمل الخازن، ص ٩١ - ٩٢، التي حللناها فيما بعد في القسم الأول. انظر أيضاً الملحق، ص ٩٨ - ١٠٠، حيث يصحح عادل انبوبا خطأ سبّبه ويبك وأخذ به منذ ذلك الوقت، ويتلخص في خلقه شخصية ثانية - ابي جعفر محمد بن الحسين - ينتسب إليها بعض أعمال الخازن. يذكر أنبوبا حجة إضافية لتصحيح هذا الخطأ تقول بما يلي: ينسب لأبي جعفر الثاني هذا «إصلاحاً في المخروطات»، «مخطوطات الجزائر (١٤٤٦/١٠)». غير أن الفحص يبيّن أن هذه المخطوطة تماثل تلك المنسوبة صراحة إلى الخازن، انظر:

«Bodleian, Huntington 237,» f.78ᵛ - 123ᵛ.

(١٢) «Leiden, Or. (168/14),» f. 116ʳ - 134ʳ,

(١٣) في هذا النص كما في نص الخازن فإننا نجد كلمتين للدلالة على المثلثات الأولية: «أصل الأجناس» أو «الأولي».

(١٤) نقصد بالقديم «الهلنستي».

يرجع الخازن إلى الجبر جميع المسائل التي ليس لها حل في الأعداد الطبيعية.

٣ ـ يصادف أن يذكر هؤلاء الرياضييون ديوفنطس مباشرة، كأن يرد الخازن إلى الكتاب III ـ ١٩، وهذا ما يؤكد على أية حال ما بيناه سابقاً من أن الكتاب III اليوناني والكتاب III المترجم إلى العربية ليسا إلا كتاباً واحداً.

٤ ـ إن المفاهيم الأساسية لهذا التحليل الجديد قد أدخلت في جميع هذه الأبحاث، أي المثلث الأولي والمولّد، وعلى الأخص، تمثيل الحل بالنسبة إلى قياس معين. وهكذا يذكر كاتب النص مجهول المؤلف أن أي عنصر من المتتالية الخاصة بالثلاثيات الفيثاغورية الأولية يكون بحيث إن وتر الأولى أو الثانية يوافق ٥ (قياس ١٢) أو يوافق ١ (قياس ١٢).

٥ ـ دراسة المسائل المستحيلة، مثل: $x^3 + y^3 = z^3$.

٦ ـ دراسة الأعداد المتوافقة.

٧ ـ استعمال لغة إقليدس الخاصة بالقطع المستقيمة بغية برهنة القضايا المختلفة.

وبالنتيجة وكتوضيح لهذا المجال من البحث، سنتطرق الآن إلى:

١ ـ دراسة نص الخازن.

٢ ـ مبرهنة فيرما بالنسبة إلى الحالة $n = 3$.

١ ـ رسالة الخازن حول المثلثات العددية قائمة الزاوية[١٥]

في هذه الرسالة التي سنتبعها عن قرب ونحللها هنا، ينص الخازن ويبرهن المقدمات الثلاث التالية:

مقدمة (١):

لا يوجد أي زوج مركب من أعداد طبيعية مربعة ومفردة بحيث ان مجموع حدّيه يكون مربعاً[١٦].

---

(١٥) «Bibliothèque nationale, Paris (2457),» f. 204ʳ - 215ʳ.
نُسخت هذه المخطوطة عام ٣٥٩ هجري الموافق ٩٦٩ ميلادي من قبل الرياضي السجزي.

(١٦) «رسالة،» ص ٢٠٤.

البرهان:

ليكن (a,b) زوجاً مركباً من الأعداد الطبيعية المربعة والمفردة بحيث إن:

(1) $a + b = c$ و c مربع.

لنفرض أن: $a = x^2$ و $b = y^2$ و $c = z^2$، تكتب (1)

كما يلي: $x^2 + y^2 = z^2$

وبما أن a وb هما مفردان لذا يكون c عدداً زوجاً، وكذلك فإن x وy هما عددان مفردان وz يكون عدداً زوجاً.

نستنتج من (1) أن:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) = (z - y)^2 + 2y(z - y)$$

غير أن $(z - y)$ عدد مفرد، إذن $z - y = 2p + 1$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$x^2 = [x + (z - y)][x - (z - y)] + (z - y)^2$$

من (2) و(3)، نحصل على:

$$2y(z - y) = [x + (z - y)][x - (z - y)]$$

لنفترض أن: $z - y = 2p + 1$، إذن $x + (z - y)$ هو عدد زوج و$x - (z - y)$ هو أيضاً عدد زوج، وعندها يقبل الطرف الثاني من المساواة القسمة على 4. ولكن العدد $y(z - y)$ من الطرف الأول هو عدد مفرد. فالمساواة إذن مستحيلة.

ملاحظة: أعطي البرهان بواسطة الخطوط المستقيمة والقضية 22 - IX من **الأصول**. ويشار في النص إلى القضية 22 - VIII من **الأصول**، لكننا نجد في الهامش 22 - IX وقد كتبت بالخط نفسه.

من الواضح أنه:

إذا كان: $a \equiv 1 \pmod 4$
$b \equiv 1 \pmod 4$

فإن: $c = 2 \pmod 4$

وبالتالي لا يوجد مربع على صورة $2 \pmod 4$

مقدمة (٢):

لا يمكن أن يكون ضلعا عددين مربعين ومجموعهما مربع، زوجيّي الزوج[١٧].

البرهان:

لنفترض أن $x = 2^m$ و $y = 2^n$ حيث $m < n$

إذا كان: $p = n - m$ فإن: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2^p}$

من ذلك نستنتج أن:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{2^{2p}} \quad \text{وأن:} \quad \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + 2^{2p}}$$

غير أن $(1 + 2^{2p})$ ليس مربعاً [لأن مربعين لا يمكن أن يكونا متتاليين][١٨]، إذن $(x^2 + y^2)$ لا يمكن أن يكون بدوره مربعاً.

ملاحظة: يبين إذن أن: $x^2 + y^2 = 2^{2m}(1 + 2^{2p})$ لا يمكن أن يكون مربعاً إطلاقاً

كي يصل الخازن إلى استنتاجه فقد أتم برهانه بواسطة الخطوط المستقيمة واستعان بشكل ضمني بالقضية VIII-24 من **الأصول**.

مقدمة (٣):

$$(a + b)^2 = b^2 + 4\frac{a}{2}\left(b + \frac{a}{2}\right)$$

---

(١٧) المصدر نفسه، ص ٢٠٤ (ظهر الورقة). نقصد بـ «زوجي الشفعية» الأعداد التي تكتب بالشكل 2^n. انظر:

Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique* (Leipzig: Hoche, 1866), pp.15, 1.4-10.

انظر أيضاً إلى:

Wilhelm Kutsch, ed., *Tābit b. Qurra's: Arabische Übersetzung der des Nikomachos von Gerasa*, Beirut, Université St. Joseph, Institut de lettres orientales de Beyrouth, 9 (Beyrouth: Imprimerie catholique, 1958), pp.20, 1. 23-25, et 21, 1. 1-2.

انظر أيضاً إلى تعريف إقليدس «العناصر»، الكتاب السابع، تعريف ٨.

(١٨) إن العبارات المحصورة ضمن [ ] ليست في النص.

عندما يكـون a عدد زوج وb عـدد فرد ويكـون كل من a وb عـدد زوج، يتم التثبت من هذه المتطابقة[19] بواسطة القضية 8 - II من كتاب **الأصول**.

قضية (١):

نريد أن نجد عددين مربعين أوليين فيما بينهما، الأول عدد زوج والثاني مفرد، ويكون مجموعهما مربعاً[20]. أي جد الثلاثيات الفيثاغورية الأولية[21].

تحليل:

لنفترض وجود هـذه الأعداد وليكن x وy العـددين بحيث إن x عـدد زوج وy عدد مفرد

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad [1]$$

لنفرض أن $t = z - y$ ، إذن t عدد زوج لأن y وz مفردان وهذا يعني[22]:

$$z = \left(y + \frac{t}{2}\right) + \frac{t}{2} \qquad [2]$$

وبناءً على المقدمة (٣)، لدينا:

$$z^2 = y^2 + 4\left(y + \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{t}{2}$$

لذا: $x^2 = 4\left(y + \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{t}{2}$

إذن: $\left(y + \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{t}{2}$ هو مربع و $\left(y + \frac{t}{2}\right) \Big/ \frac{t}{2}$ هو أيضاً مربع.

نكتب $\frac{p^2}{q^2} = \left(y + \frac{t}{2}\right) \Big/ \frac{t}{2}$ حيث $\left.\begin{matrix}(p, q) = 1 \\ (p > q)\end{matrix}\right\}$

وَ p و q هما من شفعية مختلفة حسب [2].

لذا: $y = p^2 - q^2$ و $x = 2pq$ و $z = p^2 + q^2$

---

(١٩) «رسالة،» ص ٢٠٥ (وجه الورقة).

(٢٠) المصدر نفسه، ص ٢٠٥.

(٢١) يقال عن الثلاثية (x, y, z) انها أولية إذا كانت الأعداد الثلاثية z,y,x أولية فيما بينها.

(٢٢) يسمي الخازن $\left(y + \frac{t}{2}\right)$ «عدداً مركباً» و $\frac{t}{2}$ بـ«الفرق».

ملاحظات:

١ - من الواضح أن الخازن يستعمل أثناء التحليل وبشكل ضمني، قضايا عديدة من كتاب **الأصول** 24 وVIII-19 وIX-2، ورغم كونه لم يشر إلى ذلك صراحة فإن كتاب **الأصول** كان يشكل خلفية مشتركة للرياضيين.

٢ - لا يعطي الخازن تركيباً لهذه القضية. صحيح أن هذا التركيب قد أعطي في x-29، المقدمة (١) من **الأصول**، فإذا ما ربطنا تحليل الخازن بتركيب إقليدس، نحصل على المبرهنة التالية[٢٣]:

لنفرض أن x, y, z أعداد ثلاثة. بحيث $0 < x$ و$0 < y$ و$0 < z$ و$(x, y) = 1$ وx عدد زوج.

تعتبر الشروط التالية متكافئة فيما بينها:

أ - $x^2 + y^2 = z^2$

ب - يوجد زوج مرتب (p, q) من الأعداد الطبيعية بحيث $p > q > 0,$ و$(p, q) = 1$ وp وq من شفعيات متناظرة بحيث:

$$x = 2pq, \quad y = p^2 - q^2, \quad z = p^2 + q^2 \quad (*)$$

ينتج من X-29، المقدمة (١)، لإقليدس أن ب) ⇐ أ) ومن قضية الخازن أن أ) ⇐ ب)، وهذا الاقتضاء الأخير هو ما يطلق عليه الخازن اسم التحليل.

يبقى أن نبرهن أيضاً أن تطبيق إقليدس:

$$\varepsilon : (p, q) \rightarrow (x, y, z)$$

المحدّد بالعلاقة (*) هو تطبيق غامر[٢٤].

رغم أن الخازن قد شدّد على هذا الأمر إلا أنه لم يبرهنه.

ويشير إضافة إلى ذلك، أنه إذا كان كل من x وy أعداداً زوجية، فإنهما يتأتيان من زوج مرتب (p, q) حيث $(p, q) = 1$. وبتعبير آخر، يشير الخازن إلى أن الثلاثيات (x, y, z) هي أيضاً من مجموعة الصور الناتجة عن التطبيق الإقليدسي حيث x وy هي

---

(٢٣) انظر: Hardy and Wright, *The Theory of Numbers* (Oxford: [n.pb.], 1965), th.225.

(٢٤) المصدر نفسه.

أعداد زوجية، فيكون لدينا إذن الصيغ السابقة نفسها.

بعد ذلك يؤكد الخازن بواسطة أمثلة عددية أن تطبيق إقليدس هو تطبيق متجانس ودرجته 2.

فإذا كان: $p' = \lambda p$ و $q' = \lambda q$ وبفرض:

$$(x, y, z) \quad = \varepsilon(p, q)$$
$$(x', y', z') = \varepsilon(p', q')$$

يكون لدينا: $\varepsilon(\lambda p, \lambda q) = \lambda^2 \varepsilon(p, q)$

أي: $(x', y', z') = (\lambda^2 x, \lambda^2 y, \lambda^2 z)$

وعندئذ يعالج الخازن المسألتين التاليتين:

مسألة (١):

توجد جماعة من الأعداد المربعة بحيث إذا أضيف لكل منها واحد، يصبح كل مجموع من مضاعفات العدد 5.

يقصد بذلك إذن الأعداد التي تحقق العلاقة:

$$(x^2 + 1) \equiv 0 \pmod 5$$

يعطي الخازن حلولاً كمثل الأعداد:

$$x \equiv 2 \pmod 5$$
$$x \equiv 3 \pmod 5$$

ما يجب ملاحظته هنا، هو أننا أمام مثل قديم جداً إن لم يكن من أوائل أمثلة حل معادلات كثيرات الحدود بقياس عدد طبيعي معطى. أو بتعبير معاصر إن (-1) هو باق تربيعي بقياس 5 وهنا نجد أنفسنا ضمن نطاق نظرية التوافق.

مسألة (٢):

جد الأعداد المربعة من مضاعفات العددين 9 و16، بحيث يكون مجموعها مضاعفاً للعدد 5.

إن نص الخازن لهذه المسألة مشوش بعض الشيء ويعالج الموضوع كما يلي:

نعرف أنه:

إذا كان $p = 2$ و $q = 1$ ، فإن: $x = 4$ و $y = 3$ و $z = 5$ تشكل ثلاثية أولية تجيب على المسألة.

إذا كان $p = 3$ و $q = 1$ ، فإن: $x = 6$ و $y = 8$ و $z = 10$ تشكل ثلاثية غير أولية من مضاعفات الثلاثية (3, 4, 5) ومربعاتها على التوالي هي من مضاعفات 9 و16 و5.

إذا كان $p = 3$ و $q = 2$ فإن: $x = 12$ و $y = 5$ و $z = 13$ ، هي ثلاثية غير مناسبة.

إذا كان $p = 4$ و $q = 1$ فإن: $x = 8$ و $y = 15$ و $z = 17$. تستبعد هذه الثلاثية لأن z ليست من مضاعفات 5.

إذا كان $p = 11$ و $q = 2$ فإن $x = 44$ و $y = 117$ و $z = 125$. إذن x^2 هو مضاعف للعدد 16 وy^2 هو مضاعف للعدد 9 وz^2 هو مضاعف للعدد 5. لكن علينا أن نشير إلى أن هذه الثلاثية ليست من مضاعفات الثلاثية الأولى وأن x^2 و y^2 ليسا من مضاعفات - متجانسي التضعيف - العددين 16 و9. ويعود سبب ذلك برأي الخازن إلى أن العدد 125 يقبل تحليلين مختلفين كمجموع مربعين:

$$125 = 100 + 25 = 4 + 121$$

إذن في حال أن $p = 10$ و $q = 5$ فإن $x = 4.25$ و $y = 3.25$ و $z = 5.25$ ، هي ثلاثية من مضاعفات الثلاثية الأولى.

إنطلاقاً من الثلاثية (3,4,5) المقابلة لحالة $p = 2$ و $q = 1$، نحصل إذن على $p = 2\lambda$ و$q = \lambda$ وهي الثلاثية $(4\lambda^2, 3\lambda^2, 5\lambda^2)$ التي تجيب على المسألة مهما كان العدد λ. غير أنه توجد حلول أخرى أولية كالثلاثية (44, 117, 125) ويرافق كلاً منها جماعة من الحلول.

ملاحظة:

إذا ما تفحصنا بعناية مجمل ما سبق، نلاحظ أن الخازن قد طرح المسألة التالية:

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$x = 4u, \quad y = 3v, \quad z = 5w$$

المسألة (١) تقود إلى: إذا كان $z = p^2 + 1$

فإن: $p \equiv 2 \pmod 5$ أو $p \equiv 3 \pmod 5$.

وكما لو أنه يقيم صلة مع المسألة (١)، يذكر الخازن الثنائيتين $(p, q) = (2,1)$

و$(3,1) = (p, q)$ باعتبارهما حلولاً للمسألة (٢) دون أن يقدم شروحات أُخرى.

إن جماعة حلول المسألة (٢) مؤلفة بالتأكيد من ثلاثيات مضاعفات الثلاثية (3,4,5) أي $u = v = w$، لكنها وكما يلاحظ ليست الحلول الوحيدة، فيجد مثلاً الحل: $w = 25$، $v = 39$، $u = 11$. غير أن مجموع الإعتبارات السابقة يبين أن المقصود هو بالواقع حل المعادلة: $16u^2 + 9v^2 = 25w^2$

حيث مجموعة الحلول تقابل مجموعة حلول المعادلة: $x^2 + y^2 = z^2$

بواسطة العلاقات[٢٥]:

$$\begin{array}{llll} dx = 4u, & dy = 3v, & dz = 5w & (u, v, w) = 1 \\ \delta u = 15x, & \delta v = 20y, & \delta w = 12z & (x, y, z) = 1 \end{array}$$

قضية (٢)

يمكن إيجاد n عدد طبيعي مربع بحيث يكون مجموعها عدداً مربعاً[٢٦]. $\Leftrightarrow$ [وجود حل في المجموعة $\mathbb{N}$ للمعادلة: [$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x^2$].

البرهان: $n = 2$

- يبرهن الخازن أن المتطابقة:

$$p^2 q^2 + \left(\frac{p^2 - q^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{p^2 + q^2}{2}\right)^2$$

تقود إلى الحل:

$$(x_1, x_2, x) = \left(pq, \frac{p^2 - q^2}{2}, \frac{p^2 + q^2}{2}\right)$$

مهما كانت الثنائية (p, q) بحيث ان $p > q$ وحيث إن p وq لهما الشفعيّة نفسها.

نلاحظ أن المتطابقة: $4p^2 q^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$

تقود إلى الحل: $(x_1, x_2, x) = (2pq, p^2 - q^2, p^2 + q^2)$

وذلك مهما كانت الثنائية (p, q) بحيث إن $p > q$. لقد سبق أن درسنا هذا

---

(٢٥) Louis Joel Mordell, *Diophantine Equations*, Pure and Applied Mathematics, vol.30 (London; New York: Academic Press, 1969), p.43.

(٢٦) «رسالة»، ص ٢٠٦ - ٢٠٧ (ظهر الورقتين).

الحل نفسه ورأينا أن الثلاثية الناتجة هي أولية إذا كان $(p, q) = 1$،وحيث p و q من شفعيتين مختلفتين.

البرهان: $n = 3$

- يبرهن الخازن المتطابقة:

$$p^2 q^2 + p^2 r^2 + \left(\frac{p^2 - q^2 - r^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{p^2 + q^2 + r^2}{2}\right)^2$$

التي تقود إلى الحل:

$$(x_1, x_2, x_3, x) = \left(pq, pr, \frac{p^2 - q^2 - r^2}{2}, \frac{p^2 + q^2 + r^2}{2}\right)$$

وهو حل يتألف من أعدادطبيعية إذا كان: $p^2 - q^2 - r^2$ و $p^2 + q^2 + r^2$ عددين زوجين وهذا يقتضي أن يكون كل من p^2 و $q^2 + r^2$ من الشفعية نفسها.

p^2 عدد زوج و $(q^2 + r^2)$ عدد زوج $\Leftrightarrow$
- كل من الأعداد p و q و r أعداد زوج
- p عدد زوج وكل من q و r أعداد مفردة.

p^2 عدد مفرد و $(q^2 + r^2)$ عدد مفرد $\Leftrightarrow$
- p عدد مفرد، q عدد زوج، r عدد مفرد
- كل من p و q أعداد مفردة و r عدد زوج.

من الضروري إذن أن تكون الثلاثية (p, q, r) مؤلفة من ثلاثة أعداد زوج أو من عدد زوج وعددين مفردين.

وتقود المطابقة: $4p^2 q^2 + 4p^2 r^2 + (p^2 - q^2 - r^2)^2 = (p^2 + q^2 + r^2)^2$

إلى الحل: $(x_1, x_2, x_3, x) = (2pq, 2pr, p^2 - q^2 - r^2, p^2 + q^2 + r^2)$

لكل ثلاثية (p^2, q^2, r^2) حيث $p^2 > q^2 + r^2$ و $(p, q, r) = 1$ يكون

$$(x_1, x_2, x_3, x) = 1$$

ملاحظات:

(١) برهان الخازن عام رغم اقتصاره على $n = 3$

لنفرض أن: .... p_1, p_2 p_n هي أعداد طبيعية، حيث: $p_n^2 > \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2$

لدينا إذن:

$$p_n^2 \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 + \frac{1}{4}\left[p_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2\right]^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^2$$

لذا:

$$x_r^2 = p_r^2 p_n^2 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$x_n^2 = \frac{1}{4}\left[p_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2\right]^2,$$

$$x^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^2$$

ولكي يكون الحل عدداً طبيعياً يجب أن يكون: p_n^2 و $\sum_{i=1}^{n-1} p_i^2$ من الشفعية نفسها.

لنفرض الآن المتطابقة:

$$4p_n^2 \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 + \left[p_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^2$$

نحصل على الحل:

$$x_r^2 = 4p_r^2 p_n^2 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$x_n^2 = \left[p_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2\right]^2,$$

$$x^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^2.$$

إذا كان $(p_1, \ldots, p_n) = 1$، فمن السهل أن يبرهن وجود حل أولي.

(٢) يقيم الخازن برهان المتطابقات بواسطة الخطوط المستقيمة.

(٣) إذا لم يكن الحل عدداً طبيعياً أي إذا كان: p_n^2 و $\sum_{i=1}^{n-1} p_i^2$

ليسا من الشفعية نفسها فالمسألة تتعلق عندئذ حسب ما يراه الخازن بالجبر أي بـ «التحليل السيّال» حسب لغة الجبريين، لأن الحل يكون كسرياً.

قضية (٣)

جد الحل المكون من الأعداد الطبيعية للمعادلة[٢٧]: $x^2 + y^2 = z^4$ [1]

(٢٧) المصدر نفسه، ص ٢٠٧ (ظهر الورقة).

لنفرض أن (p, q, r) ثلاثية فيثاغورية، وأن $x = 2pq$ و $y = p^2 - q^2$، وتبعاً للمتطابقة التي سبق ورأيناها: $4p^2 q^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$ [2]

لدينا إذن: $x^2 + y^2 = r^4$

يكفي أن نطبق من جديد تطبيق إقليدس بفرضنا:

$$p = 2uv, \quad q = u^2 - v^2, \quad r = u^2 + v^2$$

مثال:

$u = 2,\ v = 1$ لذا: $p = 4$ ، $q = 3$ وَ
$x = 24,\ y = 7$ وَ $z = r = 5$

قضية (٤)

جد الحل المكون من الأعداد الطبيعية للمعادلة[٢٨]:

$$x^4 + y^2 = z^2 \qquad [1]$$

ـ طريقة أولى

لدينا المتطابقة التالية: $4\left(u^4 \cdot \frac{1}{4} v^4\right) = u^4 v^4$

لنفرض: $p = u^2 \qquad q = \frac{1}{2} v^2$

لدينا: $x^4 = 4p^2 q^2 = u^4 v^4, \quad y^2 = (p^2 - q^2)^2 = \left(u^4 - \frac{1}{4} v^4\right)^2$

$$z^2 = (p^2 + q^2)^2 = \left(u^4 + \frac{1}{4} v^4\right)$$

مثال: $u = 1, v = 2, x = 2, y = 3, z = 5$

ملاحظة: إن المعادلة [1] تكافىء:

$$\begin{cases} x^2 = \xi \\ \xi^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

حيث: $\xi = 2pq \qquad y = p^2 - q^2 \qquad z = p^2 + q^2$

ونصل إلى المعادلة $x^2 = 2pq$ التي تتحقق إذا كان $2pq$ عدداً مربعاً. يقترح

(٢٨) المصدر نفسه، ص ٢٠٧ (ظهر الورقة) ـ ٢٠٨ (وجه الورقة).

الخازن اعتبار $p = u^2$ $q = \frac{v^2}{2}$ ولذا، $x = uv$

- **طريقة ثانية**

بعد إيجاد حل خاص، مع مراعاة $z^2 = (p^2 + q^2)^2 = 25$ - إذن $p^2 + q^2 = 5$
- يفتش الخازن عن حل بحيث $z^2 = 25\lambda^2$

لدينا: $4\lambda^2 p^2 q^2 + (\lambda p^2 - \lambda q^2)^2 = \lambda^2(p^2 + q^2)^2$

ويبحث في جعل $(\lambda p^2 - \lambda q^2)^2$ مربع التربيع، أي في جعل $\lambda(p^2 - q^2)$ مربعاً.

وعندئذ يبحث عن عددين طبيعيين u وv بحيث $u = \lambda p^2$ و $v = \lambda q^2$ مراعياً أن يكون: ($u - v$) مربعاً و $\frac{u}{v} = \frac{p^2}{q^2}$ و $p^2 + q^2 = 5$

مثال:
$$u = 12,\ v = 3,\ u - v = 9,\ \frac{u}{v} = \frac{1}{4}$$

ملاحظة: إن المعادلة $x^2 + y^4 = z^2$ تكافىء:

$$\begin{cases} y^2 = \eta \\ x^2 + \eta^2 = z^2 \end{cases}$$

حيث $z = p^2 + q^2.$ و $\eta = p^2 - q^2$ و $x = 2pq$

يكفي إذن أن يكون $p^2 - q^2 = y^2$ أو بتعبير آخر $p^2 = y^2 + q^2$ (فيثاغورس)

يطبق الخازن هذه الطريقة على الحالة الخاصة (3,4,5).

إن أبحاثاً أخرى معروضة من قبل الخازن ليست في الحقيقة سوى بدائل عما سبق.

قضية (٥)

كل عدد يقبل التحليل إلى مربعين، فإن ضعفه يقبل التحليل إلى مربعين، كذلك الأمر بالنسبة إلى ضعف الأخير وهكذا إلى ما لا نهاية[٢٩].

برهان: ليكن

[1] $k = x^2 + y^2$ حيث $x \neq y$

---

(٢٩) المصدر نفسه، ص ٢٠٨ (ظهر الورقة) - ٢٠٩ (وجه الورقة).

فإذا أخذنا بالاعتبار كتاب «العناصر» (II-10، VII-5، VII-9) نجد لكل ثنائية عددية (a,b) أن:

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2) \qquad [2]$$

إذن:
$$2k=(x+y)^2+(x-y)^2$$
$$2k=x_1^2+y_1^2$$

حيث: $y_1=x-y$ ، $x_1=x+y$ ، $x>y$

كذلك، فإن: $2^2k=(x_1+y_1)^2+(x_1-y_1)^2=x_2^2+y_2^2$

وباستخدام الاستقراء نحصل على: $2^n k=x_n^2+y_n^2$

ملاحظة:

البرهان جبري هنا، ولا يستخدم الخازن في إجرائه سوى الاختزالات المعطاة في VII-5 وVII-9 وانطلاقاً من تعليل جبري لـ II-10 خاصة، التي لا يذكرها صراحة.

قضية (٦)

كل عدد زوجي ينقسم إلى مربعين فإن نصفه ينقسم إلى مربعين وعلى هذا القياس بقدر ما نشاء[٣٠].

البرهان

تسمح المتطابقة [2] بكتابة: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{2}$

حيث $x>y$

فإذا كان $k=x^2+y^2$ وk عدداً زوجاً فإن:

$$\frac{1}{2}k=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

من الضروري إذن أن يكون x وy من الشفعية نفسها كيما يكون $x+y$ و$x-y$ عددين زوجين وأن يكون: $y_1=\frac{x-y}{2}$ و $x_1=\frac{x+y}{2}$ عددين طبيعيين.

لدينا إذن: $\frac{1}{2}k=x_1^2+y_1^2$

---

(٣٠) المصدر نفسه، ص ٢٠٩ (وجه الورقة).

وكذلك لدينا: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 k = x_2^2 + y_2^2$

وباعتبار: $x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}$ و $y_2 = \frac{x_1 - y_1}{2}$

وباعتبار شروط الشفعية [إستقراء]، يكون لدينا:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n k = \left(\frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_{n-1} - y_{n-1}}{2}\right)^2$$

ملاحظة:

يحصر الخازن هذه القضية بالأعداد الزوجية، بسبب اعتباره العدد «كثرة من الوحدات». فيكتب:

«ولذلك إذا كان العدد الذي ينقسم بمربعين فرداً وقع نصفه كسر ولم ينقسم بعددين مربعين، لأن العدد كما قلنا ما ركب من آحاد صحاح».

وهكذا يصل الخازن إلى المسألة المركزية من بحثه، فيكتب: «وبعد تقديم ما قدمناه نصير إلى الغرض الذي نحوناه وهو أن نبيّن: إذا فرض لنا عدد من الأعداد كيف نطلب عدداً مربعاً إذا زدنا عليه العدد المفروض ونقصناه منه كان ما بلغ وما بقي عددين مربعين».

لخّص ديكسون (Dickson)[٣١] تاريخ هذه المسألة، ولنذكر هنا أنها كانت قد عولجت في المخطوطة مجهولة المؤلف[٣٢]، وأن مؤلفها أعطى لوائح بالأعداد التي تجيب عليها. أما الخازن فقط اختط لنفسه سبيلاً آخر، إذ إنه يبحث عن الشروط الضرورية لحل هذا النظام، لذا فهو يبدأ بـ «التحليل» ويمكننا أن نقدّم مبرهنته هكذا:

مبرهنة[٣٣]: إذا كان a عدداً طبيعياً معطى، فالشروط التالية تكون متكافئة:

(أ) إن النظام:

[1] $\begin{cases} x^2 + a = y_1^2 \\ x^2 - a = y_2^2 \end{cases}$ حيث $(y_1 > x > y_2)$ يقبل حلاً

(ب) توجد ثنائية من الأعداد الطبيعية (u, v) بحيث إن:

(٣١) Leonard Eugene Dickson, *History of the Theory of Numbers*, 3 vols. (New York: Chelsea, 1919), vol.2, p.459 sq.

(٣٢) المصدر نفسه.

(٣٣) «رسالة،» ص ٢٠٩ (ظهر الورقة) - ٢١١ (وجه الورقة).

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = x^2 \\ 2uv = a \end{cases} \qquad [2]$$

حسب هذه الشروط، تكون a على الشكل $4k$، حيث k ليست من قوى العدد 2.

● (ب) ⇐ (أ)

لنفترض أن [1] تقبل حلاً، لدينا إذن:

$$2x^2 = y_1^2 + y_2^2 \qquad [3]$$

وحسب المقدمة (١) نستنتج بسهولة أن الأعداد الطبيعية y_1 و y_2 لها الشفعية نفسها، مما يسمح بتحديد العددين الطبيعيين u و v بواسطة:

$$u = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ ، } v = \frac{y_1 - y_2}{2} \qquad [4]$$

لدينا إذن:

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) = x^2 \qquad [5]$$

و:

$$2uv = 2\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) = a$$

● (أ) ⇐ (ب)

إذا كانت الثنائية (u, v) محققة لـ [2]، لنفرض $y_1 = u + v$ و $y_2 = u - v$، لدينا إذن:

$$y_1^2 = u^2 + 2uv + v^2 = x^2 + a$$
$$y_2^2 = u^2 - 2uv + v^2 = x^2 - a$$

إذا كان $u^2 + v^2 = x^2$ حيث u و v لا يمكن أن يكونا عددين مفردين في آن معاً (مقدمة (1))، لذا فإن أحدهما هو عدد زوجي و $a = 2uv$ هو بالضرورة على الشكل المطلوب $4k$. ويلحظ الخازن أن أصغر عدد طبيعي يحقق هذه الشروط هو العدد 24.

مثال: $u = 4$ $v = 3$، $u^2 + v^2 = 5^2$، $x^2 = 5^2$، $y_1 = u + v = 7$، $y_2 = u - v = 1$، كلها أعداد تحقق:

$$\begin{cases} 5^2 + 24 = 7^2 \\ 5^2 - 24 = 1^2. \end{cases}$$

ملاحظات

١ - يجري الخازن العملية هنا حسب طريقة ديوفنطس «عمل المساواة»[٣٤]، فينفذ على المتغير في [3] التحويل الخطي [4].

٢ - يدعو الخازن العددين الطبيعيين u وv بـ«القرينين».

٣ - يكتب «لا يسبق العدد ٢٤٠ أي عدد مضاعف للعدد ٢٤ بحيث ينقسم نصفه لعددين مقترنين». لكن بعد عدة مقاطع يذكر بنفسه أن $a = 96 = 4.24$ حيث نصفه $48 = 6.8$ يحقق الشروط ولدينا:

$$\begin{cases} 10^2 + 96 = 14^2 \\ 10^2 - 96 = 2^2. \end{cases}$$

لكن ليس لدينا في هذه الحالة حل أولي لـ[5]، فهل لهذا السبب استثنى هذه الحالة؟ ليس لدينا ما يسمح بالإجابة.

٤ - حيث $a = 240$، لدينا:

$$\begin{cases} 17^2 + 240 = 23^2 \\ 17^2 - 240 = 7^2. \end{cases}$$

٥ - يعالج الخازن مسائل حيث لدينا حل نسبي (منطّق)، ويقول في هذه الحالة: «ويلفظ» الحل تحت عبارة التحليل السيّال (غير المحدد) بالمعنى الذي يقصده الجبريون بـ«المال». التمييز مهم هنا لفهم مسعى الخازن. ففي الحالة حيث ينقسم العدد a إلى مربعين تعاد كتابة [1] على الشكل:

$$\begin{cases} x_1^2 + a_1 = z_1^2 \\ x_1^2 - a_1 = z_2^2 \end{cases}$$ حيث x_1 عدد كسري.

وبما أن $a = 240$ يقبل القسمة إذن على 16 و4 فتعاد كتابة النظام بطريقتين:

$$\begin{cases} \left(\frac{17}{4}\right)^2 + 15 = \left(\frac{23}{4}\right)^2 \\ \left(\frac{17}{4}\right)^2 - 15 = \left(\frac{7}{4}\right)^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\frac{17}{2}\right)^2 + 60 = \left(\frac{23}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{17}{2}\right)^2 - 60 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 \end{cases}$$

---

(٣٤) انظر: «المسائل العددية» II-11، وتعليق:
Jean Marc Gaspard Itard, *Arithmétique et théorie des nombres,* Collection «Que sais-je?» (Paris: Presses universitaires de France, 1967), p.46 sq.

٦ - يعرض الخازن طرقاً عديدة وخاصة من أجل حل [1]، أكانت الأعداد صحيحة أم نسبية كما هو الحال مع الجبريين، ومن أهمها الطرق التالية:

أ - لنفترض أنه من الممكن كتابة العدد المعطى على الشكل:

$$a = \left(1 + \frac{1}{2}\right) l^2$$

في هذه الحالة، نفرض أن $x = \left(1 + \frac{1}{4}\right) l$ فتعاد كتابة [1] كما يلي:

$$\begin{cases} \frac{25}{16} l^2 + \frac{3}{2} l^2 = y_1^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 l^2 \\ \frac{25}{16} l^2 - \frac{3}{2} l^2 = y_2^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 l^2. \end{cases}$$

نفرض أن $l = 8$ ويكون $x = 10$ و $a = 96$

ب - وتسمى «طريقة صناعة» الجبر، أو الطريقة القانونية للجبريين. من أجل حل [1] نفتش أولاً عن x_1 بحيث:

$$x_1^4 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = z^2$$

لدينا:

$$x_1^2 + \left(\frac{a}{2x_1}\right)^2 = \left(\frac{z}{x_1}\right)^2 = z_1^2$$

نفرض:

$$x = z_1 = \frac{z}{x_1}$$

تعاد كتابة [1] كما يلي:

$$\begin{cases} z_1^2 + a = \left(x_1 + \frac{a}{2x_1}\right)^2 \\ z_1^2 - a = \left(x_1 - \frac{a}{2x_1}\right)^2. \end{cases}$$

بعد أن يلحظ الخازن بأن النظام:

$$\begin{cases} x^2 + 20 = y_1^2 \\ x^2 - 20 = y_2^2 \end{cases}$$

هو مستحيل الحل في مجموعة الأعداد الطبيعية، يطبق الطريقة السابقة ليجد الحل في مجموعة الأعداد النسبية، أي على طريقة الجبريين.

فيفــرض أن: $x_1 = \frac{3}{2}$ ، فيكون:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 + 10^2 = \left(\frac{41}{4}\right)^2$$

لذا: $x = z_1 = \frac{41}{6},\ y_1 = \frac{49}{6},\ y_2 = \frac{31}{6}$

٧ ـ وللتثبت من أن $u^2 + v^2 = z^2$، $(u > v)$ يعـطي الخـازن المعيـار البـديهي:
$v^2 = 2uq + r^2$ حيث $r = q$

فيكون لدينا بالفعل: $z^2 = (u + q)^2$

٨ ـ لنشر أيضاً إلى أن الخازن يستدعي بصورة أو بأخرى «صناعة الجـبر» في كل مرّة يناقش فيها حلاً من الأعداد النسبية (المنطقة)[٣٥].

خصائص الأعداد «المؤلف كل منها من مجموع عددين مربعين»[٣٦]:

يكتب الخازن «فإن ذلك مما يوضح المقدمة التي قدمها ديوفنطس للمسألة التاسعة عشرة من المقالة الثالثة من كتابه في الجبر».

هذه الملاحظة ذات الأهمية التاريخية الكبيرة تقتضي منا تعليقاً. لنذكـر أولاً بنص ديوفنطس من الكتـاب III ـ يونـاني ـ من **الأصول** حيث أراد ديـوفنطس حـل مسألـة مكافئة لِـ: $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \pm x_i = y_i^2$ حيث: $i = 1, 2, 3, 4$

لحل هذه المسألة، يبدأ بمقدمة عن المثلثات القائمة الزاوية للأعداد النسبية، أي بنقاش المسألة المكافئة لِـ: $x^2 + y^2 = z^2$

ويلاحظ في هذه المناسبة أنه إذا كان b و c ضلعي مثلث قائم الزاوية ووتره a فإن:

$$a^2 \pm 2bc = b^2 + c^2 \pm 2bc = (b \pm c)^2$$

إضافة إلى ذلك فهو يذكر بنتيجة المسألة II-9: «نريد أن نقسم عدداً مربعاً مفروضاً بعـددين مـربعين بمـا لا نهاية لـه من الطرق». ويبحث في تمثيـل عـدد طبيعي n كمجمـوع مـربعين بأربعة أشكال مختلفة. ولكي يحـل المسألـة الأخيرة يعـاين مثلثين قـائمي الزاويـة «على أصغـر نسبتهـا» أي حيث الأضـلاع تشكـل أعـداداً أوليـة فيـما بينهـا فيجـد (3,4,5)

---

(٣٥) انظر مثلاً: «رسالة،» ص ٢١٢ (ظهر الورقة)، ١٠، ٢.

(٣٦) المصدر نفسه، ص ٢١٣ (وجه الورقة).

و(5،12،13) ويستنتج أن بإمكـان حاصـل ضرب وتربيهما أن يتمثل كمجمـوع مربعـين بطريقتين مختلفتين:

$$65 = 16 + 49 = 1 + 64$$

أقل ما يمكن أن يقال هو أن ديوفنطس يطرح هنا مسـألة تحليـل عدد طبيعي إلى مجموع مربعات أعداد طبيعية.

يمكن اعتبـار هذه المقـدمة إذن كمقـدمة لـ III-9 بكـل معنى الكلمة. لهـذا فقد استعمل الخازن «المقدمة التي قدّمها» والتي تميز جيداً هذه المقدمة عن القضية نفسهـا. ولئن شكلت هذه المقدمة دائماً جزءاً من القضية نفسها فإن هذا الأمر ليس مؤكـداً في النص اليـوناني المحفـوظ فقط، بل في الـترجمة التي لخصهـا الكرجي أيضـاً، ففي هذا الملخص تعطى المقدمة كما القضية الأصلية تحت العنوان III-9.

نعلم من جهة أخرى أن هذه المسألة قادت بـاشيه (Bachet) وفـيرما (Fermat) من بعده إلى درس تمثيل عدد طبيعي وأعداد أولية تحديداً على شكل مجموع مربعات. أنظر الملاحظة VII لفيرما[٣٧]. يبدو إذن أن بداية بحث كهذا تقع في القرن العاشر كـما يبين ذلك نص الخازن.

قضية (٧)

إذا كتب عـدد طبيعي كمجموع مـربعين فـإن مـربعـه يكتب أيضـاً كمجمـوع مربعين[٣٨].

ليكن $n = p^2 + q^2$ ؛ (n و p و q أعداداً طبيعية).

لدينا $n^2 = (p^2 + q^2)^2 = 4p^2 q^2 + (p^2 - q^2)^2$

قضية (٨)

إذا كتب عدد بواسـطة أعداد سـطحية ذات عـوامل متنـاسبة فـإن مربـع العدد يكتب بواسطة مربعين.

ليكن $n = pq + rs$ ، (n, p, q, r, s أعداداً طبيعية) و $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$

(٣٧) Paul Tannery et Ch. Henry, *Oeuvres de Fermat* (Paris: [s.pb.], 1896), p.243 sq.

(٣٨) «رسالة،» ص ٢١٣ (وجه الورقة).

لدينا: $n^2 = 4pqrs + (pq - rs)^2$

غير أن $pqrs$ هو مربع، لأنه إذا كان: $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = k$

فإن: $\frac{pq}{q^2} = \frac{rs}{s^2} = k$ و $\frac{pqrs}{q^2 s^2} = k^2$

قضية (٩)

إذا كتب عدد مربع بواسطة مجموع مربعين فإن مربعه يكتب بشكلين مختلفين كمجموع مربعين.

ليكن: $n^2 = p^2 + q^2$، (n, p, q أعداداً طبيعية)

لدينا: $n^4 = n^2.n^2 = n^2 p^2 + n^2 q^2$

ومن جهة أخرى، لدينا: $n^4 = 4p^2 q^2 + (p^2 - q^2)^2$

قضية (١٠)

إن حاصل ضرب عددين ينقسم كل منهما إلى مربعين، ينقسم إلى مجموع مربعين بشكلين مختلفين.

ليكن: $m = p^2 + q^2$ و $n = r^2 + s^2$؛ (m, n, p, q, r, s أعداداً طبيعية).

لدينا:

$$\begin{aligned}(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) &= p^2 r^2 + p^2 s^2 + q^2 r^2 + q^2 s^2 \\ &= p^2 r^2 + q^2 s^2 + 2pqrs + p^2 s^2 + q^2 r^2 - 2pqrs\end{aligned}$$

لذا:

$$\begin{aligned}mn = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2) &= (pr + qs)^2 + (ps - qr)^2 \\ &= (pr - qs)^2 + (ps + qr)^2\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}5 &= 4 + 1 \quad p = 2, \quad q = 1 \\ 13 &= 4 + 9 \quad r = 2, \quad s = 3\end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}5 \times 13 = 65 &= (4 - 3)^2 + (2 + 6)^2 = 1^2 + 8^2 \\ &= (4 + 3)^2 + (6 - 2)^2 = 7^2 + 4^2\end{aligned}$$

ملاحظة

من الواضح إذن أن هذه المسألة ترد إلى القضية III-19 لديوفنطس غير أن الخازن قد بيّن صراحة أنها نتيجة للمتطابقة:

$$\begin{aligned}(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) &= (pr + qs)^2 + (ps - qr)^2 \\ &= (ps + qr)^2 + (pr - qs)^2\end{aligned}$$

وهي من التحاليل الأولى المعروفة للأشكال التربيعية. لنشر أيضاً إلى أن هذه المتطابقة لا ترد صراحة عند ديوفنطس.

قضية (١١)

إن حاصل ضرب عددين، ينقسم أحدهما إلى مربعين بشكلين مختلفين وينقسم الآخر إلى مربعين بشكل وحيد، ينقسم إلى مجموع مربعين بأربعة أشكال مختلفة[٣٩].

ليكن: $m = p^2 + q^2 = p_1^2 + q_1^2$ وَ $n = r^2 + s^2$

لدينا كما في السابق:

$$\begin{aligned} mn &= (pr + qs)^2 + (ps - qr)^2 = (ps + qr)^2 + (pr - qs)^2 \\ &= (p_1 r + q_1 s)^2 + (p_1 s - q_1 r)^2 \\ &= (p_1 s + q_1 r)^2 + (p_1 r - q_1 s)^2 \end{aligned}$$

قضية (١٢)

إن حاصل ضرب عددين، ينقسم أحدهما إلى مربعين بشكلين مختلفين وينقسم الآخر وهو مربع إلى مربعين بشكل وحيد، ينقسم إلى مجموع مربعين بستة أشكال مختلفة[٤٠].

ليكن: $m = p^2 + q^2 = p_1^2 + q_1^2$ ، $n^2 = r^2 + s^2$

لدينا:

$$\begin{aligned} mn^2 &= (pr + qs)^2 + (ps - qr)^2 \\ &= (ps + qr)^2 + (pr - qs)^2 \\ &= (p_1 r + q_1 s)^2 + (p_1 s - q_1 r)^2 \\ &= (p_1 s + q_1 r)^2 + (p_1 r - q_1 s)^2 \\ &= p^2(r^2 + s^2) + q^2(r^2 + s^2) \\ &= p_1^2(r^2 + s^2) + q_1^2(r^2 + s^2). \end{aligned}$$

قضية (١٣)

إذا انقسم عدد إلى مربعين بطريقتين مختلفتين، فمربعه ينقسم إلى مجموع مربعين بأربعة أشكال مختلفة.

---

(٣٩) المصدر نفسه، ص ٢١٣ (ظهر الورقة) - ٢١٤ (وجه الورقة).

(٤٠) المصدر نفسه، ص ٢١٤ (وجه الورقة).

ليكن: $m = p^2 + q^2 = p_1^2 + q_1^2$

لدينا: $m^2 = 4p^2 q^2 + (p^2 - q^2)^2$
$= 4p_1^2 q_1^2 + (p_1^2 - q_1^2)^2$

لدينا من جهة ثانية: $m^2 = (pp_1 + qq_1)^2 + (pq_1 - qp_1)^2$
$= (pq_1 + qp_1)^2 + (pp_1 - qq_1)^2$

نفرض[41]: $m = 65 = 64 + 1 = 16 + 49$

لدينا:
$$m^2 = 16^2 + 63^2 = 256 + 3\,969$$
$$= 56^2 + 33^2 = 3\,136 + 1\,089$$
$$= 60^2 + 25^2 = 3\,600 + 625$$
$$= 39^2 + 52^2 = 1\,521 + 2\,704$$

يلخص الخازن هذه القيم في الجدول التالي:

3 969	63	16	256
3 600	60	25	625
3 136	56	33	1 089
2 704	52	39	1 521

وهكذا يستنتج: «ومربع الخمسة والستين مع ما ينقسم به من المربعات هو الذي قدمه ديوفنطس في المسألة التي ذكرناها» [III-9] وهي: «وجود أربعة أعداد إذا زيد كل واحد منها على مربع مجموعها كان لما بلغ جذر وإن نقص منه كل واحد منها كان كما بقي جذر».

لدينا هنا ترجمة شبه حرفية للمسألة [III-19] لديوفنطس. ينجز الخازن القضايا مؤكداً أنه من مقدمة [III-19] هذه، يمكن استنتاج القضية التالية التي لا يبرهنها والتي يمكن الحصول على برهانها بواسطة الطرق المستخدمة وسنعرضها بلغة أخرى.

قضية (١٤)

جد أربعة أعداد مختلفة بحيث يكون مجموعها مربعاً ومجموع كل اثنين منها مربعاً[42].

(٤١) المصدر نفسه، ص ٢١٤ (ظهر الورقة) - ٢١٥ (وجه الورقة).

(٤٢) انظر ديوفنطس، III-6.

تكتب هذه المسألة:

$$(\Sigma_0)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=z^2\\ x_1+x_2=u_1^2\\ x_3+x_4=u_2^2\\ x_1+x_3=v_1^2\\ x_2+x_4=v_2^2\\ x_1+x_4=w_1^2\\ x_2+x_3=w_2^2. \end{cases}$$

لنعاين النظام:

$$(\Sigma)\begin{cases} u_1^2+u_2^2=z^2\\ v_1^2+v_2^2=z^2\\ w_1^2+w_2^2=z^2 \end{cases}$$

لو فرضنا أن:

$$\begin{cases} 2x_1=u_1^2+v_1^2-w_2^2=u_1^2+w_1^2-v_2^2= & u_1^2+v_1^2+w_1^2-z^2\\ 2x_2=u_1^2-v_1^2+w_2^2=u_1^2-w_1^2+v_2^2= & u_1^2-v_1^2-w_1^2+z^2\\ 2x_3=u_2^2+v_1^2-w_1^2=u_2^2-v_2^2+w_2^2= & -u_1^2+v_1^2-w_1^2+z^2\\ 2x_4=u_2^2-v_1^2+w_1^2=u_2^2+v_2^2-w_2^2= & -u_1^2-v_1^2+w_1^2+z^2 \end{cases}$$

نحصل على حل للنظام (Σ_0). وعلى العكس، فإن أي حل لِـ (Σ_0) يعطي حلاً لِـ (Σ).

إن العلاقات (C) تعطي حلول النظام (Σ).

$$(C)\begin{cases} z=d_1(p_1^2+q_1^2),\ u_1=d_1(p_1^2-q_1^2),\ u_2=2\,d_1\,p_1\,q_1\\ z=d_2(p_2^2+q_2^2),\ v_1=d_2(p_2^2-q_2^2),\ v_2=2\,d_2\,p_2\,q_2\\ z=d_3(p_3^2+q_3^2),\ w_1=d_3(p_3^2-q_3^2),\ w_2=2\,d_3\,p_3\,q_3 \end{cases}$$

حيث $d_i\in\mathbb{N}$ وَ $(p_i,q_i)=1$ وَ $(i=1,2,3)$

لكي يقبل النظام (Σ) حلولاً من الأعداد الطبيعية، يجب ويكفي أن تكون u_1 و v_1 و w_1 أعداداً طبيعية وأن يكون $u_1+v_1+w_1$ (وبالتالي z) عدداً مفرداً. نختار إذن الأعداد الطبيعية p_i و q_i بحيث ان $(p_i,q_i)=1$ وإذا كان N المضاعف المشترك الأصغر لِـ:

$$(p_1^2+q_1^2,\ p_2^2+q_2^2,\ p_3^2+q_3^2)$$

نأخذ z مضاعفاً للعدد N وَ:

$$d_i=\frac{z}{p_i^2+q_i^2}$$

والطريقة مشابهة بالنسبة إلى المسألة:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = z^2 \\ x_i + x_j = u_{ij}^2 \end{cases}$$

حيث i > j يكون لدينا $\binom{n}{2}$ معادلة. وعندما يكون n عدداً زوجاً $4 \leqslant$

٢ ـ أبو جعفر: حول المسألة الديوفنطسية

$$x^3 + y^3 = z^3$$

سبق أن عرفنا بواسطة الخازن أن رياضياً من القرن العاشر هو الخجندي قد صاغ مبرهنة فيرما (Fermat) في حالة $n = 3$ ويؤكد الخازن باختصار أن برهان هذا الأخير هو خاطىء ويكتب[٤٣]: «قد بينت أن ما قدمه أبو محمد الخجندي رحمه الله في برهانه على أنه لا يجتمع من عددين مكعبين عدد مكعب فاسد غير صحيح».

ليس هناك حتى الآن ما يسمح بدعم هذه الشهادة المهمة. وفي الواقع فإننا اكتشفنا نصّاً[٤٤] منسوباً إلى أبي جعفر يمكننا أن نقرأ فيه نص هذه المبرهنة إضافة إلى محاولة للبرهان عليها. هذا النص عدا عن الإمكانية التي يتيحها في إدراك الأسباب التي منعت رياضيّي القرن العاشر من الأخذ بالمسألة في حال $n > 3$، يتطابق في كل نقاطه مع تأكيدات الخازن باستثناء أنه نسبه إلى أبي جعفر لا إلى الخجندي. وفيما عدا هذه التسمية، ليس هناك أية إشارة إلى كاتب النص باستثناء أنه كان منشغلاً في مسائل ديوفنطسية وبنظرية الأعداد، أمّا من جهتنا فلا نعرف أحداً يستجيب هذه الأوصاف غير أبي جعفر الخازن نفسه. لكن من المدهش حقاً أن يكون الخازن هو كاتب نص برهانه واضح الإخفاق، إذ كيف أمكن له بعد أن شهّر ببرهان الخجندي أن يتبع بدوره مساراً مخفقاً إلى هذا الحد، اللهم إلاّ إذا افترضنا أن الخازن قد ضل هو أيضاً.

أمِن الممكن أن يكون المقصود كتيّباً حيث ينسب الخازن النص إلى الخجندي،

---

(٤٣) «رسالة،» الخازن إلى الحاسب. مخطوطة:
«Bibliothèque nationale, Paris, (2457),» f.86ᵛ

انظر أيضاً ترجمة ويبك، ص ٣٩.

(٤٤) مخطوطة: «Bodleian Library, Thruston (3),» f.140.

وهي فرضية يبررها العنوان نفسه أي «هذا هو البرهان بواسطة الخطوط المستقيمة عن المعلم أبي جعفر...»؟ لكن تخميناً كهذا لا يثبت في وجه أي تحقيق إذ إن النقد لبرهان الخجندي والذي رأينا الخازن يصرح أنه أجراه في مكان آخر غائب من هذا النص.

دون أن نبت بشكل قاطع، بامكاننا مع هذا أن ندعي أن هذا الكتيّب يعود إلى حقبة الخجندي والخازن، أي إلى القرن العاشر وبالتالي فهو من أعمال أحد أولئك الرياضيين الذين اهتموا بالتحليل الديوفنطسي. انطلاقاً من تلك الحقبة، بدأت بالواقع دراسة مبرهنة فيرما في حال $n = 3$ من قبل الرياضيين، وأصبحت مشهورة لدرجة أنها لفتت نظر الفلاسفة إليها. وهكذا ففي بداية القرن الحادي عشر ذكر ابن سينا في كتابه **الشفاء** أن هذه المبرهنة لم يتم البرهان عليها بعد، فكتب[45]: «عن عددين مكعبين هل يجتمع منهما مكعب كما يجتمع من عددين مربعين مربع». وهي عبارات مشابهة تقريباً لما ذكر في النص المعثور عليه.

بعد أن يذكر المبرهنة بطريقة واضحة يتعهد الكاتب بأن يبرهنها انطلاقاً من المتطابقة:

$$z^3 - y^3 = y^2(z - y) + (z + y)(z - y)z \text{ ، (حيث } z > y)$$

يبدأ برهانه بتعليل هندسي لهذه المتطابقة ويلاحظ أن طرف المتطابقة الثاني يقابل حجماً لكنه ليس مكعباً. ويستنتج أن الطرف الأول ليس مكعباً. هذا الخلط بين الشكل الهندسي وحجمه ـ وهي معرفة بدائية حتى في تلك الحقبة ـ لا يحوّل مع ذلك إعطاء حكم عن مقدرة الرياضي، فمن الجائز أنها صادرة عن رغبة في التبرير عن طريق التملص من الصعوبات وعن اقتراح يعرف الكاتب بينه و«بين نفسه» أنه صحيح، حتى انه بإمكاننا الافتراض أن هذا اليقين نفسه مبنيّ على العديد من التجارب العددية. إن الإتجاه الهندسي الذي سمح إضافة إلى ذلك بإدخال وسائل من البرهان في التحليل الديوفنطسي، يمثل مرحلة حاسمة في تشكيل هذا التحليل، ويلعب هنا دور المعيق الفعلي، فهو في الواقع، يقود البرهان إلى الإخفاق بوقوفه ضمنياً في وجه صياغة أعم للبرهان نفسه، فحالة $n = 4$ لا يمكن رفدها بأي تفسير

---

(٤٥) أبو علي الحسين بن عبدالله بن سينا، **الشفاء: المنطق ـ البرهان**، تصدير ومراجعة ابراهيم مدكور، تحقيق أبو العلا عفيفي (القاهرة: الإدارة العامة للثقافة، ١٩٥٦)، ج ٥، ص ١٩٤ ـ ١٩٥.

هندسي. كان يجب إذن أن يأخذ المرء مكانه في مجال الحساب حصراً كيما يموّه صعوبات البرهان ويعمم الصياغة.

حتى وإن اقتضى الأمر انتظار فيرما (Fermat) وأيلير (Euler) كيما تتحقق هذه المهمة فالمسألة رغم كل شيء ما انفكت عن إثارة اهتمام الرياضيين العرب وهكذا فالجبريّون الحسابيّون أمثال ابن الخيّام في القرن الثاني عشر، وشارحه الشهير الذي عاش في القرن الثالث عشر كمال الدين الفارسي يذكران دون أن يبرهنا استحالة $x^4 + y^4 = z^4$

يمكننا إعطاء الكثير من الشهادات عن حضور مبرهنة فيرما في الحالات المذكورة سابقاً. سنكتفي الآن بإيراد نص أبي جعفر الذي لا مجال للشك في أهميته التاريخية.

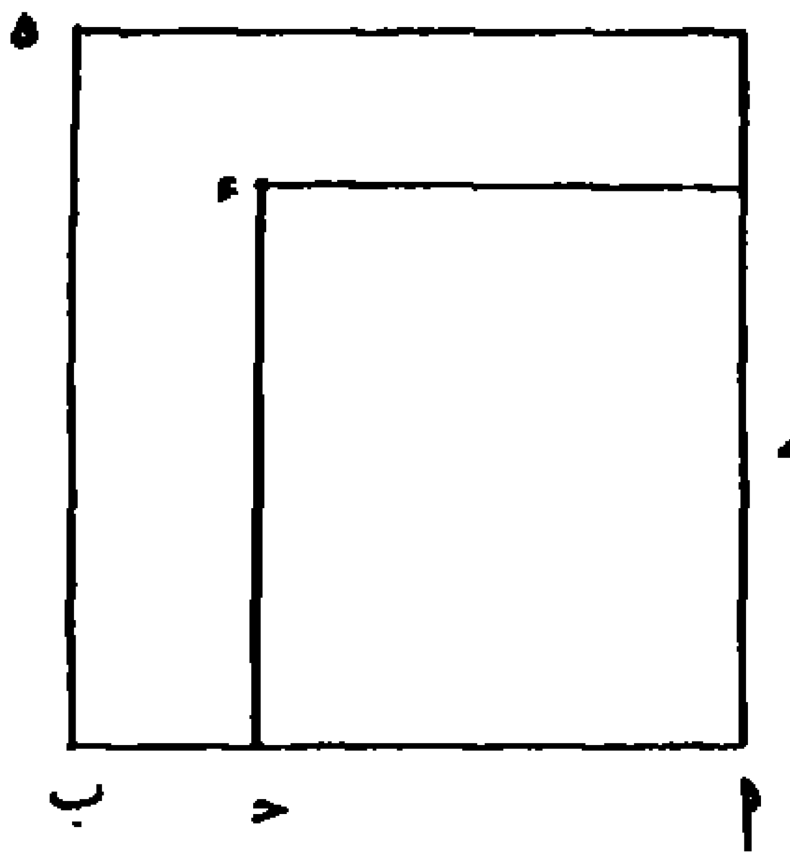
هذا هو البرهان الخطوطي عن الشيخ أبي جعفر رحمه الله:

لا يمكن أن يجتمع من عددين مكعبين عدد مكعب كما قد يمكن أن يجتمع من عددين مربعين عدد مربع ولا أن ينقسم عدد مكعب عددين مكعبين كما قد ينقسم عدد مربع إلى عددين مربعين.
ونبين ذلك هكذا:

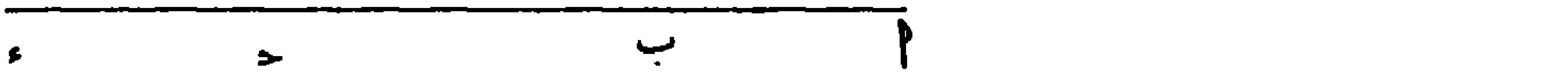
كل عددين مكعبين فإن فضل ما بينهما هو الذي يجتمع من ضرب مربع الضلع الأقل في فضل ما بين الضلعين ومن ضرب مجموع الضلعين في فضل ما بينهما ثم في الضلع الأكبر.

فنفرض أب أيّ عدد اتفق ونقسمه على ﺣ بقسمين مختلفين، ونعمل عليهما مربعي أء أه فيكون المحتمع من ضرب مجموع أﺣ أب في ﺣب - الذي هو فضل ما بين الضلعين - هو فضل ما بين مربعي أء أه الذي هو العلم. وضرب مربع أء في أﺣ هو مكعب ضلع أﺣ، وضرب مربع أه في أب هو مكعب ضلع أب.
ولكن الذي يجتمع من ضرب مربع أء في أﺣ وفي ﺣب - اللذين جميعهما قائم في السمك على نقطة ﺣ - ومن ضرب العلم أب - الذي هو قائم في السمك على ه - هو مكعب أب. ونلقي ضرب مربع أء في أﺣ - الذي هو كعب أﺣ - فيبقى ضرب مربع أء في ﺣب مع ضرب مجموع الضلعين في فضل ما بينهما ثم في أب - وهو صرب العلم في أب - فضل المكعبين. وهذا الفضل ليس بعدد مكعب لأنه غير مجتمع من ضرب عدد مربع في ضلعه.

فإذن قد تبين أنه: إذا نقص عدد مكعب من عدد[1] مكعب[2] فإن الباقي عدد غير مكعب.
وكذلك لا ينقسم عدد مكعب إلى عددين مكعبين.



ثم لنفرض عددين مكعبين مختلفين يكون ضلعاهما أب ب ح ، ونجعل أكبر الضلعين ب ح ، فيكون ضلع مجموع المكعبين أكبر من ب ح ، فنجعله ب ء . فإن كان ب ء ضلع مكعب فإنه إذا نقص من مكعبه مكعب ب ح بقي الباقي مثل مكعب أب . وقد بينا أنه إذا نُقص عدد مكعب من عدد مكعب فإن الباقي عدد غير مكعب، فإذن ب ء ليس بضلع مكعب ولا مجموع مكعبي أب ب ح بعدد مكعب، وهو المطلوب.



١ عددين ٢ مكعبين

ثانياً: ابن الهيثم ومبرهنة ويلسون[٤٦]

في عام ١٧٧٠ سجل العالم وارينغ (E. Waring) في جملتين اثنتين ولادة مبرهنة ويلسون حيث قال ما معناه «إذا كان n عدداً أولياً فإن العدد:

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots (n-2) \times (n-1) + 1}{n}$$

هو عدد صحيح، فمثلاً:

$$\frac{1 \times 2 + 1}{3} = 1 \qquad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1}{5} = 5 \quad \text{و} \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1}{7.} = 103$$

إن هذه الخاصية الأنيقة جداً للأعداد الأولية قد اكتشفها جوان ويلسون (Joannes Wilson) وهو رجل شهير جداً وعالم جبر في الرياضيات[٤٧].

(٤٦) انظر: *Archive for History of Exact Sciences*, vol.22, no.4 (1980), pp. 305-321.

(٤٧) E. Waring, *Meditationes Algebraicae* (Cantabridgiae, 1770), p.218.

النص الأصلي هو: «Sit n numerus primus, & $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots (n-2) \times (n-1) + 1}{n}$ = erit integer numerus, e.g. $\frac{1 \times 2 + 1}{3} = 1$ $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1}{5} = 5$ و $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1}{7.} = 103$

على الرغم من أن هذه المبرهنة ما انفكت تنسب لويلسون منذ ذلك الوقت، فإن وارينغ لم يذكر في أية لحظة أن ويلسون قدّم برهاناً عليها. ويجمع الكل على أنه لم يمتلك برهاناً للمبرهنة التي تحمل اسمه، وكذلك وارينغ بعد أن ذكرالمبرهنة وغيرها مما يتعلق بها، وصف براهينها بأنها صعبة(٤٨).

إن معرفة أفضل لمخطوطات ليبنز هي وحدها التي زعزعت أسبقية ويلسون والتي كان يجمع المؤرخون على التسليم بها. ففي أواخر القرن الماضي استطاع فاكا (G.Vacca) أن يجد لدى ليبنز صياغة مكافئة لهذه المبرهنة وسابقة بالتالي على صياغة ويلسون، وفي الواقع فإن نص ليبنز لا يدع مجالاً للشك(٤٩).

وهكذا يمكننا ترجمة مبرهنة ليبنز:

إذا كان p عدداً أولياً فإن: $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$

لقد توجب الإنتظار حتى العام ١٧٧١ كي يتم إثبات هذه المبرهنة على يد لاغرنج (Lagrange) وذلك بطريقتين، الأولى مباشرة والثانية تقوم على استنتاج مبرهنة ويلسون من مبرهنة فيرما (Fermat) الصغيرة. ولقد أثبت لاغرنج إضافة إلى ذلك

& c. Hanc maxime elegantem primorum numerorum proprietatem inventi vir clarissimus, rerumque mathematicorum peritissimus Joannes Wislon Armiger». =

(٤٨) «Demonstrationes vero hujusmodo propositionum eo magis difficiles erunt, quod nulla fingi potest notatio, quae primum numerum exprimit»,

انظر: المصدر نفسه.

(٤٩) «Productus continuorum usque ad numerum qui antepraecedit datum divisus pes datum relinquit 1, si datus sit primitivus Si datus sit derivativus, relinquet numerum qui cum dato habeat communem mensuram unitate majorem».

انظر: G.Vacca, «Sui Manoscritti di Leibniz,» *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche,* no.2 (1899), p.114, and D. Mahnke, «Leibniz and der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung,» *Bibliotheca Mathematica*, no.3 (1912-1913), p.42,

حيث كتب الأخير:

«Leibniz hat nun seinen induktiv gefundenen Satz noch bei der nächsten Primzahl, p = 17, nachgeprüft, sich dabei aber verrechnet. Er gibt nämlich an: 11! ≡ 16... 15! ≡ 16, 16! ≡ 1(mod17), während in Wirkilichkeit richtigen Satz abzuändern und noch den falschen Zusatz zu machen: ... relinquit {1 vel complementum ad 1}, d.h. p−1. In der Tat ist ja bei seiner Rechnung 15! ≡17 − 1. Während in Wirklichkeit 15!≡ 1 ist. So erklät sich dieser falsche Zusatz, der Vacca unverständlich war», p.42,note.

الصيغة المعاكسة لصيغة ويلسون كيما يصل أخيراً إلى المبرهنة التالية[٥٠]:

إذا كان $n > 1$ فإن الشرطين التاليين متكافئان:

(أ) n عدد أولي.

(ب) $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$

هكذا يبدو التاريخ المعروف لمبرهنة ويلسون. ولكن قبل ليبنز بكثير ثمة رياضيّ من القرن العاشر سبق أن صاغ هذه المبرهنة نفسها بتعابير تضاهي في الدقة تلك التي أوردها وارينغ (Waring). سنين أن الرياضي والفيزيائي الشهير ابن الهيثم (٩٦٥ - ١٠٤٠) قد قدم في كتيّب له - نجد صورة عنه في مكان آخر - أثناء حلّه لمسألة توافق خطيّ مبرهنة ويلسون كقضية تعبر بدقة عن «خاصية ضرورية» للأعداد الأولية أو بمعنى آخر عن «خاصية» تمتاز بها فقط هذه الأعداد.

من المفضل أن نبدأ بتتبع مراحل عرض ابن الهيثم نفسه كي نستطيع إدراك الحيّز الذي يفرده لهذه المبرهنة من بحثه الخاص والدور الذي ينيطه بها.

يطرح ابن الهيثم في هذا الكتيب مسألة حل النظام التالي:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_i} \\ x \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \qquad (1)$$

حيث p هو عدد أولي و $1 < m_i \leqq p-1$.

إذن نحن أمام حالة خاصة من المبرهنة الصينية الشهيرة[٥١]. بعد أن يؤكد بأن الموضوع يتعلق بمسألة تقبل عدداً لا نهائياً من الحلول في مجموعة الأعداد الطبيعية، يقترح ابن الهيثم طريقتين للحل، الأولى وقد أشير إليها بالطريقة «القانونية» أو

---

(٥٠) Lagrange: *Démonstration d'un théorème nouveau* (Berlin: l'Académie de Berlin, 1771), et *Oeuvres de Lagrange* (Paris: [s.pb.], 1869), vol.3 pp.425-435.

(٥١) إن هذا النص الذي ننشره هنا للمرة الأولى، نقل ولم يترجم بدقة إلى الالمانية من قبل:
Eilhard Wiedemann, *Aufsätze zur arabischen wissenschaftsgeschichte*, 2 vols., collectanea, VI/1,2 (Hildestreim: Ilms, 1970), vol.1, pp. 529-531.

يلخص وايدمان هذا النص مرة أخرى، في:
«Notiz über ein von Ibn al-Haitham gelöstes arithmetisches Problem,» vol.2, p.756.

كما لم يلاحظ هذا المؤرخ اللامع ان ابن الهيثم كان ينص ويستخدم مبرهنة ويلسون، انظر:
Daniel Shanks, *Solved and Unsolved Problem in Number Theory* (New York: Chelsea Publishing Co., 1978), pp. 204-205.

النظامية من قبل المؤلف نفسه وهي لا تعطي في الواقع سوى حل واحد، أما الثانية فتعطي الحلول كافة. إن الطريقة الأولى «القانونية» بالذات هي التي تعتمد على مبرهنة ويلسون وتكافىء صياغتها الصياغة التالية:

إذا كان p عدداً أولياً، فإن المجموع $[2.3,... (p-1)+1]$ يقبل القسمة على p، وإذا قسمنا هذا المجموع على أي من الأعداد $2.3,... (p-1)$ فالباقي دائماً هو العدد 1. من الواضح أن هذه المبرهنة تسمح بالحصول على حلٍّ لـ (1).

$$x=(p-1)!+1 \qquad (2)$$

إن القيمة السابقة لِـ x تحقق مباشرة المعادلة الأولى من النظام (1) وانطلاقاً من المبرهنة فإنها تحقق المعادلة الثانية من (1). يقدم ابن الهيثم بعد ذلك طريقته الثانية القادرة على إعطاء الحلول كافة وهي تعتمد صراحة على أفكار ثلاث، إثنتان منها تعتبران مقدمات تقنية، وسنعرضها كما وردت في «الكتيّب».

(أ) إذا كان m المضاعف المشترك الأصغر للأعداد m_i فإن $(p, m)=1$.

(ب) إذا كان x_0 حلاً للمعادلة الأولى من النظام (1) فإن الحل العام لهذه المعادلة يكون على الشكل: $x=x_0+\lambda m$ حيث λ هو عدد طبيعي إختياري.

(ج) إذا كان r بحيث إن: $m\equiv r(\mathrm{mod}\, p)$ $\qquad (0<r<p)$

فإن: $(r,p)=1$

لنكتب الآن النظام (1) على الشكل التالي:

$$\begin{cases} x\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, m) \\ x\equiv 0\,(mod\, p), \end{cases} \qquad (3)$$

ولنبحث عن عدد s بحيث إن:

$$\begin{cases} s-1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, r), \\ s\quad\ \ \equiv 0\,(\mathrm{mod}\, p). \end{cases} \qquad (4)$$

لنفرض $s=p+kp$. إن العدد $(p+kp)$ يحقق المعادلة الثانية من (4) مهما كان k. لنفتش إذن عن أصغر قيمة لِـ k بحيث إن $(p+kp)$ يحقق المعادلة الأولى من النظام. ونجد بالضرورة في هذه الحالة أن:

$$(p-1)+kp\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, r) \qquad (5)$$

إن طريقة عرض ابن الهيثم كما تبدو في «الكتيّب» هي استقرائية تماماً، فهو يضيف إلى $(p - 1)$ العدد الضروري من p حتى تتحقق المعادلة (5). إن قراءة دقيقة تبين أن ابن الهيثم لم تفته ملاحظة أن هذه الطريقة ليست ممكنة إلاّ إذا كان $(p,r) = 1$. ما هو المغزى الذي يمكننا أن نستشفه من هذا الشرط؟ يمكننا الإعتقاد هنا بأن ابن الهيثم كان على معرفة بصورة أو بأخرى بمبرهنة بيزوت (Bezout). بما أن $(p,r) = 1$ ، يوجد إذن ثمة عددان طبيعيان k و h بحيث إن:

$$(k+1)p-hr=1 \qquad (6)$$

ليكن K_0 وh_0 أصغر عددين طبيعيين يحققان (6). نحصل أخيراً على:

$$s=p+k_0 p$$

أو:

$$s=1+h_0 r$$

لذا:

$$h_0=\frac{s-1}{r}$$

لنفرض إذن أن لدينا العدد: $\frac{m(s-1)}{r}+1$ وأنه يحقق المعادلة الأولى من (3).

يكتب هذا العدد على الشكل: $m h_0+1$ حيث $m=pq+r$ لذا فإن:

$$mh_0 + 1 = h_0pq + h_0r + 1 = (h_0q + 1 + k_0)\, p$$

يحقق المعادلة الثانية من (٣)، وأصغر حل لمسألتنا يكون إذن:

$$x=m\frac{(s-1)}{r}+1=m h_0+1$$

ويُكتب الحل العام:

$$x=\frac{m}{r}[(s-1)+n r p]+1=\frac{m}{r}[(p-1)+(k_0+n r)p]+1$$

أو:

$$x=m(h_0+n p)+1$$

إذن:

$$x\equiv(m h_0+1)(\mathrm{mod}\, p)$$

إذا ما وضعنا $k=k_0+nr$ في الحل العام كما يفعل ابن الهيثم، فإن هذا العدد يقابل الحل العام للمعادلة (6) الذي يعطي أيضاً $h=k_0+np$ ، الأمر الذي يدفعنا مرة أخرى إلى التساؤل هنا عما إذا لم يكن القصد من الطريقة الإستقرائية لابن الهيثم محاولة حل مبرهنة بيزوت.

إن العرض السابق يعيدنا إلى صميم مسألة مبرهنة ويلسون. وبالفعل فمن بين الطريقتين اللتين يقترحهما ابن الهيثم لحل نظام التوافق وتحقيق الهدف من «كتيبه» تكفي الطريقة الثانية لأنها هي التي تسمح بالحصول على الحل العام للمسألة وهذا ما أدركه جميع من أتى بعده من عرب ولاتين فلم يذكروا إلاّ الطريقة الثانية كما سنرى.

فإذا ما أصرّ ابن الهيثم على تقديم الطريقة الأولى وعلى تمييزها تحت عنوان «الطريقة القانونية أو النظامية» فإنما يعود ذلك إلى أنه يقصد مبرهنة ويلسون ذاتها.

وهكذا تبدو مبرهنة ويلسون كنتيجة قائمة بذاتها، تمّ الحصول عليها بالتأكيد خلال البحث في خواص الأعداد الأولية بهدف حل «المسألة الصينية».

كما تجب الملاحظة أن التحليل السابق إضافة إلى الطريقتين المذكورتين، يدفعنا إلى الظن بأن ابن الهيثم كان بطريقة ما مطلعاً على مبرهنة بيزوت (Bezout)، فإذا كان الأمر كذلك، فإن ابن الهيثم كان قادراً على إثبات مبرهنة ويلسون. ولكن إن لم توجد في تلك الحقبة النصوص التي تعرض مبرهنة بيزوت بحد ذاتها إلاّ من خلال السطور فقط، فإن كل استنتاج بهذا الخصوص يبقى محض تخمين. ومع ذلك فهناك مجموعتان من الحجج تدفعنا للتقصي عن هذا الموضوع.

ففي المرتبة الأولى، بيّن العديد من الإكتشافات الحديثة في تاريخ رياضيات تلك الحقبة أنه غالباً ما يكون خطيراً قبولنا كحقيقة تاريخية ما سبّبه جهلنا الحالي العائد إلى ضياعٍ مؤقت أو دائم للنصوص. صحيح أن معرفتنا لأعمال تلك الحقبة في نظرية الأعداد تبقى مجتزأة، لا سيما وأن الكثير منها ضائع حتى الآن بما فيه أعمال ابن الهيثم نفسه ونقص النصوص هذا يدفع المؤرخ للسعي وراء الفرضيات.

إلاّ أن تفحص المستوى الذي وصلت إليه نظرية الأعداد في تلك الحقبة، مضافاً إليها مسعى ابن الهيثم الذي يضع نفسه في شروط مبرهنة بيزوت، يجعلان مسألة جهل رياضيّي القرن العاشر لهذه المبرهنة أمراً مشكوكاً به، يضاف إلى ذلك أن هذه المبرهنة لم تكن معروفة من قبل الرياضيين الهنود[٥٢] فحسب، بل لقد ظهرت في

---

(٥٢) H.T. Colebroke, *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhâscara* (London: [n.pb.], 1816).

انظر الصفحتين XVII وXVIII من المقدمة والفصل الثاني عشر من الحساب لـ: Bhāscara بخاصة ص ١١٥ - ١١٦ حيث يحل المعادلة: $100x + 90 = 63y$.

انظر أيضاً الفصل الأول من الجبر لـ: Brahmegupta.

حالات خاصة في نص يعتمد مباشرة على الرياضيات العربية(٥٣).

ومن ناحية أخرى، فإن الطريقة التي اتبعها ابن الهيثم لعرض مبرهنة ويلسون تؤكد لنا بدورها الافتراض الذي بدأنا به، فكل قارىء مطّلع على كتابات ابن الهيثم في الرياضيات والبصريات لا يمكنه أن يتجاهل سعيه الحثيث وراء البراهين. وإكثاره من التعليقات الإضافية الموجهة لقارئه، الأمر الذي يجعل عرضه موسّعاً جداً في بعض الأحيان دون أن يؤثر ذلك سلباً في وضوحه. ولكنه في «كتيبه» الذي حلّلناه هنا وخاصة في معرض حديثه عن مبرهنة ويلسون يفاجئنا على غير عادته بعرض موجز وقصير على الرغم من تأكيده على أنه يقوم بصياغة خاصيّة أساسية للأعداد الأولية (وفي الواقع نحن أمام أول اختبار يسمح بتحديد الأعداد الأولية).

ربما استطعنا أن نستنتج أن مبرهنة ويلسون لم تظهر للمرة الأولى في هذا «الكتيب» لابن الهيثم، ولكنها تذكر فيه كقضية مألوفة لدى القارىء. كما كان من الممكن أن نجد إيضاحات عن الطريقة التي يتبعها في إثبات هذه المبرهنة في كتاباته الأخرى حول نظرية الأعداد، وندرك بالتالي مدى ما كان يعرفه عن مبرهنة بيزوت (Bezout). ولكن كما ذكرنا آنفاً، لم يعثر على هذه الكتابات حتى الآن.

ويتحدّد سؤالنا بالشكل التالي: كيف استطاع ابن الهيثم إثبات مبرهنة ويلسون؟ إنطلاقاً من الفرضية المعقولة التي تدّعي بأنه كان على علم بمبرهنة بيزوت، يمكننا إعادة بناء ما قام به.

لنفرض: $E=\{1,2,\dots,p-1\}$

ولنبيّن أنه إذا كان $a\in E$ فإنه يوجد ثمة عنصر وحيد $b\in E$ بحيث إن:

$$ab\equiv 1\pmod p$$

وبما أن $(a,p)=1$ فإنه يوجد على الأقل ثنائية من الأعداد الصحيحة (x,y)

بحيث إن: $ax-py\equiv 1\pmod p$

لذا فإن:

$$ax\equiv 1\pmod p$$

---

(٥٣) «Die Algebras des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum,» in: M.Curtze, *Urkunden Zur Geschichte der Mathematik in Mittelalter und der Renaissance* (Leipzig: [n.pb.], 1902).

ليكن b باقي قسمة x على p، نعرف أن b هو وحيد، وأن $b\in E$ ويحقق (7).
غير أن a و b يمكن أن يتساويا، وفي هذه الحالة يكون لدينا:

$$a\in E \quad \text{و} \quad a^2\equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow \begin{cases} a\in E \\ a\equiv 1 \pmod p \\ \qquad\qquad \text{أو} \\ a\equiv -1 \pmod p \end{cases}$$

إذن $a=1$ أو $a=p-1$.

وهكذا، لكلّ $a\in E$ بحيث $a\neq 1$ و $a\neq p-1$ يوجد $b\in E$ و $b\neq a$ بحيث يكون لدينا (7). لذا فإن: $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$

يبدو أن هذا الطريق قد اتبعه ابن الهيثم في البرهان. ثمة بالطبع إثبات آخر أعطاه كارميشيل (Carmichael)[54] باستخدام المضلعات المرسومة ضمن الدائرة وهو لا يتطلب معرفة أي شيء كان مجهولاً من قبل ابن الهيثم وأكثر من ذلك فهو لا يحتوي إلّا على طرق كان يستخدمها عادة ابن الهيثم في كتابات أخرى. ولكن يبقى أننا لو قارنا أفكار كل من الطريقتين في حل مسألة التوافقات الخطيّة لكان البرهان السابق أكثر معقولية.

لنتساءل عما دفع بابن الهيثم لطرح هذه المسألة التي أدى حلها إلى تطبيق مبرهنة ويلسون. كي نوضح المضمون الذي يطرح فيه ابن الهيثم مسألته علينا العودة قليلاً إلى كتابات بعض من أتى بعده من الرياضيين. لنأخذ مثلاً مقالة في الجبر من القرن الثالث عشر لم تنشر من قبل[55] مخصصة للتعليم كما تشير الدلائل، ويغلب عليها طابع التجميع المنمّق أكثر من طابع البحث. نجد في هذه المقالة مسألة ابن الهيثم في فصل

(٥٤) Robert Daniel Carmichael, *Théorie des nombres*, Traduction A. Sallin (Paris: [s.pb.], 1929), pp.44-45.

(٥٥) عبدالعزيز بن عبدالجبار، «نور الدلالة في علم الجبر والمقابلة،» مخطوطات: «جامعة طهران رقم (٤٤٠٩)، الملف (٦٤)». «يتحدث المؤلف عن «أستاذ أستاذه شرف الدين الطوسي» الذي عاش حتى بداية القرن الثالث عشر. ويمكننا أن نفترض أن هذا المؤلف قد عاش هو نفسه في النصف الأول من القرن الثالث عشر. إن هذه المخطوطة للحساب الجبري وهي تلخص كتاب: السموأل بن يحيى بن عباس المغربي، **الباهر في الجبر**، تحقيق وتحليل صلاح أحمد ورشدي راشد، سلسلة الكتب العلمية، ١٠ (دمشق: جامعة دمشق، ١٩٧٣). فهي بالتالي تدرس العمليات الحسابية البسيطة على كثيرات الحدود وضمن هذا الإطار بالذات يقوم المؤلف بإعطاء مفكوك ثنائية الحد وجدول الأمثال كما وردت لدى الكرجي ونقلت من قبل السموأل في: **الباهر في الجبر**.

خصص أساساً للتحليل الديوفنطسي، فبعد أن يبدأ المؤلف بعرض بعض أسس نظرية ثلاثيات فيثاغورس ينتقل إلى دراسة بعض المسائل الديوفنطسية من الدرجة الثانية[٥٦].

---

(٥٦) ابتداء من الفصل التاسع يدرس المؤلف المسائل الديوفنطسية فيبدأ بدراسة ثلاثيات فيثاغورس ليتابع بعد ذلك دراسة العديد من المسائل الديوفنطسية الأخرى ويذكر في الموضع ذاته مسألة ابن الهيثم. لنذكر إذاً بعض الأمثلة عن المسائل المطروحة حتى نستطيع إعادة بناء الإطار العام المحيط بالموضوع.

لتكن (x, y, z) ثلاثية فيثاغورية. يعطي المؤلف القضايا والمتطابقات التالية:

$$z^2 \pm 2xy = \alpha^2,$$
$$2(z-x)(z-y) = [z-(x+y)]^2,$$
$$2xy + (x+y+z)^2 = 2(x+y+z)(x+y)$$

ثم يحل مسألة المتوافقة: $\begin{cases} x^2 + a = y_1^2 \\ x^2 - a = y_2^2 \end{cases}$

ويعالج بعد ذلك بعض المسائل المأخوذة من سابقيه من العرب أو عن ترجمة «المسائل العددية» لديوفنطس (Arithmétiques de Diophante) مثل:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x+b=y_1^2 \\ y+c=y_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=a \\ \frac{1}{2}xy=a, \end{cases}$$

ثم يدرس بعد ذلك مسألة كتابة عدد صحيح كمجموع لمربعي عددين والتي طرحت في III-19 من كتاب ديوفنطي وبعد في كتب عدد من الرياضيين العرب ـ كالخازن ـ الذين عملوا في التحليل الديوفنطي على الأعداد الطبيعية.

فيذكر فيما يلي: ليكن $a^2+b^2 = N$ إذاً يمكن كتابة N بواسطة عدد لا نهائي من الطرق كمجموع لمربعيّ عددين ولإثبات هذه القضية يذكر الخازن المتطابقتين التاليتين:

$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) = (x_1 y_2 \pm y_1 x_2)^2 + (x_1 x_2 \mp y_1 y_2)^2,$$
$$(u^2+v^2)^2 = (u^2-v^2)^2 + 4u^2 v^2$$

ليكن الآن: $A = (a^2+b^2)(u^2+v^2)^2$

عندها يمكننا كتابة A على الشكل التالي: $A = (a^2+b^2)[(u^2-v^2)^2 + 4u^2 v^2]$

وباستخدام المساواة الأولى:

$$a^2+b^2 = \left[\frac{2uva + b(u^2-v^2)}{u^2+v^2}\right]^2 + \left[\frac{a(u^2-v^2) - 2uvb}{u^2+v^2}\right]^2$$

من الواضح أنه إذا كانت a, b, u, v أعداداً صحيحة بحيث يكون $(u, v) = 1$ وبحيث يقسم (u^2+v^2) كلا من العددين a وb فإن الأعداد التي وجدناها تكون هي أيضاً صحيحة.

ويعالج بالإضافة إلى ذلك العديد من المسائل الديوفنطسية. مثل: $\begin{cases} ax^2 + x = y_1^2 \\ bx^2 - x = y_2^2 \end{cases}$

ولكي يقوم أخيراً بحل مسألة ابن الهيثم ويكتب قائلاً: «نريد أن نجد عدداً إذا قسمناه على اثنين أو ثلاثة أو أربعة أو خمسة أو ستة بقي واحد وإذا قسمناه على سبعة لم يبقَ شيء».

ثم يقدم حله كما يلي:

نبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للأعداد التي يجب أن نقسم عليها فنجده 60، نضيف إليه الواحد الذي يفرضه السائل كباق فنحصل على 61 فإذا قسمنا هذا العدد على 7 يكون الباقي 5، فإذا طرحنا 5 من 7 نجد 2، نفتش بواسطة الإستقراء عن عدد إذا ضربناه بـ 60 وقسمنا الحاصل على 7 يكون الباقي 2. نجد أن العدد هو 4. نضرب 4 بـ 60 فنحصل على 240، الذي إذا قسمناه على 7 نحصل على الباقي 2 الذي سبق أن ذكرناه. نضيف 240 إلى 61، فنجد 301 وهو العدد المطلوب. ويمكن لهذه المسألة أن تتضمن حالات مستحيلة(٥٧).

هذا الملخص المكتوب من قبل رياضي من القرن الثالث عشر هو أضعف بكثير من نص ابن الهيثم سواء أكان مأخوذاً مباشرة عن نص ابن الهيثم أم عن طريق آخر، فإن ما يهمنا هنا هو أن الطريقة المتعلقة بمبرهنة ويلسون قد اختفت لمصلحة الطريقة الثانية(٥٨) التي بقيت وحدها والتي يمكننا إعادة صياغتها:

---

(٥٧) المصدر نفسه، ص ٥٩ ـ ٦٠.

(٥٨) إن مسألة ابن الهيثم حول التوافق الخطي (Congruence linéaire) وحلها ظهر من بين العديد من النصوص العربية التي استعارها (Fibonacci) كما أن مواجهة بسيطة بين نص (Fibonacci) المذكور أدناه ونص ابن الهيثم تبيّن بوضوح أن الأول هو ملخص الثاني. كما أن المقارنة مع شرح ابن الهيثم تبين أن هذا الملخص أقل دقة بكثير وأنه غير خال من التشويش. وتماماً كما في نص الرياضي من القرن الثالث عشر ابن عبدالجبار، فإن الطريقة المتعلقة بمبرهنة ويلسون قد اختفت. حتى أننا لنتساءل فيما إذا لم يكن ملخص (Fibonacci) مأخوذاً عن نص منقول عن «كتيب» ابن الهيثم. إليكم ما يكتبه (Fibonacci):

«Est numerus qui, cum diuiditur per 2, uel per 3, uel per 4, aut per 5, seu per 6, semper superat ex eo 1 indiuisibile; per 7 uero integraliter diuiditur. Queritur, qui sit numrus ille: quia preponitur, quod semper superat 1, cum diuiditur per 2, uel per 3, uel per 4, uel per 5, uel per 6; ergo extracto ipso 1 de numero, diuidetur residuum per unumquemque suprascriptorum integraliter: quare reperias numerum, in quo reperiantur $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$; eritque numerus ille 60; quem diuide per 7, superant 4, qui uellent esse 6. Ideo quia totus numerus per 7 diuiditur; ergo numerus, qui fuerit unum minus eo, cum per 7 diuidatur, 6 inde superare necesse est, hoe est 1, minus septenario numero: quare duplicetur 60, uel triplicetur, uel multiplicetur per = alium quemlibet numerum, donec multiplicatio ascendat in talem numerum, qui

نعيد كتابة النظام (1) على الشكل التالي:

$$(m=60,\ p=7,\ a=1,\ b=0)\quad \begin{cases}(1) & x\equiv a(\text{mod}\, m),\\ (2) & x\equiv b(\text{mod p})\end{cases}$$

يكون لدينا $x'=a+m$ حلاً للمعادلة (1). ليكن z باقي x' قياس p أي:

$$x'=a+m\equiv z(\text{mod}\, p)\quad ،\quad (z=5)$$

وليكن y بحيث إن: $y+z\equiv b(\text{mod}\, p)$ ، $(y=2)$

لنفترض أننا وجدنا t بحيث يكون: $mt\equiv y(\text{mod}\, p)$

ولنفرض: $x=x'+mt$

إذن: $x\equiv x'(\text{mod}\, m)=(a+m)(\text{mod}\, m)\equiv a(\text{mod}\, m)$

$$x=x'+mt\equiv x'+y(\text{mod}\, p)\equiv(z+y)(\text{mod}\, p)\equiv b(\text{mod}\, p)$$

يبقى أن نجد حل التوافق: $mt\equiv y(\text{mod}\, p)$

أي بمعنى آخر، أن نجد حل المعادلة: $mt-pk=y$

أي: $60t-7k=2$

ونجد بواسطة الكسور المستمرة أن: $t=4$ و $k=34$.

تماماً كما في صياغة ابن الهيثم. إن إعادة الصياغة هذه، تتطلب لكي تكون مفهومة من الناحية الرياضية معرفة بمبرهنة بيزوت ولكنها تتميز عن صياغته بعرض المضمون حيث يتحدد تموضع المسألة. فكما فهمها من أتى بعد ابن الهيثم، وبشكل خاص هذا الرياضي من القرن الثالث عشر، فإن هذه الدراسة تعتبر من ضمن التحليل الديوفنطي الجديد، وهو التقليد الذي نشأ في القرن العاشر نتيجة اللقاء بين

= cum dividatur per 7, remaneant inde 6; eritque numerus ille 5, in quo 60 multiplicanda sunt; ex qua multiplicatione ueniunt 300: quibus superaddatur 1, erunt 301; et talis est numerus ille. Similiter si 420, que integraliter diuiduntur per omnes predictos numeros, addideris cum 301 semel, uel quotiens uolueris, procreabitur numerus quesitus semper, uidelicet qui diuidetur integraliter per 7, et per omnes reliquos, cum diuisus fuerit, remanebit 1».

انظر: Leonardo Fibonacci, *Liber Abaci* (Rome: Boncompagni, 1857-1862), pp. 281-289.

تقليدين: **الأول** هو نظرية الأعداد كما وردت في كتب إقليدس **والثاني** ذلك الذي وصل إلى مداه بعد ترجمة **المسائل العددية** لديوفنطس.

نعرف انطلاقاً من التقليد الأول مختلف شروحات إقليدس ومن بينها شروحات ابن الهيثم نفسه. ولنذكر أيضاً النتائج الجديدة التي حصل عليها ثابت بن قرّة حول الأعداد الكاملة والأعداد المتحابّة. ولكن مهما تكن هذه النتائج فإنها تؤول إلى مفهوم واحد للحساب:

حساب الأعداد الصحيحة التي يمكن تمثيلها بقطع مستقيمة، الأمر الذي لا يسمح بتقديم براهين إلاّ على طريقة إقليدس في كتاب **الأصول**. وكما يرى ابن الهيثم فإن هذا المعيار في البرهان لا يشكل قيداً على طريقة العمل فحسب بل يظهر الفرق بين نوعين من الحساب، الأول وهو ما نجده في كتاب نيقوماخوس الجرشي (Nicomaque de Gérase) الذي لا يعتمد سوى على الإستقراء والثاني يرتكز على البراهين كما في كتاب **الأصول** لإقليدس. وللدلالة على النوع الأول أطلق عليه الرياضيون العرب الإسم الإغريقي نفسه: الارثماطيقي (ἡ ἀριθμητική) بينما كرّسوا للنوع الثاني اسم «علم العدد».

وهاكم كيف يفرّق ابن الهيثم بنفسه بين هذين النوعين: «وخواص العدد تتبين على وجهين: أحد الوجهين هو الاستقراء. فإنه إذا أستقريت الأعداد وميِّزت، وحد بالتمييز والإعتبار جميع الخواص التي لها. ووجود خواص العدد بهذا الوجه يسمى الارثماطيقي. ويتبيّن ذلك في كتاب الارثماطيقي. والوجه الآخر الذي يتبين خواص العدد هو البراهين، والمقاييس. وجمع خواص العدد المدركة بالبراهين هو الذي تتضمنه هذه المقالات الثلاث [لإقليدس] أو ما يرجع إليها»(٥٩).

فيما يتعلق بالتقليد الثاني فقد بيّنا في مكان آخر(٦٠) أن إدخال **المسائل العددية** لديوفنطس في القرن العاشر كان بداية التحليل الديوفنطي الجديد، والمقصود به ذاك المتعلق بالأعداد الصحيحة والنابع من قراءة على الطريقة الإقليدية وليس الجبرية لديوفنطس، صحيح أن مؤلفي هذا التحليل الديوفنطي الجديد، كالخجندي والخازن مثلاً، قد استعاروا من الجبر بعض طرق البرهان إلاّ أنهم لم يكونوا يفرقون أعمالهم عن أعمال الجبريين، فعالجوا بهذه الطريقة العديد من المسائل التي كان من أهمها نظرية

---

(٥٩) انظر: أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، «شرح مصادرات إقليدس،» مخطوطة: «فايز الله (Feyzullah)، استانبول، (١٣٥٩)، الملف (٢١٣)».

(٦٠) Rushdi Rashed, «L'Analyse diophantienne au Xème siècle: L'exemple d'Al-Khâzin,» *Revue d'histoire des sciences*, vol. 32, no.3 (1979), pp. 193-222.

ثلاثيات فيثاغورس ومسألة الأعداد المتوافقة وتمثيل الأعداد الصحيحة كمجموع لمربعي عددين واستحالة المعادلة $x^3+y^3=z^3$ في مجموعة الأعداد الطبيعية... إلخ. إن أبحاثاً كهذه هي التي دفعت الرياضيين فيما بعد إلى الاهتمام بمسائل تتعلق بنظرية التوافقات.

لنترك هذه النظرة الإجمالية عن مسألة التحليل الديوفنطي في القرن العاشر ولنعد إلى ابن الهيثم. نذكر أولاً أنه على الرغم من أنه كان من أتباع التقليد الإقليدسي في نظرية الأعداد فقد شرح كتب الحساب الخمسة لديوفنطس[61] ونعلم أيضاً أنه ألّف كتباً في نظرية الأعداد وفي الحساب[62] ولكن لسوء الحظ لم يبق منها سوى العناوين، لكننا نعلم على الأقل أنه عالج فيها التحليل الديوفنطي. إن نصّاً ذكره جبري القرن الثاني عشر السموأل[63]، يوضح لنا أن ابن الهيثم كان يهتم بمسألة متميّزة في التحليل الديوفنطي الجديد ألا وهي مسألة المثلثات العددية قائمة الزاوية.

---

(٦١) لقد ذكر ابن أبي أصيبعة مؤرخ الكتب في القرن الثالث عشر أن ابن الهيثم قد أملى على اسحاق بن يونس (طبيب مصري) خمسة كتب يعلق فيها على كتاب ديوفنطس حول مسائل الجبر. انظر: أبو العباس أحمد بن القاسم بن أبي اصيبعة، **عيون الأنباء في طبقات الأطباء**، شرح وتحقيق نزار رضا (بيروت: دار مكتبة الحياة، ١٩٦٥).

(٦٢) من بين الكتب التي ذكرها المؤرخ السابق حول نظرية الأعداد وانطلاقاً من قائمة كتبت بيد ابن الهيثم نفسه، نجد الجمع في مبادىء الحساب حيث يحدد فيه مبادىء كل أنواع الحساب ابتداء بما وضعه إقليدس في: «مبادىء الهندسة والحساب» ثم يقدم حلول مسائل الحساب اعتماداً على التحليل الهندسي والتعين العددي متجنباً بذلك تعابير الجبريين وطروحاتهم. «كتاب في تحليل المسائل العددية بجهة الجبر والمقابلة مبرهناً». انظر: ابن أبي اصيبعة، المصدر نفسه، ص ٥٥٤.

(٦٣) لتكن المسألة التالية: بيّن كيف يمكن إنشاء مثلث قائم بحيث يساوي أحد أضلاعه عدداً معطى سلفاً. علينا أن نحل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة $a^2+y^2=z^2$ (a معطى)، يفرض ابن الهيثم: $y=\frac{a^2-1}{2}$

لذا فإن: $z=\frac{a^2+1}{2}$ هذه الطريقة تكافىء تلك التي نقلها:

Proclus, *Commentaire du premier livre des éléments d'Euclide,*

وهي لا تعطي في الواقع إلّا حلاً واحداً للمسألة.

لهذا السبب ينتقد السموأل هذه الطريقة ويذكر طريقة أخرى تعطي عدداً لا نهائياً من الحلول وذلك بفرضه $y=\frac{a^2-b^2}{2b}$ $(b<a)$ ولكن من الواضح أن هذا التعميم الذي طرحه السموأل مستقى من الحل الأول.

انظر النص العربي، في: Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al,* p.148,

والنص الفرنسي، ص ٦٥.

وهكذا فقد طرحت مسألة التوافق الخطي (Congruence linéaire) بشكل طبيعي ضمن هذا الإطار من التحليل الديوفنطي الجديد كما طرحت المبرهنة التي تحمل خطأ اسم ويلسون ضمن هذا الإطار نفسه.

بسم الله الرحمن الرحيم

العزة لله(*)

قول للحسن بن الحسن بن الهيثم في استخراج مسألة(١) عددية:

المسألة: نريد أن نجد عدداً إذا قسم على اثنين بقي منه واحد وإن قسم على ثلاثة بقي منه واحد وإن قسم على أربعة بقي منه واحد وإن قسم على خمسة بقي منه واحد وإن قسم على ستة بقي منه واحد وإن قسم على سبعة لم يبق منه شيء. الجواب: هذه المسألة سيالة، أعني لها أجوبة كثيرة، ولوجودها طريقان. أحد الطريقين وهو القانون أن نضرب الأعداد المذكورة التي يقسم عليها العدد بعضها في بعض فما اجتمع منها يزاد عليه واحد، وهو العدد المطلوب. أعني أن نضرب اثنين في ثلاثة ثم ما اجتمع منه في أربعة ثم ما اجتمع منه في خمسة ثم ما اجتمع منه في ستة ثم يزاد على ما اجتمع من ذلك واحد، وهو العدد المطلوب. والذي يجتمع من ضرب هذه الأعداد بعضها في بعض على الترتيب الذي ذكرناه هو ٧٢٠، فيزاد على ٧٢٠ واحد فيكون ٧٢١ فهو العدد. وذلك أن ٧٢٠ تنقسم(٢) على اثنين لأن لها نصف وتنقسم(٢) على ثلاثة لأن لها ثلث وتنقسم(٢) على أربعة لأن لها ربع وتنقسم(٢) على خمسة لأن لها خمس وتنقسم(٢) على ستة لأن لها سدس. وإذا كانت ٧٢٠ تنقسم(٢) على كل واحد من هذه الأعداد، فإن ٧٢١ (٣) إذا قسمت على كل واحد من هذه الأعداد بقي منها أبداً واحد، و٧٢١ تنقسم(٢) على ٧ لأن لها سبع. فالعدد المطلوب الذي على الصفة المتقدم ذكرها هو ٧٢١. وقد يوجد العدد المطلوب بطريق آخر وهو الطريق الذي به نبين(٤) أن هذه المسألة عدّة أجوبة، بل أجوبة بلا نهاية. وهو أن يوجد أقل عدد له نصف وثلث وربع وخمس وسدس، أعني أقل عدد يعدّه الأعداد التي قبل السبعة، وهو ستون. ونقسم(٥) الستين على سبعة فيبقى أربعة، فنطلب(٦) عدداً له سبع وإذا نقص منه واحد كان للباقي(٧) ربع. وقد يوجد أعداد كثيرة على هذه الصفة، وطريق وجود هذه الأعداد هو أن يؤخذ السبعة فينقص منها واحد فيبقى ستة فيضاف إلى ستة سبعة سبعة إلى أن ينتهي إلى عدد له ربع. فإذا انتهى التزيّد إلى عدد له ربع أضيف إلى ذلك العدد واحد فيكون للجميع سبع.

(*) قمنا بتقيط النص في كثير من المواضع وأضفنا الهمزات وأثبتنا الأصل إذا اشتبه الأمر فقط، واستعملنا الرموز التالية في التحقيق. < . . . . > نقترح إضافة ما بينهما حتى يستقيم المعنى، [. . .] نقترح حذف ما بينهما.

والنص هو مخطوطة «India office Library 8oth-734,» (ff 121)

(١) مسئلة: وردت هكذا في النص ولم نشر إليها مرة أخرى

(٢) ينقسم: وهي جائزة على اعتبار العدد ولكننا آثرنا التصحيح

(٣) أعاد الناسخ ٧٢ تحت ٧٢ من ٧٢١.

(٤) تبين (٥) ويقسم (٦) فيطلب (٧) الباقي.

ومثال ذلك: يضاف إلى الستة سبعة فيكون ١٣ وليس لها ربع، فيضاف إلى ١٣ سبعة فيكون ٢٠ ولها ربع، فيضاف إلى ٢٠ واحد فيكون ٢١ ولها سبع، فيؤخذ ربع ٢٠ وهو ٥ فيضرب في ٦٠ فيكون ثلاثمائة فيضاف إليها واحد فيكون ٣٠١ وهو العدد المطلوب. وذلك أن ٣٠٠ لها نصف وثلث وربع وخمس وسدس، فالثلاثمائة تنقسم(٧) على ٢ وعلى ٣ وعلى ٤ < وعلى ٥ > وعلى ٦ ، وإذا كانت ٣٠٠ تنقسم(٧) على هذه الأعداد ولا يبقى منها شيء فالثلاثمائة(٨) وواحد إذا قسمت على كل واحد من هذه الأعداد بقي منها واحد، و٣٠١ لها سبع فهي تنقسم(٧) على ٧ ولا يبقى منها شيء، فالثلاثمائة والواحد هو العدد المطلوب. وأيضاً فإنا إذا أخذنا الستة وأضفنا إليها سبعة سبعة حتى يصير ٢٠ ثم أضفنا إليها بعد ذلك سبعة سبعة أربع مرات كان لما يجتمع ربع وكان إذا زيد عليه واحد كان لما يجتمع سبع. وإذا أضيف إلى ٢٠ سبعة سبعة أربع مرات كان من ذلك ٤٨ ولها ربع، وإذا أضيف إلى ٤٨ واحد كان ٤٩ ولها سبع، فيؤخذ ربع ٤٨ وهو ١٢ فيضرب في ٦٠ فيكون ٧٢٠ فيضاف إليها واحد فيكون ٧٢١ وهو العدد المطلوب، وهو العدد الذي خرج بالوجه الأول. وكذلك إن أضيف إلى ٤٨ سبعة سبعة أربع مرات صارت ٧٦ ولها ربع وإذا أضيف إلى ٧٦ واحد صارت ٧٧ ولها سبع، فيؤخذ ربع ٧٦ وهو ١٩ فيضرب في ٦٠ فيكون ١١٤٠ فيضاف إليه واحد فيكون ١١٤١ وهو العدد المطلوب. وذلك <أن> ١١٤٠ لها نصف وثلث وربع(٨) وخمس/ وسدس، و١١٤١ لها سبع. وأيضاً فإنه إذا أضيف إلى ٧٦ سبعة سبعة أربع مرات كان من ذلك ١٠٤ ، فإذا أخذ ربعها وهو ٢٦ وضرب في ٦٠ وأضيف إلى ما يخرج من الضرب واحد كان ذلك هو العدد المطلوب. وكذلك دائماً كلما أضيف إلى العدد الذي ينتهي إليه سبعة سبعة أربع مرات وأخذ ربع ما اجتمع وضرب في ٦٠ وزيد عليه واحد كان منه العدد المطلوب.

فعلى هذا الوجه يمكن أن يوجد أعداد بلا نهاية كل واحد منها ينقسم على ٢ و٣ و٤ و٥ و٦ ويبقى من كل واحد منها واحد و<كل> واحد منها ينقسم على سبعة. وإذا كان ذلك فإنه بدل(٩) ما يزاد على ٢٠ سبعة سبعة أربع مرات ويؤخذ ربع ما يجتمع يزاد على ٥ التي هي ربع ٢٠ سبعة واحدة فيكون ١٢ . وكذلك ٤٨ بدل(٩) ما يزاد عليها سبعة سبعة أربع مرات ويؤخذ ربع ما يجتمع يزاد على ١٢ سبعة واحدة. وطريق وجود الأعداد المطلوبة هو أن يؤخذ ربع ٢٠ وهو ٥ ويزاد عليها سبعة سبعة أبداً بلا نهاية، ثم كل واحد من هذه الأعداد إذا ضرب في ٦٠ وزيد على ما اجتمع واحد كان كل واحد من الأعداد التي تجتمع(١٠) على هذا الترتيب هو العدد المطلوب. وهذا هو الجواب عن المسألة.

---

(٨) كتب الراء فوق السطر ثم أعاد «ربع» تحت الكلمة.

(٩) يدل (١٠) يجتمع

وإذ قد تبيّن ذلك فإنا نقول إن هـذا المعنى يلزم في كل عدد أول، أعني أن كل عـدد أول ـ وهو الذي لا يعدّه إلّا الواحد فقط ـ فإنه إذا ضربت الأعداد التي قبله بعضها في بعض عـلى الوجـه الذي قدمنا وزيد على ما يجتمع واحد كان الذي يجتمع إذا قسم على كل واحـد من الأعداد التي قبـل العدد الأول بقي منه واحد وإذا قسم على العدد الأول لم يبق منه شيء.

وعلى الوجه الآخر أيضاً: إذا وجد أقـل عدد يعـدّه الأعداد التي قبـل العدد الأول، أعني أقـل عدد له الأجزاء السميّة الأعداد التي قبل العدد الأول، ثم قسم هذا العـدد على العـدد الأول فما بقي حُفظ، ونحفظ الجزء السمّي لهذه البقية لنجعل القياس إليه. كما[11] إذا قسم عدد ٦٠ على ٧ منه ٤ والجزء[12] السمّي لها ـ الـذي هو الـربع ـ كـان القياس. والجـزء السـمّي للعدد هـو الذي يعـدّ العدد الذي هو جزء له مرات بقدر آحـاد العدد الـذي يقال لـه إنه سمّيـه. فإذا حفظ الجـزء السـمّي للبقية يؤخذ العدد الأول فينقص منه واحد كما فعل بالسبعة فما بقي يضاف إليـه العدد مـرة بعد مـرة إلى أن ينتهي إلى عدد له الجزء السـمّي للبقية، أعني الجزء الذي حفظ، ثم يؤخذ من هذا العدد الذي ينتهي إليه الجزء السمّي للبقية ويضرب في العدد الذي هو أقـل عدد لـه الأجزاء السـمّـية الأعداد التي قبـل العدد الأول، فما خرج يضاف إليه واحد، وهـو العدد المـطلوب. ثم إذا أضيف إلى العدد الـذي هو الجزء السـمّي للبقية العدد الأول مرة بعد مرة ثم ضرب[13] كل واحد من هذه الأعداد في العـدد الذي هو أقل عدد له الأجزاء[14] المذكورة واحداً[15] بعد واحد وزيد على كـل واحد [كـل واحد] منهـا واحد كان كل واحد من الأعداد التي تجتمع على هذه الصفة هـو العدد المـطلوب. كما إذا ضرب كـل واحد من ١٢ و ١٩ في ٦٠ [16] وزيـد على <كـل> واحد مما يخرج من الضرب واحـد كـان منـه العـدد المطلوب. فإن قسم <عدد من الأعداد التي تجتمع على هذه الصفة على> العدد الذي هو أقـل عدد له الأجزاء السـمّية الأعداد التي قبل العدد الأول [و] كان الذي يبقى واحـد فقط، <ثم> نقص من العدد الأول واحد وضرب الباقي <بعد أن قسم على الذي هو أقل عدد له الأجـزاء السـمّية الأعـداد التي قبل العدد الأول وأضيف إلى ما اجتمع سبعة مرة بعـد مرة كم شئـنـا> في العدد الـذي هو أقـل عدد له الأجزاء السـمّية الأعداد التي قبل العدد الأول، فما خرج يزاد عليه واحد وهو العدد المطلوب.

فإذا سلكت هذه الطريقة في كل عدد أول كان كل عدد يوجد على هذا الوجه إذا قسم على كل واحد من الأعداد التي قبل العدد الأول بقي منـه واحد وإذا قسم عـلى العدد الأول لم يبق منـه شيء. فهذا الذي ذكرناه يستوعب[17] أجوبة جميع المسائل التي من هذا الجنس وبالله التوفيق.

تم جواب المسألة العدديـة والحمد لله رب العـالمين والصلوة عـلى رسولـه محمد المصـطفى وآله أجمعين.

---

(١١) كيما

(١٢) وبالجز

(١٣) صرف

(١٤) الأحر

(١٥) واحد، وفوقها علامة قد تكون الألف الذي نسيها الناسخ ثم عاد فأضافها

(١٦) كتبها أولاً ٢٠ ثم صححها عليها ثم أعاد الستة تحتها.

(١٧) سوغب.

ثالثاً: الجبر والألسنية:

التحليل التوافيقي في العلوم العربية[64]

إذا وضعنا حساب الاحتمالات جانباً، نجد أن التحليل التوافيقي قد مورس في غالب الأحيان في حقلي الجبر والدراسات اللغوية، أكانت في مجال اللغة بشكل عام أم في مجال اللغة الفلسفية[65]، لا نجهل أنه منذ بداية القرن ومع جاك برنولي (Jacques Bernoulli) ومونمور (Montmort)[66] تحديداً، بدأ التحليل التوافيقي إنطلاقته وفقاً لحاجات العلم الجديد وضمن الحدود المتعلقة بمسائل التجزئة لمجموعة حوادث وليس بالضرورة لمجموعة أعداد. إضافة إلى ذلك فالكل يعلم أنه قبل ذلك اللقاء المؤاتي لتطوّر لم يسبق له مثيل في مجال التحليل التوافيقي، سبق للجبريين واللغويين أن انتجوا واستخدموا بعض طرائق هذا التحليل، هكذا تقريباً اكتشف الرياضيون واللغويون العرب التحليل التوافيقي.

وإذا أمعنّا النظر فسوف نلاحظ بالمقابل أن العلماء العرب ـ وهذا الأمر يسري بطريقة ما على القرن السادس عشر ان لم نقل على القرن السابع عشر أيضاً[67] ـ كانوا

---

(٦٤) R. Cohen, *Boston Studies in the Philosophy of Sciences* (Boston: Reidel Pub. Co., 1973), pp. 383-399.

(٦٥) كالابجدية الفلسفية المقترحة في «الرسالة النيروزية» لابن سينا ومحاولات ريمون لول خصوصاً في:

E.W. Platzeck, *Raimand Lull, sein Leben - seine Werke, die Grundlagen seines Denkens* (Düsseldorf, 1964), vol.1, p.298 sq.

لقد شاء البعض أن يرى في تلك التوافيق أساساً لاتجاه يمتد من لول (Lulle) إلى ليبنز (Leibniz)، وأدى إلى تأسيس حساب المنطق. غير أن الكل يعرف الآن وكما سبق أن بيّن ريس (Risse) أنه لا يوجد أي تواصل بين أسئلة وحلول لول ومدرسته، وبين الفكر الليبنزي. إن محاولة لول تشكل نقطة انطلاق لميتافيزيقيا أكثر مما تشكل نقطة انطلاق لمنطق.

(٦٦) المقصود هو القسم الثاني:

«La Doctrine des permutations et des combinaisons,» dans: Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi* (Basel: [s.pb.], 1713), pp.72-137, et «Traité des combinaisons,» dans: Montmort, *Essai d'analyse sur les jeux du hasard*, 2ème ed. (Paris, 1713), pp.1-72.

(٦٧) بالنسبة إلى تاريخ التحليل التوافيقي في النصف الأول من القرن السابع عشر، انظر:

E.Coumet, «Mersenne, Frenicle et l'élaboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du XVIIIème siècle, 2vols. (Thèse, Université de Sorbonne, Paris 1968), (dactylographiée).

على أية حال يفرّقون ما نجمعه نحن منذ وقت ليس ببعيد، تحت مفهوم التحليل التوافيقي. وفي حين أن الجبري لم يكن يرى إطلاقاً بالوسيلة التي يستخدمها عالم اللغة وسيلته الخاصة، فإن هذا الأخير كان يجهد من جهته في إبتكار ما سبق للجبري أن امتلك عناصره. فضلاً عن ذلك فإن هذا الوعي النظري المجزأ كان منفصلاً في العلوم العربية، لم تمسّه الحاجة، كما في القرن السابع عشر، للدلالة باسم خاص على التحليل التوافيقي، فبدا عالم اللغة وكأنه يكتشف طرقاً توافيقية بشكل تلقائي مهما كانت مساعيه الريادية لفهم بعض الظاهرات اللغوية قليلة. أمّا الجبري فكان يسمي بعض الطرائق التي لم تكن قد أصبحت بعد نشاطاً معيناً ومنظماً ويتطلب أن يُعزى إليه عنوان خاص به. غير أن التساؤل حول التجزئة والفصل في الوعي النظري ـ وحدة التحليل التوافيقي ـ يستوجب التمييز بين مشاريع اللغوي العلمية ومشاريع الجبري. وهكذا سنرى أنه إذا كان التحليل التوافيقي بالنسبة إلى اللغوي هو وسيلة لعقلنة ممارسة قديمة، فهو لا يشكل في نهاية الأمر بالنسبة إلى الجبري سوى وسيلة تقنية يؤسس عليها مسألة نظرية، أي تصوراً آخر للجبر أو قل مشروعاً لجبر مستقل بذاته، إنه وسيلة لدى الإثنين معاً. يبقى أن ننوه أنه يبدو دون شك مرة كوسيلة لحل مسألة تطبيقية بشكل نظري، ومرة ثانية كوسيلة منتجة أثناء حل مسألة نظرية. إن اختلاف الأهداف هو المسؤول كما نعتقد عن تجاهل كل من الجبري واللغوي أحدهما للآخر والذي حفظ وحدة التحليل التوافيقي، فما ان تم تجاوز هذا الاختلاف، حتى شرعت الأبواب على جميع التأويلات المفرطة في الممارسة التوافيقية، فتوحّد ما كان يمثل التبعثر والكثرة بالنسبة إلى العلماء.

يبدو أنه من الواجب القول أيضاً إن هذين الاتجاهين للتحليل التوافيقي مهما بديا مختلفين، فهما يشتركان على الأقل في شرط إمكانية يتلخص بشكل مبسط بتغيّر الصلات بين مفهومي العلم والفن.

إن تأسيس استقلالية الجبر يعني التصدي لتأسيسه كعلم، لكن هذا يعود إلى الإقرار بأن كل علم هو فن أيضاً، وأنه بإمكانه الظهور دون تأكيده على موضوع محدد، لأنه يطال الكثير من المواضيع ـ الحساب والهندسة ـ وباختصار إدراك أنه علم دونما حاجة لتأكيد كونه كذلك. إن عالم اللغة بفهمه للمعالجة النظرية لفن ما، كفن المعجمي مثلاً، يلغي هو أيضاً تمييزاً قديماً بين العلم والفن ضمن الحد الذي يقصد به نسبة نظام علم ما إلى معرفة مدركة في إمكاناتها على التحقق العملي وحيث يكون

هدفها خارجاً عنها. فإذا كان الفهم الأفضل لهذا التغيير يرد في جزء منه على الأقل إلى سوسيولوجيا المعرفة(٦٨)، يبقى أنه كان فهماً في إطار الحدس لا في إطار الإدراك أبداً، وكان المبرر لأحكامٍ حول الروح العملية (البراغماتية) للعلم العربي في مقابل الروح النظرية للعلم الإغريقي، تلك الأحكام التي غالباً ما تستعاد منذ رينان (Renan) وفيما بعد مع دوهايم (Duhem) وتانّري (Tannery).

بديهي أنه يستحيل على الإطلاق كتابة تاريخ مهما كان موجزاً للتحليل التوافيقي ضمن الحدود الضيقة لهذا العرض. لكن إذا ما بدا لنا أن الحديث عن هذا التاريخ ذو أهمية، فليس ذلك بسبب أهمية المسألة فقط ولكن كي نشير إلى ما يفصلنا، في هذا الحقل الخاص من العلوم العربية والذي لا نعرف عنه إلا القليل، عن تاريخٍ للعلوم لا يخفي التبحر فيه الأخذ بحكمٍ مسبق: الإستمرارية التاريخية. هذا الحكم المسبق كان حجر عثرة في أغلب الأحيان أمام كل محاولة لإعادة بناء هذا النشاط

---

(٦٨) تتقاسم ما هو أساسي في مجال سوسيولوجيا المعرفة اتجاهات ثلاثة: أولها يفسر الشكل الذي تأخذه المعرفة العلمية في صلتها ببنيتيّ وسائل وعلاقات الإنتاج، وهذه هي المقولة الماركسية. والثاني يجد هذا التفسير في البنية والتمثيلات الجماعية نفسها من ظاهرات وعناصر مكوّنة للوعي الجماعي أكانت ترنسندنتالية كما عند دوركهايم (Durkheim) أو ملازمة للكل الاجتماعي كما عند غورفيتش (Gurvitch). والثالث لا يعترف لسوسيولوجيا المعرفة ولا لأية سوسيولوجيا أخرى بأي حق بأن «تشرح» بل بأن تُأوّل المدلولات وذلك بردّها إلى جوهر الأشياء كما عند ڤيبر (Weber)، والكثيرين ممن أتوا بعده، أي بأن تعزل المعرفة عن تاريخها لتفهمها كاسقاطٍ باهتٍ لنموذجٍ مثالي.

بالنسبة إلى الإتجاه الأول، فإذا كانت الإنجازات لم تتجاوز بعد مستوى التأكيدات العامة كي تبلغ مستوى الإثباتات، مثل نشوء البرجوازية التجارية وبدايات العلم الكلاسيكي والتوسع التكنولوجي في عصر النهضة وبداية عصر الآلة، كما يؤكد البعض من غير الماركسيين الذين تأثروا بالفكر الماركسي، فإن الإتجاهين الآخرين يبدوان خطيرين، إذ إن الإتجاه الدوركهايمي يقترح كوسيلة للتحليل، مفهوماً أكثر غموضاً. يعرّفه: بالوعي الجماعي. بينما لا يرضي الاتجاه الڤيبري العالِم وكذلك الفيلسوف، فالعالم سيرفض منح هيكلية العلم لسوسيولوجيا تخلط بين مهمة العالم - أي بناء نماذج نظرية - ومهمة الفيلسوف - تأويل المدلولات - ويطالب الفيلسوف بضمانات لا الڤيبريون ولا الفينومنولوجيون (Phénoménologues) يستطيعون إعطاءه إياها. إذ كيف يمكنهم إثبات أن الصلات الجوهرية بين الأشياء بخاصة في هذا المجال ليست سوى نتائج لحوادث ممكنة ليس إلاّ؟

فإذا كان تجاوز التشويش الداخلي في سوسيولوجيا المعرفة بالذات قبل استخدامها في مجال تاريخ فلسفة العلوم أمراً ضرورياً فلا بدّ في البدء إذن من إعادة بناء تاريخ النشاط العلمي المنوي دراسته. إن تاريخاً كهذا يبدو شبه معدوم غالباً، بخاصة بالنسبة إلى العلوم العربية. فضمن هذه الحدود فقط يمكن لقول السوسيولوجي أن يكفّ عن التأرجح بين تأكيدات براغماتية لا حظّ لها في التحقق، وبين مزاعم عامة عارية عن كل قيمة توضيحية.

العقلاني الذي حدث في حقبة ما وفي مكان ما. ولأنه خارج التقليد الإغريقي، فقد شكّل التحليل التوافيقي حالة نموذجية على أكثر من صعيد للمتمسكين بالاستمرارية، فاعتبروه حالة شاذة علينا إهمالها أو قل ردها إلى فكر «تحليليّ ذرّوي (atomistique) وعرضي أو حكمي. . .» مزعوم خاص بالعلماء العرب. لكن إذا كنا نقصد أساسا بقولنا «إعادة بناء» الفهم، فعلينا أن نضاعف المراجع أي أن نعيد اعتبار هذا النشاط العقلاني انطلاقاً من مستويين من الأسئلة علمية كانت أم خارجة عن العلم التي طرحها العلماء العرب على أنفسهم، وتلك التي سيجيب عنها علم ناضج. لذا فإننا سنتتبع بالتدريج ظهور التحليل التوافيقي في الجبر وفي علم اللغة.

غالباً ما يؤرخ اللجوء الأول إلى التحليل التوافيقي في الجبر بالقرن الحادي عشر، وينسب على وجه الدقة إلى مؤلف للخيّام (١٠٤٨ ـ ١١٣١) لم يتم العثور عليه حتى الآن. تلك هي وجهة النظر التي يرجّحها مؤرخو الرياضيات. وفي الواقع فإننا نلمح ظهور اهتمام خاص بالتحليل التوافيقي المعتمد لتحسين وتوسيع الحساب الجبري واستخراج الجذور منذ النصف الأول للقرن العاشر، كما تشهد بذلك عناوين مقالات أبي الوفاء (٨٩٨ ـ ٩٤٠) وعناوين مقالات الرياضي ـ الفلكي الشهير البيروني (٩٧٣ ـ ١٠٤٨)، ومع هذا فإن هذا الواقع التاريخي لم يلق التفسير الذي يستحقه.

لماذا توسع التحليل التوافيقي في العلوم العربية في القرن الحادي عشر؟

سؤال لم يلق أية إجابة، إن بسبب عدم التفكير به أو بسبب افتراض تأثير سعيد ـ لم يثبت مطلقاً! ـ للعلوم الصينية والهندوسية أو لتأثيرات الثروة والصدفة.

ومع ذلك، إذا أمعنّا النظر، يمكن أن نرى أنه في تلك الحقبة نفسها تم إعداد فكرة استقلالية وخصوصية الجبر وهي استقلالية لا تعني فقط فصل الجبر عن الهندسة ولكن بالأخص حسبنته أيضاً[69]. وكي نلخص سريعاً هذا البرنامج نقول إنه يعني

---

(٦٩) هذا الواقع لم يحظ بالتنويه ولا بالتميُّز عن اتجاه آخر كان يتبع تحسين وتوسيع شرح الحساب بواسطة الجبر. وفي الحقيقة فإن هذين التيارين وجدا مترابطين معاً عند الرياضيين العرب إذ إن حسبنة الجبر تظهر منذ الكرجي وبعده. باعتماده على كتاب **الفخري** للكرجي يلاحظ ويبك (Woepcke): «عادة ما يلجأ المؤلف للفت الانتباه إلى الحاجة لأن يكون المرء محضراً لفهم قواعد الحساب الجبري ـ حساب المقولات ـ بواسطة قواعد «حساب المعلومات». انظر:

Franz Woepcke, *Extrait du Fakhrī: Traité d'algèbre* (Paris: [s.pb.], 1853), p. 7.

هذه الملاحظة لا تعبر إلّا بشكل سطحي عن مهمة الكرجي، إذ إن المقصود في هذا الكتاب هو =

تطبيق الحساب على الجبر بحيث يحتفظ الأخير بالنسبة إلى المتغيرات $x\in[0,\infty[$ مفروضة بالتعريف $x \in]-\infty, 0]$ و $y\in[0,\infty[$ بالتعريف $x=-y$ بجميع العمليات الأساسية في الحساب من + و − و × و ÷ . ـ يجب ألاّ يغيب عن بالنا مطلقا أن الجبر طرح بشكل رئيسي في القرن الحادي عشر كعلم للمعادلات الجبرية. إن الأمر الذي يدعو حقاً إلى الدهشة هنا، هو أن هؤلاء الجبريّين الذين سعوا أكثر من غيرهم إلى تحقيق استقلالية الجبر، هم أنفسهم أولئك الذي طوّروا الطرق التوافيقية، ويبدو هذا التطور نفسه، كأنه عودة مقصودة إلى الحساب من قبل الجبري إثر متطلبات المشروع الجديد بهدف البحث عن الوسائل الضرورية له. لتوضيح هذه التأكيدات علينا التذكير بسرعة كيف تطوّر الجبر إثر الخوارزمي في القرن التاسع تطورا ضده بالوقت نفسه[70].

إذا كنا نتردد في نسبة أبوّة الجبر إلى ديوفنطس محتفظين بها للخوارزمي، فمبرر ذلك أن الثاني بخلاف الأول كان قد نظر إلى الجبر كعلم قائم بذاته لا كوسيلة لحل مسائل في نظرية الأعداد. فأصبح الهدف الرئيسي للجبر كما سنكرر لاحقاً **هو العدد المطلق والمقادير الممسوحة من حيث هي مجهولة ومضافة إلى شيء معلوم به يمكن استخراجها**. فالهدف الرئيسي للمعرفة الجبرية إذن هو تحديد العمليات «التي بواسطتها نكون في حالة تمكننا من إجراء ذلك النوع الآنف الذكر من [استخراج المجهولات، العددية أو المساحية]. أمام تنوع الكائنات الرياضية ـ هندسية وعددية ـ فإن وحدة الموضوع الجبري تأسست فقط على عمومية العمليات الضرورية لرد مسألة معينة إلى شكل معادلة أو بالأحرى إلى أحد النماذج الستة القانونية الواردة عند الخوارزمي:

= إدخال عمليات الحساب على الجبر بطريقة منهجية ومتعمدة بحيث لا تكون العمليات ×، ÷، +، −، مقتصرة على الأعداد فقط بل تطال الحدود الجبرية أيضاً. إن تطبيق الحساب على الجبر بدا للجبريين كالكرجي مثلاً، وسيلة ضرورية لتنظيم وتوسيع البحث الجبري، فتم بالتالي اكتشاف تميّز البرهان الجبري.

وهكذا بعد أن درس قوى المجهول بدراسته في الوقت نفسه لـ:

$x, x^2, \ldots, x^3$ $1/x, 1/x^2, 1/x^3, \ldots$ إلخ،

يتابع الكرجي بعد أن يُدخل منذ البداية عمليات الحساب على العبارات الجبرية النسبية. انظر: المصدر نفسه، الفصل ٣ ـ ٨.

(٧٠) انظر: أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي، **كتاب الجبر والمقابلة**، تقديم علي مصطفى مشرفة ومحمد مرسي أحمد (القاهرة: [د. ن.]، ١٩٣٧ ـ ١٩٦٨)، ص ١٦ ـ ١٧.

(1) $ax^2 = bx$	(4) $ax^2 + bx = c$
(2) $ax^2 = c$	(5) $ax^2 + c = bx \quad a, b, c > 0$
(3) $bx = c$	(6) $bx + c = ax^2$

من جهة، ومن عمومية العمليات ـ أي «القانون»[71] ـ لاستنتاج حلول خاصة من جهة ثانية. وكما سبق وذكرنا فإنه ضمن الحدود التي ألغى فيها الخوارزمي التعارض بين العلم والفن، يمكن اعتبار هذا الموضوع أي العمليات موضوعاً لعلم ما. إن أية عملية هي موضوع معرفة نظرية دون محاولة الرجوع في كل مرة إلى نظرية في الكائن الجبري. وهذه العملية هي أيضاً موضوع لمعرفة نشاط غايته خارجة عنه، لأنه مدرك في إمكاناته أكان ذلك في ردّ مسألة ما إلى شكل معين أو في اشتقاق حلول خاصة بطريقةٍ تامة الانتظام. ويبدو أن جبرياً من القرن الثاني عشر هو السموأل قد أدرك هذه الحالة إذ بالنسبة إليه وفي مجال الجبر، خلافاً للهندسة «فإن أول الفكر آخر العمل وآخر الفكر أول العمل». لكن إذا كان هذا الالغاء للتعارض ما بين العلم والفن، جدلياً كان أم مقتصراً على كل نوع، هو في أساس علم للجبر، فإن إيجاد خصوصية هذا العلم تكمن في تحديد استقلاليته له. وفي الواقع فإن جبر الخوارزمي يصطدم أيضاً بحاجز البرهان الهندسي: فالبحث عن تحديد شروط وجود الجذور لحل معادلات من الدرجة الثانية له برهان هندسي وقواعد حله لا تعطي سوى الجذر الموجب[72].

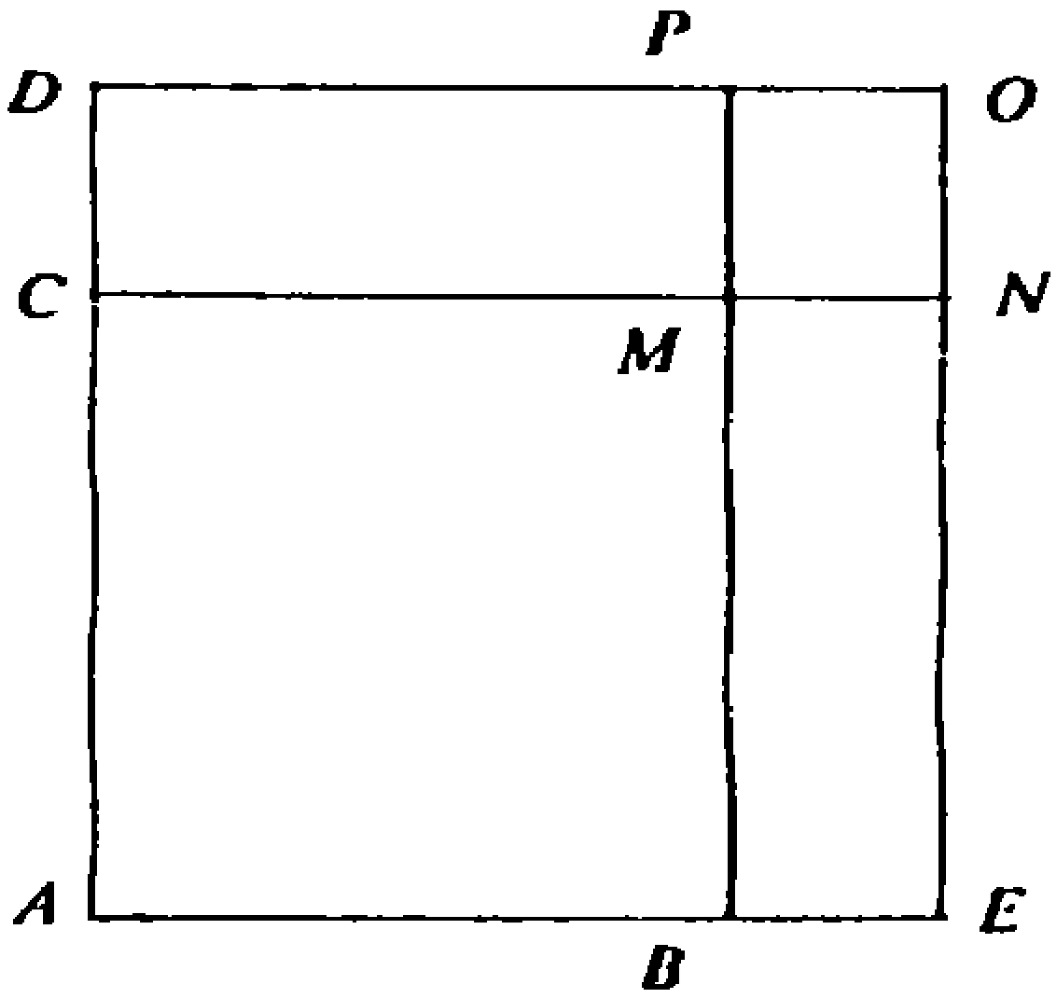
إن لاحقي الخوارزمي على الرغم من متابعتهم لأبحاثه قد انقلبوا كما ذكرنا آنفاً

---

(٧١) إن فكرة القانون هي من الأفكار المركزية في مؤلف الخوارزمي. فهي تتبع بصورة منتظمة الحل لكل ضرب من المعادلات وبالتعبير نفسه تقريباً. وتجدر الملاحظة أنه بسبب غياب الترميز فإن فكرة «قانون» يعبر عنها بترداد عبارات متشابهة تقريباً.

(٧٢) إن برهان الخوارزمي هو هندسي. بالنسبة إلى المعادلة السابقة: $x^2 + 10x = 39$ فهو يأخذ قطعتي مستقيم متعامدتين: $AB = AC = x$. ثم يأخذ: $CD = BE = 5 = (10/2)$ إن مجموع مساحات $ABMC$ و $BENM$ و $DCMP$ يساوي 39، ومساحة المربع $AEOD$ تساوي: $64 = 39 + 25$. لذا فإن $x + 5 = 8 = \sqrt{64}$

أي: $x = 3$



ضد قصور البرهان الهندسي في الجبر. ومع هذا فإن الحاجة المستشعرة لبرهان عددي لم تكن ممكنة بالذات إلاّ ضمن توسع الحساب الجبري ومجاله ومن ثم منهجيته. لقد انصرف لاحقو الخوارزمي المباشرون إلى هذه المهمة دون إبطاء، فأدخل أبو كامل (٨٥٠ ـ ٩٣٠)(٧٣) الأعداد الصمّاء كموضوع للحساب قائم بذاته جذوراً ومعاملات. ووسعت عمليات يتطلبها حل نظم المعادلات الخطّية ذات المجهولات المتعددة ويتطلبها استخراج جذور كثيرات الحدود الجبرية، وسوف تأخذ المنهجية وبالأخص تلك المتعلقة بنظرية المعادلات مكانها في القرن الحادي عشر تحديداً: إذ سوف يحاول الخيّام مثلاً إقامة تصنيف كامل للنماذج القانونية للمعادلات التكعيبية(٧٤).

لقد سمح توسيع ومنهجة الحساب الجبري بصياغة فكرة البرهان الجبري بقدر ما أعطياه من عناصر لتحققه الممكن. ففي بداية القرن الحادي عشر أي قبل الخيّام بقليل، التزم أحد أكثر العلماء نشاطاً في هذا المجال ونعني به الكرجي بأن يعطي عدا عن البرهان الهندسي برهاناً آخر جبرياً للمسائل التي يتفحصها. لم يكتف الخيام بتحقيق تواجد البرهانين معاً بل استخلص منه السبب لنصٍ ـ برنامج. فبعد أن أعطى حلاً للمعادلة من الدرجة الثالثة بواسطة خصائص القطوع المخروطية كتب

«واعلم أن البرهان على هذه الطرق بالهندسة لا يجزي عن البرهان عليها بالعدد إذا كان الموضوع عدداً لا مقداراً ممسوحاً»(٧٥).

وبالروحية نفسها ألح السموأل كما يبدو في طلب برهان جبري بقدر ما يقرب الجبر ـ خلافاً للهندسة ـ المسائل الرياضية بمنهج تحليلي. أو كما كتب: «وهذا العمل هو الذي تقتضيه صناعة الجبر والمقابلة وهو بعينه تقتضيه صناعة التحليل. فأما صناعة الهندسة فقد يستخرج بها المجهول من غير حاجة إلى تحليل المعلومات إلى بسائطها»(٧٦).

---

(٧٣) انظر: Heinrich Suter, «Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmil al-Misrī,» *Bibliotheca mathematica*, vol.11 (1910-1911), pp.100-120, and Abū Kāmil Shy'ā' ibn Aslam, *The Algebra of Abū Kāmil: Kitāb fī al Jabr wa'l muqābala d'Abū Kāmil,* traduction of Matin Levey (Madison: University of Wisconsin Press, 1966).

(٧٤) انظر: Franz Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Al-Khayyāmī* (Paris: [s.pb.], 1951).

(٧٥) المصدر نفسه، ص ٩. لقد استبدلنا هنا ترجمة ويبك للعبارة «لا يجعله يزيد عن» بعبارة «لا ينوب عن» والتي وجدنا انها تعبر بدقة أكثر عن جملة الخيّام.

(٧٦) لقد عدنا بالنسبة إلى السموأل إلى مخطوطة «آيا صوفيا رقم (٢٧١٨)»، أنظر: Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al,* ff.113, p.27v.

فمن خلال التوسيع والمنهجة المذكورين أعلاه لجبر شكلت نظرية المعادلات جزأه الرئيسي، عاد الجبريون إلى الحساب لكي يوسعوا التحليل التوافيقي. وتفهم عندئذ الأهمية الخاصة التي أخذتها الأبحاث عن تقنيات لإستخراج الجذور مهما علت درجاتها المختلفة. فخلال إعداد هذه التقنيات اتجهت هذه الأبحاث نحو التحليل التوافيقي لاكتشاف جدول المعاملات الحدّانية وقاعدة صياغتها وصيغة ذات الحدّين المنصوصة كلاميا للقوى الصحيحة ونعلم أخيرا من السموأل أن الكرجي قد بنى هذا الحساب مثلث باسكال. ففي هذا النص نجد في الواقع جدول المعاملات الحدانية وقانون تشكلها: $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

وكذلك مفكوك ثنائية الحد: $(a + b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$ حيث $n \in \mathbb{N}$ (٧٧).

هذا النص هو الأول، على حد علمنا، حيث ذكرت هذه القواعد بهذه الدرجة من العمومية، ومن المحتمل أنها قد صيغت من قبل الخيّام في مؤلَّف لم يعثر عليه حتى الآن حيث كتب: «ولنمهد طرق في استخراج أضلاع المربعات والمكعبات مبنية على استقراء قليل، وهو معرفة مربعات الصور التسعة، أعني مربع الواحد والاثنين والثلاثة، وكذلك مضروب بعضها في بعض، أعني مضروب الاثنين في الثلاثة ونحوها. ولنا كتاب في البرهان على صحة تلك الطرق وتأديتها إلى المطلوبات. وقد عززنا أنواعها، أعني من استخراج أضلاع مال المال ومال الكعب وكعب الكعب، بالغا ما بلغ، ولم يسبق إليه. وتلك البراهين إنما هي براهين عددية مبنية على عدديات كتب الاسطقسات»(٧٨).

ونجد في القرن الثالث عشر النتائج نفسها مع فارق أن صياغة ذات الحدّين تكتب دائما كلاميا:

$$(a + b)^n - a^n = \sum_{m=1}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m \quad (٧٩)$$

وسنجد الصياغة نفسها أيضاً في مفتاح الحساب للكاشي في القرن الخامس عشر(٨٠).

---

(٧٧) انظر: Rushdi Rashed, «L'Induction mathématique: Al-Karajī et As-Samaw'al,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol.9 no.1 (1972), pp.6-7.

(٧٨) انظر: Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Al-Khayyāmī.*

(٧٩) ترجم هذا النص إلى الروسية من قبل:
Ahmadov and Rosenfeid, in: *Istor. Mat, Issled.*, vol.15 (1963), pp.431-444.

(٨٠) انظر: Paul Luckey: *Die Rechenkunst bei Ǧamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī* =(Wiesbaden: Steiner, 1951), and «Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der bino-

فيما كان التحليل التوافيقي يتبع هذا الاتجاه في الجبر، كان يرتسم تطور مواز في علم اللغة، حيث كانت نتائج التحليل التوافيقي الرياضية أقل أهمية من تلك التي قابلناها في الجبر، إلّا أنه يشير إلى مجال خارج الرياضيات يمكن أن يطبق فيه.

هذه المحاولة المهملة من قبل مؤرخي العلوم هي التي سوف ننظر فيها الآن.

إن الاهتمام الثابت الذي أولاه العرب للغتهم أدهشت الكثير من المستشرقين الغربيين المعاصرين والمؤرخين العرب القدماء. وهي دهشة لا تنفصل عن التقدم الحالي في مجال علم اللغة. ولم يثرها فقط التعدد والتنوع في الأبحاث اللغوية العربية بل التوجه البنيوي أيضاً قبل الأوان. من الممكن أن يكون هذا الأمر مشتركاً على أية حال بين كل أولئك الذين انبروا إلى تحليل لغتهم الخاصة كالهنود مثلاً. لقد رأى المؤرخون العرب القدماء في هذا الأمر حدثاً بأهمية وأصالة تشكيل المنطق[٨١]. وفي

= mische Lehrsatz in der islamischen Mathematik,» *Mathematische Annalen,* vol.120 (1948), pp. 217-274.

فرضية لوكي الأساسية تقول بأن الكاشي قد اكتشف جدول معاملات ثنائية الحد على الأقل وذلك باستخدامه للطريقة التي عرفت فيما بعد بطريقة روفيني - هورنر، وهي فكرة تستحق نقاشاً معمقاً وهذا ما سوف نتابعه في مكان آخر.

(٨١) انظر: فخر الدين محمد بن عمر الرازي، مناقب الامام الشافعي (القاهرة: المكتبة العلامية، ١٢٧٩ هـ): «واعلم أن نسبة الشافعي إلى علم أصول الفقه كنسبة ارسطاطاليس الحكيم إلى المنطق وكنسبة الخليل بن أحمد إلى علم العروض. وذلك لأن الناس كانوا قبل أرسطاطاليس يستدلون ويعترضون بمجرد طبائعهم السليمة، لكن لم يكن عندهم قانون ملخص في كيفية ترتيب الحدود والبراهين. فلا غرو إن كانت كلماتهم مشوشة ومضطربة، فإن مجرد الطبع إذا لم يستعن بالقانون الكلي قلما أفلح: فلما رأى أرسطاطاليس ذلك، اعتزل عن الناس مدة مديدة، واستخرج علم المنطق، ووضع للخلق بسببه قانوناً كلياً يرجع إليه في معرفة تركيب الحدود والبراهين.

وكذلك الشعراء كانوا قبل الخليل بن أحمد ينظمون الأشعار، وكان اعتمادهم على مجرد الطبع، فاستخرج الخليل بن أحمد علم العروض، فكان ذلك قانوناً كلياً في معرفة مصالح الشعر ومفاسده. فكذلك ههنا. الناس كانوا قبل الإمام الشافعي يتكلمون في مسائل الفقه ويعترضون ويستدلون، ولكن ما كان لهم قانون كلي يرجع إليه في معرفة الدلائل الشرعية وفي كيفية معارضتها وترجيحاتها، فاستنبط الشافعي علم أصول الفقه، ووضع للخلق قانوناً كلياً، يرجع إليه في معرفة مراتب أدلة الشرع».

يميز بشكل عام في التقليد الكلاسيكي العربي بين نوعين من العلوم: العلوم القديمة أو علوم الأوائل والعلوم العربية أو علوم الأعراب أي تلك العلوم اللغوية التي لا يعترف فيها المؤلفون بأية أسبقية للعلم اليوناني.

الحقيقة، عدا عن اللغويين أنفسهم فإن القضاة[83] وعلماء الدين الفلاسفة[83] والمصنفين[84] ارتبطوا دائماً ولأسباب متعددة ببحث مسألة اللغة، البعض منهم كان وراء استكشاف عقلاني لظاهرات اللغة والبعض الآخر وراء حل القضية المعقدة: أزلية أو خلق كلام الله، وآخرون أرادوا تقديم تصنيف منطقي لموادهم التجريبية من نبات ومواد دوائية... الخ، وبالنسبة إلى اللغويين فإن هذا الاهتمام يرجع على الأرجح إلى سبب ديني عُلْمِنَ بسرعة فيما بعد. فالإنتشار السريع للدين الجديد وغياب مؤسسة تسهر على التفسير الملائم لكلام الله وهو المصدر الأول للتوحيد العقائدي لشعوب ذات لغات وتقاليد مختلفة، فرض هذه المهمة التي دفعت بها ضرورة مزدوجة: خلق سجل من الكلمات والدلالات وإعداد القواعد النحوية لكلام الله بهدف تقديم المعنى الأصلي للوحي المنزل بلغة «الوثنيين». وإذا ما نُحيت هذه الدوافع جانباً فإن العلمنة ستسمح للغويين الأوائل بمعالجة كلام الله والشعر الجاهلي تحت العنوان نفسه على حدّ سواء.

يبقى مع ذلك أن علماء النحو الذين أصبحوا معجميين لم يقصدوا بادىء الأمر بالمعجم، سوى معجم خاص بمادة أو بإقليم ما، يوضح كلمات قديمة أو ذات معانٍ عويصة. والمقصود هنا، عند العرب كما عند الثقافات الأخرى، معاجم يكون مجالها محدداً وترتيبها غير أكيد. ويكون مبدأ التأليف أو الترتيب في هذه المعاجم دلالياً بشكل أساسي.

ظهرت للمرة الأولى فكرة استبدال هذا العمل ذي الدراسة المعجمية الأحادية

---

(٨٢) انظر مثلاً: أبو الحسين محمد بن علي الطيب البصري، **المعتمد في أصول الفقه**، تحقيق محمد حميد الله (دمشق: المعهد العلمي الفرنسي للدراسات العربية، ١٩٦٤)، ج ١، ص ١٥ وما يليها.

(٨٣) انظر مثلاً: ابو الحسن عبدالجبار، **الموسوعة اللاهوتية الفلسفية** (القاهرة: [د.ن.]، ١٩٦١)، ج ١: **المغني**، المتعلق بخلق القول الالهي. ففي مؤلفات المعتزلة كما في مؤلفات اللغويين نجد الكثير من النقاش النظري في مسائل أصل وطبيعة اللغة. انظر: جلال الدين عبدالرحمن السيوطي، **المزهر في علوم اللغة وأنواعها**، تحقيق محمد أحمد جاد المولى [وآخرون]، ٢ ج (القاهرة: دار احياء الكتب العربية، ١٩٥٨)، ج ١، ص ٧ ومايليها.

(٨٤) انظر: Meyerhof-Sobhī, *The Abridged Version of the Book of Simple Drugs' of Ahmad ben Muhammad al-Ghāfiqī*, by Gregorious Abu'l-Farag (Cairo: [n.pb.], 1932), and Abu Muhammad' Abd Allah B. Ahmad Ibn al-Baytār, *Ǧam'al-mufradāt: Traité des simples* (Paris: Leclerc, 1877-83).

بمعجم يضم مجموع كلمات اللغة لدى الخليل بن أحمد، فمن أجل حل هذه المسألة العملية بالتحديد طرحت اللغة كموضوع تحليل توافيقي. لقد قصد الخليل بالفعل عقلنة الممارسة التجريبية للمعجم أو بالأحرى الحل النظري للمسألة التطبيقية: تأليف معجم عربي. ولم تكن المهمة مباشرة بشكل من الأشكال إلّا بقدر ما كان المبدأ الدلالي (Sémantique) للتصنيف الخاص بالمعاجم القديمة صعب التعميم وبالتالي قليل الفعالية. إن تعميماً كهذا لا بدّ أن يتطلب نظاماً من المفاهيم الدقيقة جيدة التأسيس. ونظراً إلى حالة الأبحاث الدلالية في القرن التاسع وكي لا نتحدث عن الحالة الراهنة، فليس من السهل إعداد مثل هذا النظام، إذ لا يمكن أن يكون تأليف معجم للغة سوى إعادة تأليف للغة التي تكون عندئذ خاضعة للتحليل بغية الوصول إلى إحصاء شامل لجميع الكلمات(٨٥). تحت هذا الشرط وحده تستطيع كل كلمة إيجاد مكانها في المعجم مرة واحدة فقط. وينحصر مشروع الخليل في إحصاء شامل من جهة، وتطبيق تقابلي بين مجموع الكلمات وخانات المعجم من جهة ثانية. تلك هي الشروط التي يجب أن يلتزم بها وهي شروط يجب أن يخضع لها مبدأ أي تأليف معجمي. يضاف إلى هذين الالتزامين الداخليين التزام ثالث خارجي وهو ضرورة جعل القاموس سهل المنال وقابلاً لأي استعمال محتمل(٨٦). وبما أن هذه الالتزامات هي شكلية بالبداهة، فعلى مبدأ التأليف أن يكون من الطبيعة نفسها، فتفترض بنية القاموس إذن إعداداً مسبقاً إن لم يكن في نظرية الوظيفية المثلى للغة، فعلى الأقل في فقه لمجمل الظاهرة اللغوية انطلاقاً من إعادة البناء لمفردات اللغة، أي للعناصر اللغوية المتطابقة رغم اختلاف مدلولات الكلمات. ولإعداد هذا الفقه، على المعجمي أن يقرن عمله بعمل عالم الأصوات إذ إن تعاون الإثنين معاً يمهد وحده بشكل فعّال لمسألة التحليل التوافيقي.

---

(٨٥) فيما يخص صناعة المعاجم ولتحديد مدى الدراسة المعجمية، انظر:
A.B. Keith, *A History of Sanscrit Literature* (London: [n.pb.], 1924); Muller, *Handbuch der Klassischen Altertums Wissenschaft* (1913), vol.2; J.Collant, *Varron Grammairien Latin* (Strasbourg: [n.pb.], 1923), and Karl Krumbacher, *Geschichte der Byzantinischen Litteratur*, 2vols. (New York: Burt Franklin, 1896).

(٨٦) نقرأ في بداية كتاب: الخليل بن أحمد بن عمرو بن تميم الفراهيدي (أبو عبدالرحمن)، كتاب العين: «هذا ما ألّفه الخليل بن أحمد البصري - رحمة الله عليه - من حروف أ ب ت ث مع ما تكلمت به، فكان مدار كلام العرب وألفاظهم، ولا يخرج منها عنه شيء. أراد أن يعرف به العربي في أشعارها وأمثالها ومخاطباتها وألا يشذ عنه شيء من ذلك»، ص ٥٢.

إن مذهب الخليل يمكن أن يرد إلى القضية الأساسية التالية:

إن اللغة هي الجزء المتحقق صوتياً من اللغة الممكنة(٨٧). فإذا كان النسق المؤلف من r حرف من حروف الأبجدية حيث $5 \geq r > 1$ ووفق عدد الأحرف التي تؤلف الجذر كما سنرى هو ما يعطينا كما يقول الخليل مجموعة الجذور وبالتالي كلمات اللغة الممكنة، فإن جزءاً واحداً محدداً بقواعد تنافر الأصوات التي يتركب منها كل جذر يشكل اللغة. وهكذا يعود تأليف معجم ما إلى تركيب اللغة الممكنة واستخراج جميع الكلمات التي تنضوي بعد ذلك وفق القواعد المذكورة. وهذه الأطروحة المهمة التي اقتضت صياغتها دراسة صوتية تعهدها الخليل منذ البداية واستغل فيها علم العروض ومعرفته الموسيقية. إن تفريقاً بين مستويين للتحليل ـ الإشارات والدلالات ـ سمح له بالطموح إلى إعادة بناء اللغة انطلاقاً من مستوى الإشارات وحده. هذا التفريق ما لبث أن أوحى له بتفريق آخر بين صوت دوري موسيقي وصوت غير منتظم أو غير دوريّ أي بين الحروف الصامتة والحروف المصوِّتة فرتبت الحروف صفوفاً حسب مخارج نطقها بدءا بالحروف التي تلفظ من الحنجرة وانتهاء بالحروف الشفوية. فأعطى الصفوف التالية(٨٨):

١) ع، هـ، ح، خ، غ
٢) ك، ق
٣) ج، ش، ض
٤) ص، س، ز
٥) ط، د، ت
٦) ظ، ذ، ث
٧) ر، ل، ن
٨) ف، ب، م
٩) و، ا، ي، همزة.

ويميز في بعض الصفوف بين الحروف الخرساء والحروف الصوتية ففي الصف

(٨٧) هذه النظرية الموجودة في نص منسوب للخليل كانت قد استعيدت فيما بعد من قبل أبي علي بن فارس، وابن غيني والسيوطي... وعلاوة على ذلك فإن الأخير يذكر في مؤلفه المذكور سابقاً أراء لابن فارس ولابن غيني. انظر: المصدر نفسه، ص ٢٤٠ وما يليها.

(٨٨) المصدر نفسه، ص ٥٢ ـ ٥٣، و٦٥.

الأول، ع هو حرف صوتي بينما ح هو حرف أخرس وفي الصف الخامس لدينا د حرف صوتي وت حرف أخرس[٨٩]. إن تفحصاً للترتيب الذي وضعه الخليل وللشروحات التي أعطاها في كتاب العين وفي ضوء علم الأصوات الحديث يبيّن بسهولة أن توزيع الأصوات على صفوف وفقاً لمخارج نطقها من جهة والمقابلة بين الخرساء منها والصوتية من جهة ثانية يقترب في مجمله من علم الأصوات الحديث بشكل صحيح، ويبقى مع ذلك ترتيب الحروف الخرساء داخل كل صف تقريبياً، وقد استعاد تلامذة الخليل تحليله كي يكمّلوه كسيبويه مثلاً.

وقبل تطبيق معرفته على المهمة التي التمس تحقيقها ـ إنشاء معجم ـ يلجأ عالم الأصوات أولاً إلى الاستفادة منها في دراسة صرف اللغة العربية وهذا يسهل عليه كثيراً مسعاه كمعجمي[٩٠]. فيكتشف بهذه الطريقة خاصية صرفية للغة العربية واللغات الساميّة بوجه عام وهي أهمية الجذر في اشتقاقات مفردات اللغة والعدد الأصغر نسبياً لهذه الجذور. فالجذر كتجمع للأحرف الساكنة فقط يتعلق به في الغالب دال نوعي يمثل مدلولاً عليه، ولا يمكن أن يبدو للخليل كوحدة نظرية قبل التمييزين السابقين بين المعنى والمدلول من جهة، والساكن والصوت من جهة أخرى. عدا عن كون هذه الجذور أشكالاً محدّدة فهي خماسية الأحرف وفي غالبيتها ثلاثية بحيث انه يكفي لحساب جميع جذور اللغة الممكنة أن نحصي الأنساق كافة لمجموع خمسة أحرف على الأكثر. وهكذا انصرف الخليل إلى اجراء هذا الحساب على معجمه، فالطريقة بسيطة، إذ عليه أن يحسب عدد التوافيق ـ دون تكرار ـ المؤلفة من r حرف من الأبجدية حيث: $r = 2.3....5$، ثم عليه أن يحسب عدد الأنساق المؤلّفة من r حرف[٩١]. وبمعنى آخر لقد حسب: $A_n^r = r!.C_n^r$ حيث يمثل n عدد الحروف الأبجدية

(٨٩) المصدر نفسه، ص ٦٤.

(٩٠) قال الخليل: «وليس للعرب بناء في الأسماء ولا في الأفعال أكثر من خمسة أحرف. فمهما وجدت زيادة على خمسة أحرف في فعل واسم، فاعلم أنها زائدة على البناء، وليست من أصل الكلمة»، انظر: المصدر نفسه، ص ٥٥.

(٩١) «علم أن الكلمة الثنائية تتصرف على وجهين نحو: قد، دق، شد، دش، والكلمة الثلاثية تتصرف على ستة وجوه وتسمى مسدوسة وهي نحو: ضرب، ضبر، برض، بضر، رضب، ربض. والكلمة الرباعية تتصرف على أربعة وعشرين وجهاً، وذلك أن حروفها وهي أربعة أحرف تضرب في وجوه الثلاثي الصحيح وهي ستة أوجه فتصير أربعة وعشرين وجهاً، يكتب مستعملها، ويلغى مهملها، وذلك نحو عبقر (يقوم منه): عقرب، عبرق، عقبر، عبقر، عرقب، عربق، =

و $1 < r \leqslant 5$[٩٢]. ففي حالة $r = 3$ مثلاً يكون لديه بواسطة هذه الطريقة جميع المصادر الثلاثية الممكنة للّغة. هذه الاعتبارات لعلم الأصوات وعلم الصرف قادته إلى مسألة ما انفك علماء اللغة العرب عن توسيعها، أمثال أبو علي بن فارس وابن جني والسيوطي، كمسألة التنافيات الصوتية داخل كل جذر. إن قواعد التنافي تسمح بأن نستخرج من اللغة الممكنة عدداً معيناً من الجذور والتعرف بالتالي على تلك التي يجب أن تدرج في القاموس[٩٣]. لن نتمكن هنا من إعطاء تفصيل قواعد التنافي، وسنكتفي منه بالعرض العام التالي: لا يمكن أن ينتمي الحرفان الساكنان الأولان من المصدر إلى الصف نفسه ولا إلى صفوف متجاورة ويخضع الساكنان الأخيران من المصدر للقاعدة نفسها ويمكن أن يكونا متشابهين. ويتم اشتقاق الكلمات انطلاقاً من مصادر وفق

= قعرب، قعبر، قبعر، قبرع، قرعب، قربع، رعقب، رعبق، رقعب، رقبع، ربقع، ربعق، بعقر، بعرق، بقعر، بقرع، برعق، برقع.

والكلمة الخماسية تتصرف على مائة وعشرين وجهاً، وذلك أن حروفها، وهي خمسة أحرف تضرب في وجوه الرباعي وهي أربعة وعشرون حرفاً، فتصير مائة وعشرين وجهاً، يستعمل أقله ويلغى أكثره. وهي نحوه...». (وبتعبير آخر، لإيجاد عدد تباديل r حرف صامت، نبحث عن حاصل ضرب عدد تباديل $r - 1$ حرف صامت بـ r، أو $r! = r(r - 1)!$.

(٩٢) انظر: المصدر نفسه، ص ٧٤. فإن الحساب المنسوب إلى الخليل من قبل أبي حمزة واستعيد من السيوطي هو حساب صحيح فيما يتعلق بـ A_n^r حيث $n = 28$، و$r = 2.....5$، بالإضافة إلى أن تركيب المعجم يسمح بتقديم الصيغة المقابلة. وذكرت غالباً فيما بعد طريقة إتمام ذلك بخاصة في مقدمة ابن خلدون، إذ توصل بالتجريب إلى حصر عدد التراكيب (التوافيق) C_n^r حيث $n = 28$ و $r = 2$ مثلاً، بأخذه الحرف الصامت الأول مع الحروف الباقية وهي سبع وعشرون فيكون لديه سبع وعشرون كلمة ثنائية. ثم يأخذ الثاني مع الستة والعشرين فيكوّن ستة وعشرين كلمة وهكذا دواليك. ويجمع فيما بعد كافة التراكيب ويضاعف الحاصل لأنّ التقديم والتأخير بين الحروف معتبرٌ في التبديل فيحصل على كافة التباديل من الكلمات الثنائية.

وبالطريقة نفسها يجري الحساب على حالة $r = 3$ معتبراً كل ثنائية بمنزلة الحرف الواحد، فيركبها مع الحروف الستة والعشرين الباقية. ومن الـ 27 تركيباً ثنائياً يشكل 26 تركيباً ثلاثيّ الحروف وهكذا دواليك، يجمع فيما بعد كافة التراكيب الثلاثية ويضرب الحاصل بالعدد فيحصل على كافة التباديل وكذلك الأمر بالنسبة للرباعيّ والخماسيّ أي $r = 4$ و $r = 5$. انظر: أبو زيد عبدالرحمن بن محمد بن خلدون، **المقدمة** (بيروت: دار الكتاب اللبناني، ١٩٥٦ - ١٩٥٩)، فصل: **علم اللغة**، ص ٥٤٨ وما يليها.

(٩٣) انظر: الخليل، **كتاب العين**، ص ٦٣ وبالنسبة إلى الحرف، قال الخليل: «إن العين لا تأتلف مع الحاء في كلمة واحدة لقرب مخرجيهما»، ص ٦٨. أو كما يقول أيضاً: «وإلا فإن العين مع هذه الحروف: الغين والهاء والحاء والخاء مهملات»، ص ٦٩. يبقى أن نقول إن هذه المسائل أصبحت بعد الخليل موضوعاً لدراسات منهجية.

ضروب منتهية العدد وهي نفسها موضوع للتوافق. هذه الضروب وتوافقاتها ليست معروفة بوضوح من قبل الخليل ولن تصبح كذلك إلّا عندما سينظر إلى علم الأصوات وعلم الصرف كعلْمين قائمين بذاتهما لا من ناحية صرف معجمية. هذا العمل سيكون لتلامذة الخليل ولاحقيه. هكذا بقي اشتقاق الكلمات في كتاب **العين** دون قاعدة ظاهرة.

وكخلاصة، نذكّر بالنقاط التالية:

١ - إن التحليل التوافيقي الذي وسعه كل من اللغويين والجبريين بشكل مختلف، يجيب إذن على مشروعين مختلفين، أحدهما يتعلق في حل مسألة عملية بطريقة نظرية، وعلى العكس فإن الآخر قصد تأسيس مفهوم نظري.

٢ - يتجلى الإدراك المجزّأ لوحدة التحليل التوافيقي في غياب مفهوم خاص يشار به إليه، ويرجع ذلك إلى اختلاف المشاريع.

٣ - ومع ذلك ففي كلتا الحالتين كان التحليل التوافيقي يحصل عند تحوّل أساسي في مفهوم العلاقة بين الفن والعلم لتقليد يقع بطريقة ما خارج التقليد الإغريقي - العربي. هذا التحول يوضح جزئيا على الأقل ظهور منهجين علميين يطرحان كمجال لتوسيع وتطبيق التحليل التوافيقي.

هذه الفرضيات ذات الطبيعة المعرفيّة سمحت في مجال إعادة التشكيل التاريخي بإدراج فرع في تاريخ العلوم العربية لم يسبق للقدماء العرب تخيل استثنائه من النشاط العلمي من جهة، والعودة لأسباب سبق شرحها إلى بداية القرن الحادي عشر لاكتشاف نصوص تعالج التحليل التوافيقي، والتقدم بقرنين على تاريخ ظهور النص الأول المعروف في هذا المجال من جهة ثانية.

فالتاريخ المعرفي يسمح إذن بفهم نشاط عقلاني مؤرخ ومحصور ويؤمن له إعادة أفضل لبناء تاريخه.

رابعاً: الأعداد المتحابّة وأجزاء القواسم التامّة والأعداد الشكلية في القرنين الثالث عشر والرابع عشر(٩٤)

مقدمــة

غالباً ما يكون من العسير معرفة بداية تكوين المفاهيم والتقنيات في نظرية الأعداد ومتابعة تسلسلها في القرنين السادس عشر والسابع عشر. وليس نادراً، عوضا عن القبول بصعوبة هذا الأمر وأخذه في الحسبان عند كتابة تاريخ هذه النظرية، أن يلجأ إلى القفز وتخطي القرون. لا شيء يمنع عندئذ من وضع باشيه دي مزرياك (Bachet de Méziriac) أو فيرما (Fermat) مباشرة بعد إقليدس وديوفنطس. إن موقفا كهذا يسبب تضليلاً مزدوجاً فهو لا يجتزىء التاريخ فحسب بل يزوّر تقدير النتاج المجدد لهذا أو ذاك من حسابيي القرنين السادس عشر والسابع عشر. إذ كيف يمكن في الواقع تحديد التغيرات الفعلية في الأسلوب التي طرأت حينها وتعيين ظواهرها بدقة إذا كان باشيه وفيرما قد أتيا، هكذا ببساطة، بعد إقليدس وديوفنطس؟ في شروط كهذه، كيف يمكن تجنب حكم إجمالي على الحساب الكلاسيكي، حكم لا يعبر في الغالب إلاّ عن عدم المقدرة على التمييز بين الفروقات؟

لكن، منذ القرن التاسع عشر، فإن شخصية بارزة لم تكف عن تعكير هذه الصورة ألا وهي ليونارد دو بيز (Léonard de Pise) المعروف بفيبوناكشي (Fibonacci). فمؤلَّفه الذي يحتوي في الواقع على نتائج وطرق مهمة في نظرية الأعداد كان قد عرف من قبل رياضيين عديدين نقلوه وأكملوه مثل لوقا باشيولي (Luca Pacioli)(٩٥). وفي الواقع لا أحد ينكر أن فيبوناكشي كان على علاقة مباشرة بالرياضيات العربية، كما أن المعرفة الجيدة بتاريخ هذه الرياضيات تسمح إن لم يكن بمواجهة السؤال الصعب عند بداية تكوين المفاهيم والتقنيات، فعلى الأقل بطرح

---

(٩٤) *Archive for History of Exact Sciences*, vol.28, no.2 (1983), pp.107-147.

(٩٥) انظر: *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, 1ere. ed (Venise: [s.pb.], 1494).

إن لاحقي فيبوناكشي (Fibonacci) الايطاليين ممن عاشوا قبل لوقا باشيولي (Luca Pacioli) هم على الدرجة نفسها من الأهمية. انظر بخاصة:

E. Picutti, «Il libro dei quadrati di Leonardo Pisano,» *Estratto della physis*, Anno 21 (1979).

مسألة أكثر معرفية تتعلق بأسلوب هذا العلم والمساهمة المجددة للقرن السابع عشر فيه.

إذا ما صدقنا معظم المؤرخين فإن هذه العودة إلى الرياضيات العربية لا تُطرح بحال من الأحوال، إذ إن الاختصاصيين المزودين بالمعلومات بشكل كافٍ والذين لا يشك بصدق نياتهم يتفقون في دعم فكرة أنه خلافاً للجبر وعلم المثلثات مثلاً، فإن نظرية الأعداد عند رياضي اللغة العربية لا تتميز لا بأصالة اكتشافاتها ولا بأهمية نتائجها. فلو قورنت نظرية الأعداد بالعلوم الرياضية الأخرى فلن يكون نصيبها سوى خيبة الأمل، ولن يمكنها أن تدّعي بنصيب تاريخي لا بنتائجها ولا حتى بأخطائها، لدرجة أنه يمكن كتابة تاريخ نظرية الأعداد وتوفير ذكر مشاركة الرياضيات العربية فيه. ومع هذا ثمة واقعتان تبرزان ضد هذا الطرح كشفت عنهما في القرن الماضي أعمال ويبك (Woepcke) وكان بإمكانهما تنبيه المؤرخين وهما: الحالة الأولى لمبرهنة فيرما (Fermat) ومبرهنة ثابت بن قرة عن الأعداد المتحابّة(٩٦).

لقد برهنّا خلال السنوات الأخيرة عدم دقة وجهة النظر هذه حول تاريخ نظرية الأعداد فيما يتعلق على الأقل بفصل مهم منها، أي التحليل الديوفنطي للأعداد الصحيحة، ففي الواقع، رأى هذا الفصل النور في القرن العاشر وقد تشكل بفضل الجبر الموسع منذ الخوارزمي وضده أيضاً وبمساعدة قراءة إقليدية غير ديوفنطسية لـ **المسائل العددية** لديوفنطس التي كاد قسطا بن لوقا أن ينهي ترجمتها. وقد عرضنا في مكان آخر(٩٧) ما كان من مساهمة للخجندي والخازن وابن الهيثم، إضافة إلى كثير غيرهم في القرن العاشر في إعداد التحليل الديوفنطي الصحيح.

سوف نتابع هذه المرة البحث نفسه لكن بخصوص مجال آخر من نظرية الأعداد وهو فصل شديد الارتباط بـ **الأصول** لإقليدس، أي دراسة أجزاء القواسم التامة،

---

(٩٦) Franz Woepcke, «Notice sur une théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs,» *Journal Asiatique*, vol.4, no.20 (1852), pp.420-429.

توجد مخطوطات أخرى لهذا النص من الضروري الرجوع إليها عند القيام بطبعة علميّة له وهو أمر لم يحصل بعد.

(٩٧) انظر: Rashed, «L'Analyse diophantienne au Xème siècle: L'exemple d'Al-Khâzin,» pp. 193-222, et «Ibn al-Haytham et le théorème de Wilson,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol.22, no.4 (1980), pp. 305-321.

وهي دراسة ضرورية لدراسة الأعداد التامة والأعداد المتحابة بشكل أساسي. وتبدو لنا هذه الدراسة المهمة بالنسبة إلى تاريخ النظرية الأولية للأعداد، نموذجية لسببين: فتاريخ أجزاء القواسم التامة وبصورة خاصة الأعداد المتحابة كان قد كتب مرات عديدة بطريقة تبدو وكأنها نهائية من جهة(٩٩)، ومن جهة أخرى يبدو هذا التاريخ كما يمكن أن نقرأه قد تطور دون ارتباط حقيقي بغيره من العلوم الرياضية مجرداً من أي مساهمة فعلية في مجمل نظرية الأعداد. سوف نبين استنادا إلى مجموعة من الوثائق غير المنشورة والبعض منها كان غير معروف حتى الآن أن الأمر لم يكن كذلك، فضلاً عن أننا سوف نبين أن تطبيق مفاهيم ووسائل الجبر في المجال التقليدي الإقليدسي لنظرية الأعداد سمح للرياضيين في القرن الثالث عشر على الأكثر بالحصول على نتائج متعددة ما زالت تنسب حتى الان إلى رياضيي القرن السابع عشر كمثل دراسة دالّتين حسابيتين أوليتين أو الأعداد الشكلية والتحليل التوافيقي والأعداد المتحابة نفسها. سنبدأ بدراسة تاريخ الأعداد المتحابة.

١ ـ مبرهنة ثابت بن قرّة وحساب الأعداد المتحابة

أ ـ لقد بدأ كل شيء فعليا مع ثابت بن قرّة، وخلافا للأعداد التامة، فإن الأعداد المتحابة لم تجد النظرية التي تستحقها قبل أعمال هذا الرياضي. من المعروف أن «العدد التام» بالمعنى الإقليدسي هو موضوع نظرية تظهر في نهاية الكتاب التاسع من **الأصول**(١٠٠). إذ إن القضية الشهيرة IX-36 المتعلقة بالأعداد التامّة تبدو في البدء

---

(٩٨) انظر بالتحديد: Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol.1, p.38 sq: W.Bortto, *Befreundete Zahlen* (Wuppertal: [n.pb.], 1979), and Itard, *Arithmétique et théorie des nombres*, pp. 37-38.

(٩٩) لنذكر أن إقليدس يعطي في القضية IX-39 مجموع المتتالية الهندسية ذات النسبة 2، وتعاد كتابة القضية IX-36 كما يلي:

إذا كان: $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^p = 2^{p+1} - 1$ عدداً أولياً فإن $2^p(2^{p+1} - 1)$ هو عدد تام.

لا يظهر في أي مكان قبل إقليدس تعريفاً للعدد التام باعتباره مساوياً لمجموع اجزاء قواسمه التامة. أو كما كتب إقليدس في: **الأصول الهندسية**، ترجمة كرنيليوس ڤانديك (بيروت: [د.ن.]، ١٨٥٧): «τέλειος ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν».

وبقي هذا التعريف سائداً عند ثيون دسميرن (Théon de Smyrne) وعند نيقوماخس. يكتب ثيون: «καὶ τέλειοι μὲν εἰσιν οἱ τοῖς αὑτῶν μέρεσιν ἴσοι, ὡς ὁ τῶν ς′». انظر: J. Dupuis, ed., *Exposition* (Paris: [s.pb.], 1892), vol.32, p.74.

وفيما يتعلق بالعدد التام، يكتب نيقوماخس أيضاً: «انه العدد المساوي دائماً لأجزائه الفعلية»، =

بمظهر تأملي بحت. ويبقى التساؤل عن الأسباب التي كانت لدى اليونانيين كي يهتموا بأسئلة كهذه. بين العديد من الفرضيات الصادرة في هذا الخصوص، هناك فرضية هيلتش (Fr.Hultsch) في نهاية القرن الماضي وهي من أكثرها جاذبية ومفادها يبين أن المقصود في الواقع هو ترجمة نظرية لطرائق اللوجستيقا (الحساب العددي) منذ المصريين(١٠٠). لكن الوضع مختلف بالنسبة إلى الأعداد المتحابة إذ لا نجد أية إشارة إلاّ في شهادات متأخرة تتعلق بتقاليد صوفية أو جمالية. من أشهر مؤلفي تلك الشهادات جمبليك (Jamblique)(١٠١) الذي أرجع كثابت بن قرّة تماماً فيما بعد معرفة هذه الأعداد إلى فيثاغورس. إنها روايات اسطورية بالتأكيد لكن لها الفضل على الأقل مع ثابت بن قرة في كشف النقاب عن القصد العلمي للرياضي. وهكذا ففي مقدمة مذكراته حول الأعداد المتحابّة يذكر ثابت بن قرّة أن «فيثاغورس والفلاسفة القدماء من شيعته» لجأوا إلى نوعين من الأعداد: **الأعداد التامّة والأعداد المتحابة**. ويتابع ابن قرّة قائلاً ان نيقوماخس الجرشي قد أعطى قاعدة لتحديد الأعداد التامة دون أن يبرهنها بينما أعطى إقليدس القاعدة وبرهانها. وفيما يتعلق بالأعداد المتحابة فقد لاحظ ابن قرّة بأنه لم يجد «أن واحداً منهما ذكرها ولا صرف من عنايته إليها شيئاً»(١٠٢).

إن عدم التناظر بين الأعداد التامة والأعداد المتحابة، والتباين في الأهمية الصوفية لهذه الأعداد الأخيرة مع المعرفة الرياضية التي نعرفها عنها، هما بمقدار المعطيات التاريخية نفسها عشية برهان ابن قرّة. فإن تمكنا منها بالمعرفة الرياضية وحدها فإن هذه المعرفة تقتصر في الواقع على تحديد وحساب الزوج [220،284]. لذا يحدّد ابن قرّة لنفسه برنامجاً جديداً ويخطط لتحقيقه بهذه العبارات: «فلما خطر ببالي أمرها

= انظر: R. Hoche, ed., *Introduction* (Leipzig: [s.pb.], 1866), vol.16. p.39.
وقد أخذ ثابت بن قرّة هذه العبارة نفسها، وترجمها بـ «ولكنّه أبداً مساوٍ لأجزائه».

"[ἀιεὶ ἴσος τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν]";

انظر: Kutsch, *Tābit B. Qurra's: Arabische Übersetzung der des Nikomachos von Gerasa* (Beyrouth: Imprimerie catholique, 1958), p.38.

(١٠٠) هذه الفرضية لهيلتش (Hultsch) استغلها العديد فيما بعد، واختصرها ببراعة تانيري (P.Tannery) الذي يذكره:

Jean Marc Gaspard Itard, *Les Livres arithmétiques d'Euclide* (Paris: Hermann, 1961), pp.69-70.

(١٠١) Jamblique, *In Nicom. Introd.*, ed. Pistelli (Leipzig: [n.pb.], 1894), p.35.

(١٠٢) انظر مقدمة رسالته في مخطوطة: «Bibliothèque nationale, Paris (2457)».

واستخرجت لها برهانا، لم احب، إذ كان ذكرها هذا الذكر، أن أضيعه بترك إثباته. فأنا مثبت ذلك من بعد أن أقدم مقدمات يحتاج إليها»[١٠٣]. وفي الواقع بعد أن برهن المقدمات الضرورية، قام بإثبات المبرهنة التي تحمل اسمه. وقبل عرض هذه المبرهنة سنذكر ببعض التعريفات:

إن الأجزاء ذات القواسم التامّة لعدد طبيعي n أو قواسمه الفعلية، هي جميع قواسمه باستثناء العدد n نفسه. لنرمز بـ $\sigma_0(n)$ لمجموع القواسم الفعلية وبـ $\sigma(n) = \sigma_0(n) + n$ لمجموع القواسم. نسمّي العدد الطبيعي n:

زائدا إذا كان: $\sigma_0(n) > n$

ناقصاً إذا كان $\sigma_0(n) < n$

تامّا إذا كان $\sigma_0(n) = n$

ويدعى العددان الطبيعيان m و n بالمتحابّين[١٠٤] إذا كان:

$$\sigma_0(m) = n \text{ و } \sigma_0(n) = m$$

ومنذ القرن العاشر[١٠٥] ادخل أيضا مفهوم الأعداد الطبيعية المتعادلة m، n، ...r

---

(١٠٣) المصدر نفسه.

(١٠٤) لا تترك المصطلحات العربية مجالاً للشك حول الأصل اليوناني للمفردات ويبدو من جهة أخرى أن ترجمة ثابت بن قرّه لمقدمة نيقوماحس، قد رسّخت تلك المصطلحات. فترجم العدد [τέλειος] إلى العدد الـ «تام» بالعربية، وهو تعبير يحمل جذره العربي كما يحمل جذره اليوناني فكرة الإنجاز والاكتمال، كذلك ترجمت على التوالي من قبل ابن قرّه المفردتان اليونانيتان [ὑπερτελής] و [ἐλλιπής] إلى «الزائد على التمام» و«الناقص عن التمام».

وقد أغفلت هذه الترجمة ولم يُحتفظ فيها بعد إلاّ بـ «الزائد» و«الناقص». أمّا العبارة [φίλοι ἀριθμοί] فترجمت بـ «الأعداد المتحابّة».

(١٠٥) أبو منصور عبدالقاهر بن طاهر البغدادي، «التكملة في الحساب،» مخطوطات: «لاليلي، سليمانية، استابول (١/٢٧٠٨)،» ورقة ٧٩، (وقد توفي عام ١٠٣٧).

نجد في النص هذا التعريف للأعداد المتعادلة، ثم يطرح المؤلف المسألة التالية: «فإذا كان معنا عدد مفروض وأردنا أن نعلم العددين اللذين <مجموع> أجزاء كل واحد منها مثل هذا العدد المفروض». المقصود إذاً البحث عن الصورة العكسية التي يعطيها σ_0 للعدد المعطى a يقوم البغدادي بما يلي: «أنقصنا من العدد المفروض واحداً ثم قسمنا الباقي بعددين أوليين، وقسمنا أيضاً بعددين آخرين أوليين، ثم كذلك بقسمه ما احتمل القسمة بعددين أوليين، ثم ضربنا القسمين من التقسيم الأول أحدهما في الآخر. وضربنا القسمين في التقسيم الثاني أحدهما في الآخر، وكذلك نفعل بقسمي التقسيم الثالث أو الرابع وما بعد مما اجتمع من هذه الضروب، وكل واحد منها أجزاؤه مثل ذلك العدد المفروض». =

حيث[١٠٦]: $\sigma_0(m) = \sigma_0(n) = \ldots = \sigma_0(r)$

كذلك وبدون أن تسمّى، أدخلت مجموعة الأعداد الجزئية المزدوجة حيث:

$$\sigma_0(n) = 2n$$

مبرهنة (ابن قرّة):

لنفرض أن: $p_n = 3 \cdot 2^n - 1$ وأن $q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$

إذا كانت p_{n-1} و p_n و q_n أعداداً أولية.

فإن: $a = 2^n p_{n-1} p_n$ و $b = 2^n q_n$

تكون أعداداً متحابة ويكون a عدداً زائداً ويكون b عدداً ناقصاً[١٠٧].

لكي يثبت ابن قرّة هذه المبرهنة عمد إلى برهان تسع مقدمات تنقسم إلى مجموعتين. المقدمات الأولى الثلاث تعالج في الواقع تحديد أجزاء القواسم التامة لعدد طبيعي. وأثناء ذلك يلامس ابن قرّة موضوعين سوف يطوّران بصورة منهجية مع لاحقيه. إذ يجري تحليل عدد طبيعي إلى عوامله الأوليّة ويعالج طرائق التحليل التوافيقي قبل الأوان وهكذا يبرهن تباعاً:

= أي إذا كان a العدد المعطى، فالمطلوب إيجاد كافة الأعداد المتعادلة والمرتبطة بالعدد a، أي صور $\sigma_0^{-1}(a)$. يتصرف البغدادي كما يلي:

نفتش عن العددين الأوليّين p_i وَ q_i ($i = 1,2,\ldots$)، بحيث إن: $a = 1 + p_i + q_i$

نجد: $\sigma_0^{-1}(a) = \{p_i q_i\} = \{b_i\}$ حيث: $(i = 1, 2, \ldots)$

فالأعداد b_i هي أعداد متعادلة.

من البديهي أن: $\sigma_0(b_i) = \sigma_0(p_i q_i) = a$ حيث: $(i = 1,2,\ldots)$

ويعطي البغدادي المثل التالي: $a = 57$,$p_1 = 3$,$q_1 = 53$,$p_2 = 13$,$q_2 = 43$

لذا: $b_1 = 159$ وَ $b_2 = 559$

وهكذا فهو يعطي عنصرين فقط لصورة $\sigma^{-1}(57)$.

انظر: الزنجاني، «عمدة الحساب»، مخطوطات: «طوب قاي سراي (٣١٤٥)»، حيث يعطي التعريف نفسه ويأخذ المثل نفسه ويعطي أخيراً الجواب: $\sigma_0^{-1}(57) = \{159, 559, 703\}$. ونجد، فيما بعد، دراسة لهذه الأعداد المتعادلة في العديد من الأبحاث الحسابيّة.

(١٠٦) انظر: المصدر نفسه، حيث نجد هذه الأعداد والقضية الخاطئة التي تؤكد أن العدد $n = 120$ هو العدد الوحيد الذي يحقق $\sigma_0(n) = 2n$.

(١٠٧) انظر: رسالة ابن قرّة، القضية ١٠.

(١) «كل عدد مسطح ضلعاه عددان أوّلان، فليس يعدّه عدد آخر غيرهما»[١٠٨] ومن الواضح أن هذه المقدمة هي حالة خاصة من IX-14 من **الأصول**[١٠٩].

(٢) «كل عدد مسطح يكون أحد ضلعيه عددا أولا والآخر عددا مركبا فإنه يعده ضلعاه وكل عدد يعد ضلعه المركب وكل عدد يجتمع من ضرب ضلعه الأول في كل عدد يعد ضلعه المركب، ولا يعده عدد آخر غير هذه الأعداد»[١١٠].

(٣) «كل عدد مسطح يكون ضلعاه عددين مركبين فإن الذي يعدّه من الأعداد الأخرى ضلعاه وكل عدد يعد كل واحد من ضعليه وكل عدد يجتمع من ضرب كل واحد من ضلعيه في كل عدد يعد الضلع الآخر منها وكل عدد يجتمع من ضرب كل عدد يعد أحد الضلعين في كل عدد يعد الضلع الآخر ولا يعده عددا آخر غير هذه»[١١١].

وقد قام ابن قرّة بإثبات هذه المقدمات الثلاث متبعاً الطريقة نفسها دائماً: فهو يبدأ بإثبات أن أي عنصر من مجموعة القواسم الفعلية لعدد ما، يقسم بالتمام هذا العدد، ثم يبين بعد ذلك بواسطة قياس الخلف أنه لا يوجد أي عنصر آخر يقسم هذا العدد ولا ينتمي إلى هذه المجموعة. على أية حال فإن المقدمات الثلاث تطابق الحالة نفسها رغم جعلها في كل مرة أكثر تعقيداً. يبدو إذن أن ابن قرّة في نهاية تلك المحاولة الأولى لإعداد نظرية للأعداد المتحابة، قد استشف منذ ذلك الوقت مسائل أساسية في تاريخ الحساب كالتحليل إلى عوامل أولية واللجوء إلى توافيق محتملة بهدف عد هذه العوامل.

أما المجموعة الثانية من المقدمات فهي تقوم بصورة خاصة على تشكيل الأعداد التامة، الزائدة والناقصة، وهذا يعني أن المقصود هنا في الحقيقة هو استعادة للأبحاث التقليدية حول خصائص القواسم الفعلية لعدد ما. وفي الواقع إن ثابت بن قرّة قد برهن قضيتين إحداهما مهمة بالنسبة إلى تاريخ الأعداد التامة، وتكتب[١١٢] من جديد كما يلي:

إذا كان: $s = \sum_{k=0}^{n} 2^k$ و p عدداً أولياً مفرداً

---

(١٠٨) المصدر نفسه، القضية ١.

(١٠٩) انظر ما بعده.

(١١٠) ابن قرّه، القضية ٢.

(١١١) المصدر نفسه، القضية ٣.

(١١٢) المصدر نفسه، القضية ٥.

فإن: $\sigma_0(2^n s) = 2^n s$ إذا كان s عدداً أولياً

$\sigma_0(2^n p) > 2^n p$ إذا كان: $p < s$

$\sigma_0(2^n p) < 2^n p$ إذا كان: $p > s$

و $|\sigma_0(2^n p) - 2^n p| = |s - p|$

إذا كانت هذه القضية الأولى تعطي طريقة تسمح بتولّد الأعداد التامة الإقليدية والأعداد الزائدة والأعداد الناقصة، فالقضية الثانية تقدم طريقة أخرى لتولد الأعداد الزائدة والناقصة. وتكتب هذه القضية كما يلي[113]:

إذا كان: $p_1, p_2 > 2$ حيث p_1 وp_2 عددان أوليّان مختلفان

فإن $\sigma_0(2^n p_1 p_2) > 2^n p_1 p_2$ في حال أن $p_1 p_2 < (2^{n+1} - 1)(1 + p_1 + p_2)$

و $\sigma_0(2^n p_1 p_2) < 2^n p_1 p_2$ في حال أن $p_1 p_2 > (2^{n+1} - 1)(1 + p_1 + p_2)$

وهكذا يظهر من مذكرات ابن قرّة أن دراسة الأعداد المتحابة ليست فقط فصلاً من مجموعة فصول أكثر اتساعاً بل تتضمن تشكيل الأعداد الزائدة والناقصة والتامة، ولكنها تتطلب إضافة إلى ذلك تعميقاً للأبحاث حول خصائص القواسم الفعلية. ومن ثم بدأت تطل من وراء السطور محاور هذا البحث التي ما زالت مدفونة في الحساب التقليدي: تحليل العدد إلى عناصره وفي الوسائل التوافيقية التي إذا ما فرضت فبسبب اللجوء المتزايد إلى مفهوم العدد الأولي. فلقد اشتدت الضرورة أكثر من أي وقت مضى إلى التأكد من أن أعداداً معطاة هي أوليّة أم لا. هذا الاتجاه كما سنرى مع لاحقي ابن قرّة تطلب إعطاء مفهوم العدد الأولي مكاناً أكثر مركزية من ذلك الذي كان يحتله منذ القدم.

ب - إذا أبعدنا هنا الصفات الرمزية للأعداد المتحابة كي لا نأخذ في الإعتبار إلّا الصفات الرياضية، لا يسعنا إلّا أن نستنتج أن تاريخ هذه الأعداد يمتزج بتاريخ معرفة وتناقل مؤلف ابن قرّة[114]، وهو تاريخ سبق أن كان هزيلاً ويصبح أكثر هزالاً

---

(١١٣) المصدر نفسه، القضية ٦.

(١١٤) حصل ألبر (Euler) على تعميم لمبرهنة ابن قرّه حيث يفرض الأول أن:

$$a = 2^n - 1 + 2^{n-\alpha},\quad b = 2^n - 1 + 2^{n+\alpha},\quad c = (2^\alpha + 1)^2\, 2^{2n-\alpha} - 1$$

هي ثلاثية أعداد أوليّة، ومن الضروري أن يكون α عدداً أوليّاً كيما يكون α عدداً أوليّاً. من الواضح أن مبرهنة ابن قرّه تطابق حالة $\alpha = 1$. انظر: =

فيما لو طلبنا منه لأسباب متعددة أن يخلي المكان، وهو أمر دعا إليه بعض المؤرخين الذين، حسب زعمهم، لا بدّ أن مبرهنة ابن قرّة دفنت في طي النسيان إثر صاحبها وقد تم العثور عليها كما هي من قبل فيرما (Fermat) وديكارت (Descartes) كل منهما على حدة، وبالتالي كان لا بد من انتظار ترجمة ويبك (Woepcke) لها في القرن الماضي كي تكف هذه المبرهنة عن حمل اسم كل من فيرما وديكارت. وفقاً لوجهة النظر هذه، لا يمكن للبحث الذي بدأه ابن قرّة أن يكون فعالاً من الناحية الرياضية، طالما أنه كان منسياً وبالتالي لم يكن محرضاً لأي بحث كان.

إن وضعاً كهذا بدا مزعزعاً، فالدراسات التي كرست مؤخراً لبعض أعمال الرياضيين الذين كتبوا باللغة العربية واللاحقين لابن قرّة ككتاب **مفتاح الحساب** للكاشي (المتوفى ١٤٣٦/٧) أو كمثل كتيّب لأحد شرّاح ابن البنّاء (وفقاً لاحتمال أن يكون من القرن الرابع عشر كما سنرى). تشهد هذه المؤلفات أحدها كما الآخر، أنه خلال القرن الرابع عشر وكذلك خلال القرن الخامس عشر كان الرياضيون يعرفون مبرهنة ابن قرّة. لكن إذا ما توصلنا إلى إظهار أن الكاشي والشارح المذكور لا يشكلان حالات معزولة وأن انتقال هذه المبرهنة لم يتوقف اطلاقاً منذ تشكيلها، وأن انتشارها لم يقتصر على الرياضيين وحدهم لكنه طال الفلاسفة أيضاً، فلا يمكن لوجهة النظر هذه، المؤكدة لكسوف مبرهنة ابن قرّة إلاّ أن تنهار. ودون أن نزعم الشمولية إطلاقاً، وهو إدعاء خيالي في الحالة الراهنة لتاريخ الرياضيات العربية، يكفينا اختيار بعض المؤشرات ذات الدلالة، فنشير في كل مرة إلى أهمية الأبحاث المتعلقة بالأجزاء ذات القواسم التامة.

في النصف الثاني من القرن العاشر درس **أبو صقر القبيصي**[115] في بحث حسابي صغير الأعداد التامة وذكر قاعدة تشكيل الأعداد التامة الاقليدية ثم انتقل بعد ذلك إلى الأعداد المتحابة فأورد بخصوصها مبرهنة ابن قرّة. بعد بضعة عقود ظهرت

= Edouard Lucas, *Théorie des nombres* (Paris: Villars, 1958), pp.380-381.

يذكر أيضاً أن باغانيني (Paganini) وجد الزوج (1184,1210) الذي لا نستطيع أن نحصل عليه حسب طريقة ابن قرّة. انظر: Dickson, *History of the Theory of Numbers*, p.47.

(١١٥) انظر: «في جمع أنواع من الأعداد،» مخطوطات: «آيا صوفيا (٤٨٣٢)،» ص ٨٥ ـ ٨٨ (ظهر الأوراق). تغيب عن النص بضع جمل يبدو أن الناسخ قد نسيها. يشكل القابسي على التوالي:

$$p_n = (2^{n+1} - 1) + 2^n, p_{n-1} = (2^{n+1} - 1) - 2^{n-1}, q_n = 2^{n+1}(2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$$

دراستان أكثر أهمية بكثير من دراسة القبيصي، الأولى كانت للكرجي الجبري الشهير في نهاية القرن العاشر وقد ظهرت في كتابه **البديع في الحساب** والثانية كانت للحسابيّ أبي طاهر البغدادي (المتوفى سنة ١٠٣٧). الدراسة الأولى هي الوحيدة دون سائر النصوص المعروفة التي تسمح لنا بالاستدلال عن حالة البحث عن هذا الموضوع بعد ابن قرّة بقرن تقريباً. نعلم في الحقيقة، قبل أي درس، وبمجرد حضورها في **البديع** أن نظرية الأعداد المتحابة لم تكن تثير اهتمام الرياضيين من مرتبة الكرجي فقط بل كانت جديرة أيضاً بالظهور في عمل موجّه إلى الرياضيين المجرّبين. إلى هؤلاء على أية حال كرّس الكرجي كتابه **البديع** كما صرّح بنفسه(١١٦) وأفرد فصلاً منه لنظرية الأعداد المتحابة. يتألف هذا الفصل بشكل أساسي من قضيتين سابقتين لثابت بن قرّة ومبرهنته، وعلى أية حال، فقد أخذ الكرجي على نفسه أمر إعادة برهنة هاتين القضيتين بطريقة عامة حقاً أو حسب تعبيره الخاص بإعطاء «برهان شامل»(١١٧). بينما لم يتعدَّ الأمر مع ابن قرّة سوى برهان شبه عام أي معمّم مباشرة بعد تحققه في حالات $n = 2.3.4.5$ مثلاً. لقد استبعدت من هذا البرهان كل دعوة إلى تمثيل الأعداد بخطوط مستقيمة كرّست لتثبيت المخيلة. حتى وإن فشلت هذه المحاولة لأسباب تقنية(١١٨) فقط، يبقى على الأقل أن كتاب الكرجي رسّخ انتشار هذه المبرهنة لابن قرّة. وفيما يتعلق بالبغدادي فيبدو أنه في بحثٍ حسابي مهم هو **التكملة**(١١٩)، قد

---

(١١٦) أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي، كتاب البديع في الحساب، تحقيق عادل أنبوبا، الجامعة اللبنانية، قسم الدراسات الرياضية، ٢ (بيروت: الجامعة اللبنانية، ١٩٦٤)، النص العربي، ص ٧، وعنوان الفصل: **باب في ذكر طلب الاعداد المتحابة**، ص ٢٦ وما يليها.

(١١٧) المصدر نفسه، ص ٢٨.

(١١٨) يبدأ الكرجي بالاستناد إلى تعريف الأعداد المتحابة، باستنتاج القضية التالية: إذا كان الزوج (m, n) من الأعداد المتحابّة فمن الضروري أن يكون أحدهما ناقصاً (m مثلاً) والآخر زائداً (n مثلاً) وأن يكون: $m - \sigma_0(m) = \sigma_0(n) - n$.

ثم يبرهن القضيتين المعطاتين والمذكورتين سابقاً لابن قرّه، قبل أن يورد قضية يمكن كتابتها كما يلي: إذا كانت p_1, p_2, q ثلاثة أعداد أولية ومفردة بحيث إن:

$$q > s = \sum_{k=0}^{n} 2^k, \quad q - s = (1 + p_1 + p_2)s - p_1p_2$$

فإن $2^n q$ هو ناقص و $2^n p_1 p_2$ هو زائد، وإن $2^n p_1 p_2$ و $2^n q$ عددان متحابّان. ولكي يبرهن الكرجي أن $2^n q$ و $2^n p_1 q_1$ هما متحابان، يستخدم كشرط كافٍ الشرط الضروري الذي تعطيه القضية السابقة.

(١١٩) البغدادي، «التكملة في الحساب».

استخلص نتائج الأبحاث حول أجزاء القواسم التامة لعصره، وينتظم بحثه وفقاً للمخطط التالي: إنه يبدأ بذكر تعريفات لمختلف أنواع الأعداد، وخاصة الأعداد الزائدة والأعداد الناقصة وكذلك الأعداد التامة التي يورد بعض خصائصها، ثم يُدخل عندئذ الأعداد المتعادلة ليستنتج أخيراً الأعداد المتحابة. هذا البحث الذي لم ينشر بعد يقدم الدليل على أن رياضيّي تلك المرحلة كانوا يعرفون الكثير من القضايا المنسوبة بالإجماع إلى رياضيين متأخرين. وهكذا مثلاً عندما يذكر البغدادي النتيجة التي جرت العادة على نسبتها إلى باشيه دي مزرياك (Bachet de Méziriac) وهي: أن أصغر عدد زائد مفرد هو 945[120]، فهو من جهة أخرى وأثناء دراسته للأعداد التامة يطعن في تأكيد ظهر سابقاً عند نيقوماخوس الجرشي (Nicomaque de Gérase) وكُرّر في القرن السادس عشر، وهذا ما كتبه: «وقد غلط من قال في كل عقد من العقود عدد واحد تام، وأصاب من قال كل عدد تام لا بد من أن يكون في أوله ستة أو ثمانية»[121]. ثم يذكر بعد ذلك القاعدة التي ذكرها إقليدس حول تشكيل الأعداد التامة قبل أن يقترح قاعدة أخرى معادلة لها يدّعي اكتشافها وتكتب كما يلي:

إذا كان: $\sigma_0(2^n) = 2^n - 1$ عدداً أوليا

فإن: $1 + 2 + \dots + (2^n - 1)$ هو عدد أوليّ

أو على حد تعبيره «وقد استبطنا له طريقا آخر وهو أن أجزاء زوج الزوج إذا كانت أوليّة فمجموع آحادها من الواحد إليها يكون تاما»[122]. وهكذا عوضاً عن اللجوء إلى المتتاليات الهندسية يكفي استخدام المتتاليات الحسابية لتشكيل الأعداد التامة الإقليدية. وعدا هذه النتيجة المتعارف على نسبتها إلى رياضي من القرن السابع عشر هو بروسيوس (J.Broscius)[123] فإن البغدادي يعرض منها بعض النتائج الأخرى الأقل أهمية[124] وينهي بحثه مع الأعداد المتحابة التي يطبّق عليها متغيرة بسيطة من مبرهنة ابن قرّة. إضافة إلى ما سبق فإن هذه المبرهنة تبدو وكأنها تنتمي إلى المعرفة الأوليّة في الحساب في ذلك العصر لأننا نجدها لدى مؤلف متوف في السنة نفسها التي توفي فيها البغدادي

---

(١٢٠) المصدر نفسه، يكتب البغدادي: «وأول عدد <زوجي> زائد اثنا عشر وكل فرد دون تسعماية وخمسة وأربعين ناقص، وأول فرد زائد تسعماية وخمسة وأربعين».

(١٢١) المصدر نفسه.

(١٢٢) المصدر نفسه.

(١٢٣) Dickson, *History of the Theory of Numbers*, pp.13-14

(١٢٤) الأعداد التي هي على شكل 2^n، ليست أعداداً تامة، لأنّ: $\sigma_0(2^n) = 2^n - 1$.

حسب كتاب الحساب الخاص بالمؤلّف الفلسفي الشهير لإبن سينا الشفاء[125].

إن معظم النتائج المذكورة سابقاً قد ظهرت لاحقاً بعد قرنين من الزمن في الأبحاث المكرّسة للتعليم. ففي بحث من النصف الأول للقرن الثالث عشر يستعيد الزنجاني (الذي عاش حتى ١٢٥٧) بالتعابير نفسها تقريباً نتائج البغدادي ويلامس مسألة الأعداد الجزئية التضعيف (Sous-doubles) ويعطي هو أيضاً مبرهنة ابن قرّة حول الأعداد المتحابة[126]. على أية حال فقد جرت المحاولة الأكثر أهمية لإعادة إثبات هذه المبرهنة في نهاية القرن الثالث عشر وبداية القرن الرابع عشر على يد كمال الدين الفارسي المتوفى عام ١٣٢٠ والذي سوف نعود إليه مطوّلاً. ويمكننا أن نضيف أيضاً إلى هؤلاء الرياضيين التنوخي[127] الذي عاش في القرنين الثالث عشر والرابع عشر وشارح

---

(١٢٥) أبو علي الحسين بن عبدالله بن سينا، الشفاء: الطبيعيات، تحقيق ع. ل. مظهر (القاهرة: الهيئة المصرية العامة للكتاب، ١٩٧٥)، ص ٢٨. فإذا صححنا قراءة الطبعة، فإن نص ابن سينا يتوضّح ويصبح كما يلي:

إذا كانت $(2^{n+1} - 1)$ و p_{n-1} و p_n أعداداً أولية، فإن: $2^n p_{n-1} p_n$ و $2^n(p_{n-1} + p_n + p_{n-1}p_n) = 2^n q_n$ هي متحابّة.

فإذا أضفنا الشرط: q_n هو أوليّ، فإننا نجد مبرهنة ابن قرّة مع الشرط الزائد: $(2^{n+1} - 1)$ هو أولي.

(١٢٦) الزنجاني، «عمدة الحساب،» ص ٦٩ (وجه الورقة). الحقيقة ان الزنجاني هو مجمّع، وبحثه الذي لم تتم دراسته بعد خير شاهد عما يمكن أن يكون عليه مثقف مطّلع على حساب النصف الأول من القرن الثاني عشر. ونورد مع ذلك ما كتبه: «إن كل عدد تام زاد على الستة فهو زوج الزوج والفرد».

أهي طريقة تنقصها المهارة للتأكيد على أن كل عدد تامّ مزدوج يكون على الشكل الإقليدي؟ من المرجح على أية حال أن رياضييّ تلك الحقبة قد اهتموا بتشخيص الأعداد التامّة كما يشهد بذلك التأكيد السابق على الأقل. وصحيح كذلك أنهم قد اهتموا بحساب الأعداد التامّة، إذ تبيّن إشارات عديدة وردت في الأبحاث المتأخرة أنهم قد حسبوا أعداداً تامّة أخرى غير تلك التي أعطاها نيقوماخس الجرشي، كالعدد التامّ الخامس مثلاً، ص ٦٨ (ظهر الورقة).

(١٢٧) انظر: زين الدين التنوخي، «بحثه في الحساب،» مخطوطات: «الفاتيكان (٣١٧/٢)،» ص ٧٨، و

Rushdi Rashed, «Matériaux pour une histoire des nombres amiables,» *Journal for History of Arabic Science,*

وحسب عمر رضا كحالة، معجم المؤلفين: تراجم مصنفي الكتب العربية، ١٥ ج في ٥ (دمشق: مطبعة الترقي، ١٩٥٧ - ١٩٦١)، ج ٦، ص ٢٨٦، فإن التنوخي هو لغوي عاش في القرن الثالث عشر.

ابن البنّاء[128] وكذلك الأموي[129]. وبدءاً بالقرن الخامس عشر يمكننا أن نذكر الكاشي[130] وشرف الدين اليزدي[131] ومحمد باقر اليزدي[132] ويمكننا أن نضيف إلى هؤلاء الكثير. إن اختلافهم الزمني والجغرافي يشهد بما يكفي على الانتشار الذي لم ينقطع لهذه المبرهنة وانتقالها المتواصل وما يعنينا هو هل ظلّ هذا التقليد مجهولاً من قبل رياضيي أوروبا؟ إن احتمالاً كهذا رغم قلة رجحانه يبقى ممكناً طالما أننا لا نملك أي دليل

(١٢٨) المقصود في الواقع نص هام اثبته: سويسي، وكتيب لابن البنّاء المغربي حول الأعداد التامّة والزائدة والناقصة والمتحابة، في:

Mohammed Souissi, «Opuscule d'Ibn al-Banā' du Maroc sur les nombres parfaits, abondants, déficients et amiables,» *Annales de la faculté des lettres de l'université de tunis*, no.3 (1976), pp.193-209.

واعطى سويسي ترجمة لهذا النص في:

International Congress of Mathematical Sciences (Pakistan: Hamdard National Foundation, 1975).

على الرغم من ذلك، لا شيء يسمح بأن ينسب هذا النص بصورة أكيدة إلى ابن البنّاء. إن مقارنة بين نصين لابن البنّاء «تلخيص أعمال الحساب» و«رفع الحجاب» من جهة ودراسة للنص نفسه من جهة أخرى تبدوان وكأنهما تشيران على الأرجح إلى كتيّب لشارح لابن البناء وهو ابن هيدور (المتوفى عام ١٤١٣)، ويبقى أن اسمه قد ذكر في كتيب آخر من المجموعة نفسها التي تنتمي إليها هذه الدراسة عن الأعداد المتحابّة، وهي فرضية لم يستبعدها سويسي عندما اطّلع على رسالة أرسلناها له لشرح هذه الفرضية منذ وقت قريب. ويبدو على الأرجح إذن أن الأمر يتعلق بنصّ كتب في مرحلة متأخرة من القرن الرابع عشر وأن كاتبه يعطي نتيجة معروفة أكثر من كونها مكتسبة حديثاً.

(١٢٩) يعيش بن ابراهيم الأموي، **مراسم الانتساب في علوم الحساب**، تحقيق أحمد سليم سعيدان، مصادر ودراسات في تاريخ الحساب العربي، ٢ (حلب: [د.ن.]، ١٩٨١)، ص ٣٤. الأموي هو رياضي من القرن الرابع عشر، يضيف في صياغته لمبرهنة ابن قرّه الشرط نفسه الذي أضافه ابن سينا وهو أن يكون العدد $(2^{n-1} - 1)$ أوليّاً.

(١٣٠) غياث الدين جمشيد الكاشي، **مفتاح الحساب**، تحقيق ن. النابلسي (دمشق: [د.ن.]، ١٩٧٧)، ص ٤٨٤ وما يليها. يعيد الكاشي في هذا النص إعطاء مبرهنة ابن قرّة لكنه ينسى أن يذكر أن q_n يجب أن يكون أوليّاً، وقد لاحظ لاحق الكاشي، محمد بكر اليزدي هذا الخطأ وذكر بأنه قاد إلى خطأ آخر، فقد اعتبر الكاشي أن 2024 و2296 هما عددان متحابّان ولم ينتبه إلى غلطته لأنه أخطأ مرة ثانية في ذكره القواسم الفعلية للعدد 2296 وبعد الكاشي أخطأ شرف الدين اليزدي هو أيضاً في كتابه **كنه المراد في علم الوفق والأعداد**، حسب محمد بكر اليزدي.

(١٣١) شرف الدين اليزدي، انظر الملاحظة نفسها في الهامش السابق.

(١٣٢) انظر: محمد بكر اليزدي، **عيون الحساب**، و

Rashed, «Matériaux pour une histoire des nombres amiables».

واضح. ويقل أكثر إذا أخذنا بالاعتبار إضافة إلى ذلك أن الكاتب المقصود كان معروفاً في أوروبا بسبب العديد من أعماله في الفلك وعلم الميكانيك. وبمعزل عن هذا التقليد أم لا، فإن فيرما وديكارت يذكران كل بدوره هذه المبرهنة نفسها بين عامي ١٦٣٦ و١٦٣٨. وهذه المرة كما عند الرياضيين العرب على السواء يرتبط البحث في الأعداد المتحابة بمظهر تأخذ فيه الأعداد التامة والأعداد الجزئية المضاعفة والأجزاء ذات القواسم التامة حيّزاً واضحاً. من المهم في هذا المجال إذن معرفة المسافة التي تفصل رياضيي القرن السابع عشر عن سابقيهم العرب كي يمكن أن يقدر بدقة دور هذا البحث في تاريخ نظرية الأعداد انطلاقاً من فيرما. وكما نعلم فإن الأعمال الأولى لهذا الأخير مكرّسة بشكل أساسي لدراسة الأعداد الجزئية التضعيف ولعدد أجزاء القواسم التامة للعدد الطبيعي والأعداد المتحابة، وهو استنتاج يرجع لفحص منهجي لمراسلاته بين عام ١٦٣٦ وشهر آب من عام ١٦٣٨، ومن مقاطع لمرسين (Mersenne) ممهورة بختم فيرما. ففي المقدمة العامة من «التناغم الشامل» (Harmonie Universelle) (١٦٣٦) يعطي مرسين الزوج المرتّب من الأعداد المتحابة الذي يحمل اسم فيرما، وفي الجزء الثاني من المؤلف نفسه (١٦٣٧) وفي مقطع معروف أيضاً يعرض مرسين مبرهنة ابن قرّة التي يحتمل جداً أن يكون قد أخذها عن فيرما. فقد كتب هذا الأخير لمرسين في ٢٤ حزيران / يونيو ١٦٣٦: «لقد أرسلت منذ وقت طويل قضية الأعداد ذات أجزاء القواسم التامة إلى السيد بوغران (Beaugrand) بالإضافة إلى الصياغة الخاصة بإيجاد أعداد لا متناهية من الطبيعة نفسها، فهو لا بدّ سيطلعك عليها إن لم يكن قد أضاعها»[١٣٣]. وفي ٢٢ أيلول/ سبتمبر من السنة نفسها كتب إلى روبيرڤال (Roberval) يقول: «وكذلك أيضاً وبهذه الطريقة وجدت أعداداً لا متناهية تفعل الشيء نفسه الذي تفعله الأعداد ٢٢٠ و٢٨٤ أي أن اجزاء الأول تساوي الثاني وأجزاء الثاني تساوي الأول»[١٣٤].

وفي ٣١ آذار/ مارس سنة ١٦٣٨ أعطى ديكارت بدوره المبرهنة نفسها في رسالة موجهة إلى مرسين[١٣٥] حيث يرفق الرسالة بهذا التعليق: «ما عليّ سوى إضافة البرهان هذا، لأنني أوفر الوقت، وكهادة للمسائل يكفي إعطاء طريقة العمل لأنه بإمكان الذين اقترحوه أن يتحققوا ما إذا كان حلّه جيداً أم لا». لا يبدو على أية حال، أن فيرما وديكارت

---

(١٣٣) Paul Tannery et Ch. Henry, *Oeuvres de Fermat* (Paris: [s.pb.], 1894), vol.2, p.20.

(١٣٤) المصدر نفسه، ص ٧٢.

(١٣٥) C. De Waard, *Correspondance du Pére Marin Mersenne* (Paris: [s.pb.], 1962), vol.7, p.131.

قد أبديا شكوكاً أكثر من سابقيهم العرب حول واقع أن مبرهنة ابن قرّة تقبل حلولاً لا متناهية أو كما كتب ديكارت أن هذه القاعدة «تحتوي على اللانهاية من الحلول»(١٣٦). وكما ذكرنا فإن أعمال ديكارت وفيرما أثناء تلك السنين كانت تطال الأعداد الجزئية التضعيف والأعداد ذات القواسم التامة والأعداد المتحابة، فإذا استبعدنا مؤقتاً دراسة الأعداد ذات القواسم التامة واكتفينا بالأعداد المتحابة لاحظنا أن كلاً من الرياضيّين قد عثر فقط على مبرهنة ابن قرّة دون أن يبرهنها. ومع ذلك فإن مساهمات القرن السابع عشر بدت بالنسبة إلى بعض المؤرخين وكأنها تنشيط لنظرية الأعداد. صحيح أننا نجد دراسة للدالتين الحسابيتين الأوليتين، لكن من جهة أخرى فإنّ الطرق التي لجأ إليها كل من فيرما وديكارت في هذه الأعمال هي جبرية أكثر منها حسابية. ولكن إذا ما نظرنا من جديد إلى المسافة الفاصلة بين هذين الرياضيّين وسابقيهم العرب لتحدد سؤالنا عندها: في أية لحظة أخذ هذا التجديد انطلاقته ولأي أسباب؟ أو بصورة أدق: في أية لحظة ولماذا تمّ استدعاء الطرق الجبرية في نظرية الأعداد الإقليدية؟ قبل معاودة هذا الاستعلام لنبدأ بدرس الكيفية التي طبّقت فيها مبرهنة ابن قرّة على حساب أزواج الأعداد المتحابة.

ج - يمكننا توقع أن مبرهنة ابن قرّة هي التي دفعت الرياضيين إلى مضاعفة حسابات الأعداد المتحابة بقدر ما أضفي على هذه الأعداد من مزايا اجتماعية ونفسية. لكن شيئاً من هذا لم يحصل، إذ إننا في الواقع وحتى أولير (Euler) لم نكن نعرف من هذه الأعداد سوى ثلاثة أزواج: الأول [220،284] وهو من أصل غامض لكنه وجد مع جمبليك (Jamblique)(١٣٧) الذي ينسبه بنفسه إلى فيثاغورس، أمّا ثابت بن قرّة فلم يكن يحاول الذهاب أبعد من ذلك في حسابه، ويحمل الزوجان الآخران [17296،18416] و[9363584،9437056] على التوالي اسمي كل من فيرما وديكارت

---

(١٣٦) المصدر نفسه، ص ١٣٢. لا نعرف حتى الآن إذا كان عدد الأزواج (m,n) من الأعداد المتحابة لا نهائياً حتى وإن اعتقدنا بذلك. وتتلخص الحالة الراهنة (عام ١٩٨١) كما يلي: لنشر بـ $A(x)$ إلى عدد الأزواج (m,n) حيث $x > n > m$، لقد خمّن أردوس (Erdös) أن:

$$A(x) = o(x/(\ln x)^k) \quad \text{لمطلق } k$$

وأكد بومرنس (Bomerance) أن: $A(x) \leq x \exp\{-(\ln x)^{\frac{1}{3}}\}$

انظر: Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, vol.1 (New York: Springer, 1980), vol.1, pp.31-33.

(١٣٧) Jamblique, *In Nicom. Introd.*

اللذين جرت العادة على نسبة أول حساب إليهما. ولقد بينا حديثاً أن الزوج المنسوب إلى فيرما كان قد تم حسابه في نهاية القرن الرابع عشر من قبل شارح لابن البنّاء(١٣٨). ونود أن نبين هنا أن حسابه قد تمّ قبل قرن على الأقل، أي قبل سنة ١٣٢٠ وصار بعد ذلك معروفاً من قبل العديد من الرياضيين، أمّا فيما يتعلق بالزوج الذي يحمل اسم ديكارت فسنرى أنه هو أيضاً كان معروفاً قبل أعمال هذا الفيلسوف. لكن أبعد من هذا السؤال المتعلق بالأسبقية التاريخية يُطرح سؤال أكثر أهمية بكثير وهو يتعلق بالتقنيات التي بفضلها تشكّل السؤال. لهذا سنهتم بالوسائل التي استخدمت في حساب الأعداد المتحابة.

في مذكراته التي أوردنا نصّها في مكان آخر(١٣٩)، لا يكتفي الفارسي بإعطاء حساب زوج «فيرما» لكنه يفرض أيضاً تعليلاً كاملاً لهذا الحساب. إنه يبدأ بـ $n = 4$ إذن $p_3 = 23$، $p_4 = 47$، $q_4 = 1151$ ويبين بعد ذلك بواسطة عدة قضايا من بينها غربال ايراتوستين (Crible d'Eratosthène) أن 1151 هو أولي أما العددان 23 و47 فمن الواضح أنهما أوليان، ثم يطبق المبرهنة فيحصل على زوج «فيرما» ثم يكتب:

«فنستخرج أجزاء الأول مجملاً، وهما ١٦ ١٠٨١ ، فأجزاء الأول مجملاً ١٥ ، وأجزاء الثاني كذلك ٧١ . ثم نضرب أجزاء الأول ـ وهو ١٥ ـ في الثاني مع أجزائه ـ أعني ١١٥٢ ـ يكون ١٧٢٨٠ ؛ ثم نضرب الأول ـ وهو ١٦ ـ في أجزاء الثاني ـ وهو ٧١ ـ يصل ١١٣٦ . فإذا زيد على الحاصل، بلغ ١٨٤١٦ ، وهو أعظم المتحابين».

ويتابع:

«وكذلك نستخرج أجزاء الثاني بتعرُّف أجزاء ضلعيه، وهما ١٦ ١١٥١ . فأجزاء الأول ١٥ ، وأجزاء الثاني واحد. فنضرب أجزاء الأول في الثاني، بتعرف أجزاء ضلعيه مع الواحد، أعني ١١٥٢ يحصل ١٧٢٨٠ ، ثم نضرب الأول ـ أعني ١٦ ـ في أجزاء الثاني، يكون ١٦ ، فنزيده على الأول، يحصل ١٧٢٩٦ »(١٤٠).

لكي يبرهن أن زوج فيرما هو حقاً زوج من الأعداد المتحابة يجري الفارسي كما رأينا الحساب التالي:

---

(١٣٨) Souissi, «Opuscule d'Ibn al-Banā' du Maroc sur les nombres parfaits, abondants, déficients et amiables,» p.202.

(١٣٩) Rashed, «Matériaux pour une histoire des nombres amiables».

(١٤٠) المصدر نفسه، الفقرة ٢٧.

$$\sigma_0(17296) = \sigma_0(2^4 \cdot 23 \cdot 47) = \sigma_0(2^4)\,\sigma(23 \cdot 47) + 2^4\sigma_0(23 \cdot 47)$$
$$= 15(71 + 1081) + 16 \cdot 71 = 18416$$

ومن جهة أخرى:

$$\sigma_0(18416) = \sigma_0(2^4 \cdot 1151) = \sigma_0(2^4)\,\sigma(1151) + 16\sigma_0(1151)$$
$$= 15 \cdot 1152 + 16 = 17296$$

يجري الفارسي عمله إذن على دالّة مجموع الأجزاء ذات القواسم التامّة لعدد ما بمساعدة خصائص لهذه الدالّة أثبتها من قبل، وهـذا يعطينـا لمحة عن المسـافة التي تمّ اجتيازها منـذ ثابت بن قـرّة. ويبدو عـلى أية حـال أن حساب هـذا الزوج نفسـه كان معروفاً من الرياضيين لأننا نجده مرتين على الأقل وحتى إشعار آخر في نصوص ظاهرة التوجه لغاية تعليمية، النص الأول هو لشارح ابن البنّاء(١٤١) الذي ذكرناه سابقاً والثاني كـان مجهولاً حتى الآن وهـو للتنوخي(١٤٢). وفي كـلا الحالتـين نجد أنفسنـا في مواجهـة تطبيق مباشر لمبرهنة ابن قرّة ولكن دون التعليل بـواسطة دالـة المجموع. ومهـما يكن من أمر، فإن حضور هذا الحساب في نصوص أقل تقدماً بكثير على الصعيد الـرياضي من مذكرات الفارسي يسمح بالتأكيد دون مجازفة أن هذا الزوج يشكل جزءاً من ملك مشترك بين رياضيي القرن الرابع عشر.

أما بالنسبة إلى حساب زوج ديكارت فالحالة مختلفـة، إذ إن رياضيـاً من بدايـة القـرن السابـع عشر هو اليـزدي ينسب إلى نفسه هـذه النتيجة. ففي مؤلفـه الحسـابي الواسع الانتشـار، كما يشهـد بذلـك عدد المخـطوطات التي وصلتنـا(١٤٣) بهذا الشـأن، وبعد أن يورد بصورة مكافئـة مبرهنـة ابن قرّة، ينـظر في الحالـة $n = 7$، $p_6 = 191$، $p_7 = 383$، $q_7 = 73727$ ويحصل على زوج ديكارت. وحسب تعبيره فهو يقول:

---

(١٤١) Souissi, «Opuscule d'Ibn al-Banā' du Maroc sur les nombres parfaits, abondants, déficients et amiables».

(١٤٢) حسب تواريخ التنوخي، القرن الثالث عشر، يبدو أن حسـاب زوج أعداد فـيرما كـان معروفاً قبل الفارسي، وليس بالطريقة نفسها بالتأكيد، غير أن النتيجة كانت معـروفة عـلى الأقل قبـل العام ١٣٠٧.

(١٤٣) تـوفي اليزدي حـوالى ١٦٣٧. ولقد احصينـا بأنفسنـا عدداً كبـيراً من نسـخ مخـطوطتـه المنتشرة في مختلف مكتبات العالم مما يدلّ على مدى انتشارها.

«مثاله: وجدنا ١٩٢ و٣٨٤ المتواليين من تلك السلسلة $\langle (6.2^k)_{k\geqslant 1}\rangle$ صالحين لذلك، وبعد نقصان الواحد من كل يبقى ١٩١ و٢٨٣ الأولان، ومسطحهما ٧٣١٥٣ الفرد الثالث ـ ومجموع الأفراد الثلاثة ٧٣٧٢٧، وهو فرد أوّل، وكان ثلث الأكثر ١٢٨، ضربناه في العدد الفرد الثالث، حصل أقل المتحابين وهو ٩٣٦٣٥٨٤، ثم ضربناه في مجموع الفردين الأولين، وهو ٥٧٤ حصل ٧٣٤٧٢، زدناه على الحاصل الأول، حصل ٩٤٣٧٠٥٦ وهو أكثرهما»[١٤٤].

ثم يعطي اليزدي الجدول رقم (٤ ـ ١) التالي الذي يلخص حساب الأجزاء ذات القواسم التامّة:

جدول رقم (٤ ـ ١)

أجزاء القواسم التامّة للعدد الأصغر				أجزاء القواسم التامّة للعدد الأكبر	
الوحدة $[2^n]$	أول مفرد $[p_6]$	ثاني مفرد $[p_7]$	ثالث مفرد $[p_6 \cdot p_7]$	الوحدة $[2^n]$	مجموع الأعداد المفردة $[p_6 + p_7 + p_6p_7 = q_7]$
1	191	383	73153	1	73727
2	382	766	146306	2	147454
4	764	1532	292612	4	294908
8	1528	3064	585224	8	589816
16	3056	6128	1170448	16	1179632
32	6112	12256	2340896	32	2359264
64	12224	24512	4681792	64	4718528
128	24448	49024	9363584	128	9437056

يمكننا أن نرى أن مبرهنة ابن قرّة، البعيدة عن النسيان، كانت لا تزال حيّة في نهاية القرن الخامس عشر، فضلاً عن ذلك، فإن أزواج الأعداد المتحابة التي جرت العادة على نسبتها إلى رياضيي القرن السابع عشر سبق أن كانت معروفة منذ وقت طويل. وبصورة أعم، فإن نتائج عديدة على علاقة بهذه الأعداد وبالأعداد التامّة وبدراسة الأجزاء ذات القواسم التامّة، نُسب اكتشافها إلى رياضيين متأخرين كانت قد برهنت سابقاً من قبل سابقيهم العرب. لكن مهما كانت أهمية هذه النتائج فقد أغفل الأساسي منها كما سبق وقلنا، أي دراسة الدوال الحسابية الأولية في القرن الثالث عشر وما سبقها من إدخال للطرائق الجبرية في نظرية الأعداد. كان تدخّل

(١٤٤) فيما يتعلق بهذا النص، انظر:
Rashed, «Matériaux pour une histoire des nombres amiables».

الطرائق الجبرية قد لوحظ من قبل الرياضيين العرب المتأخرين، فقد ذكر أحدهم في معرض تصويره لتاريخ الأعداد المتحابة أن هناك طرقاً عديدة لتحديدها منها: «ما ذكره ثابت بن قرّة الحراني بطريق الهندسة وأقام البراهين عليها، ومنها ما ذكره أبو الوفاء محمد بن محمد البوزجاني، ومنها ما ذكره أبو الحسن علي بن يونس المصري، ومنها طريق استخراجها بالجبر والمقابلة»(١٤٥). وإذا كنا للأسف لم نعثر حتى الآن على نصوص هذين الرياضيين الأخيرين، فإن بحث الفارسي يعطينا بإسهاب الوسائل لاستعادة هذه المسألة الخاصة باستخدام الطرائق الجبرية في النظرية الإقليدية للأعداد.

٢ ـ الدراسة الجديدة للأجزاء ذات القواسم التامة: الفارسي

المبرهنة الأساسية في الحساب، الدوال الحسابية الأولية، الأعداد الشكلية

أ ـ إن هدف كمال الدين الفارسي المعلن في بحثه عن الأعداد المتحابة(١٤٦) واضح جداً، وهو إعادة إثبات برهان نظرية ابن قرة وفق منهج مختلف. لقد قصد في الواقع تأسيس هذا البرهان الجديد استناداً إلى معرفة منهجية لقواسم العدد الطبيعي والعمليات التي يمكن تطبيقها عليها. إن مشروعاً كهذا سيقوده في الحقيقة إلى إعادة تنظيم جذرية لهذا الفصل من نظرية الأعداد. وهكذا فقد راح الفارسي في سعيه هذا، ليس فقط إلى تغيير محصور على الأقل في الحساب الإقليدي، بل إلى إيجاد مواضيع جديدة في نظرية الأعداد أيضاً. ولكي تصبح دراسة كهذه ممكنة، كان عليه تعميق ما كان ابن قرّة قد لامسه وخاصة التحليل إلى عوامل والطرق التوافيقية. كان من الضروري إذن التثبت من وجود ووحدانية تحليل عدد طبيعي إلى عوامله ليتمكن بعد ذلك من إدخال الطرق التوافيقية ومعرفة عدد القواسم أو القواسم الفعلية بدقة. المقصود بالتالي الانطلاق بدراسة جديدة للدوال الحسابية الأولية. ليس من المستغرب

---

(١٤٥) يقصد به البحث الأول لمحمد بن الحسن بن ابراهيم العطار الاسعردي، «اللباب في الحساب،» مخطوطات: «Marsh 663 (10) Bodleian,» 238ᵛ.

(١٤٦) عنوان رسالة الفارسي هو: «تذكرة الأحباب في بيان التحاب». يشدد المفهرسون القدماء على أهمية هذا النص الذي كان مفقوداً حتى عهد قريب. ونورد مثلاً واحداً للدلالة على ذلك، حيث يكتب طاش كبرى زاده: «وأما طريق استخراج الأعداد المتحابّة فقد بُيّن مستوفى ببراهين عددية في كتاب تذكرة الأحباب في بيان التحاب. وهذا كتاب نفيس، يدل على فضل مؤلفه، وعلو كعبه في العلوم الرياضية، يشهد بذلك كتابه المذكور». لقد اثبتنا أن هذا النص هو للفارسي، وسوف نرجع من الآن فصاعداً إلى: Rashed, Ibid.

عندها أن بحث الفارسي ينفتح على ثلاث قضايا مكرّسة بوضوح لإيراد وإثبات ما دعي بعد ذلك بوقت طويل بمبرهنة الحساب الأساسية.

القضية (١)

«كلُّ مؤلف، فإنه لا بد وأن ينحلّ إلى أضلاع أوائل متناهية، هو متألف من ضرب بعضها في بعض»[١٤٧].

يلخص برهان الفارسي كما يلي:

ليكن a عدداً طبيعياً (حيث $a > 1$) وله قاسم أولي b. بناءً على VII-13 من كتاب **الأصول** فإن a يكتب: $a = bc$ حيث $1 \leqq c < a$.

فإذا كان c عدداً أولياً فالقضية تعتبر مثبتة، وإلاّ كان لـ c قاسم أولي d بحيث:

$$c = de \quad \text{حيث} \quad 1 \leqq e < c$$

فإذا كان e عدداً أولياً يصبح لدينا: $a = bde$ والقضية تعتبر أيضاً مثبتة.

وإلاّ، فإننا نكرر الطريقة نفسها لعدد منته من المرّات حتى نصل إلى عدد أولي k بحيث: $a = bde \ldots k$

يكتب الفارسي: «وإن لم ينحلّ إلى ضلعين أولين أبداً، لزم تأليف المتناهي من ضرب المتناهي من ضرب أعداد غير متناهية، بعضها في بعض، وهو محال»[١٤٨].

وهكذا بعد أن يبرهن وجود تحليل بعدد منته من العوامل الأولية يحاول الفارسي بطريقة غير موفقة أن يثبت وحدانية التحليل عبر إثبات القضيتين التاليتين:

القضية (٢)

«إذا كان a و b عددين طبيعيين بحيث ينحل كل منهما إلى العوامل الأولية المتمايزة نفسها: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ فإن a و b متماثلان»[١٤٩]. يعني الفارسي بـ «عددين متماثلين»، كما كان يعني معاصروه، أن العددين معتبران كمقدارين نسبتهما تساوي الوحدة. إن مفهوما كهذا للتماثل يبدو وكأنه يعود إلى نسبة تمثيلين هندسيين كامنين وراء العددين الطبيعيين بخطوط مستقيمة، وقد حافظ هذا المفهوم المرتبط مباشرة بحساب إقليدس على بقائه

(١٤٧) الفارسي، المصدر نفسه، الفقرة الأولى.
(١٤٨) المصدر نفسه.
(١٤٩) المصدر نفسه، الفقرة ٤.

بعد الفارسي حيث تمثل الأعداد الطبيعية بخطوط مستقيمة، لأنه ظل موجوداً حتى مع أولير (Euler). في جميع الأحوال، يكون a وb متماثلين إذا كان a يساوي من b عدد المرّات نفسه الذي يساوي b من a. هذه الهيمنة للتمثيل الهندسي لم تسهل إطلاقاً صياغة الفارسي لبرهان الوحدانية. يعلّل الفارسي بعد ذلك، دون أن يثبت بالفعل، نفي القضية السابقة.

القضية (٣)

إذا كان a و b عددين طبيعيين غير متماثلين فإن تحليلهما إلى عوامل أولية يختلف إن بعدد العوامل أو بتعددية كلّ عامل منها[١٥٠].

إن هاتين القضيتين الأخيرتين مكرّستان بداهة لإقامة وحدانية التحليل إلى عوامل أولية. لكن من الواضح مع ذلك أنهما لا تكفيان لإيصال الفارسي إلى غايته، إذ كان عليه أن يورد ويثبت عكس القضية (٣) ومن المستغرب حقاً أن يسلك هذه الوجهة. ويدهشنا أيضاً أنه لم يتبع مطلقاً ما تشير إليه القضية IX-14 من كتاب **الأصول** الذي يعرفه جيداً، إضافة إلى أن ابن قرّة سبق أن استعمله في بحثه عن الأعداد المتحابة. وهكذا نرى كيف تبدو صياغة الفارسي لمبرهنة الحساب الأساسية ومحاولة إثباتها. ومهما كانت النواقص في مساهمة الفارسي، فإن هذه المساهمة، تبقى مع ذلك النسخة الأولى المعروفة حتى الآن للمبرهنة الشهيرة. وسواء أكان الفارسي هو المبتكر لهذه المبرهنة أم لا فهذا غير مهم. المهم بالمقابل هو تلك العلاقة الحميمة التي توحّد الدراسة المنهجية لقواسم عدد طبيعي ـ مجموعها وعددها ـ وإعداد هذه المبرهنة الذي يمثّل بالطبع ليؤسس هذه الدراسة بحد ذاتها. إذا كان الأمر كذلك سنفهم دون عناء كيف أن مبرهنة الحساب الأساسية غابت من كتاب **الأصول** لإقليدس في حين ظهرت في هذا المؤلف جميع الوسائل الضرورية لصياغتها وإثباتها. وهنا بالضبط تكمن نقطة مهمة من تاريخ الرياضيات هي موضوع كثير من المجادلات.

صحيح أنه من بين المبرهنات الكبرى، هناك القليل مما يملك تاريخاً بهزالة تاريخ مبرهنة الحساب الأساسية. وإذا ما استثنينا الفارسي الذي أدخلناه الآن، فإن هذا التاريخ يقتصر على الإشارة إلى حضوره في «الأبحاث الحسابية» لـ غوس

(١٥٠) المصدر نفسه، الفقرة ٥.

(Gauss)[١٥١]، وفيما يتعلق بمعرفة ما إذا كانت هذه المبرهنة معروفة من قبل، فلم يكن لهذا السؤال سوى جواب وحيد هو تعارض التفسيرات. أمّا مصدر هذا التعارض فكان تعليقاً لـ هيث (Th.Heath)[١٥٢] على القضية IX-14 من كتاب **الأصول** التي تكتب: «إذا كان عدد ما هو أقل عدداً بعدّه أعداداً أولية، فلا يعدّه أيّ عدد أولي آخر غير هذه الأعداد التي تعدّه». وبعبارة أخرى إن المضاعف المشترك الأصغر لأعداد أولية لا يقبل قواسم أولية إلّا تلك الأعداد. لقد اعتقد هيث أن بإمكانه التعرف في هذه القضية إلى مبرهنة الحساب الأساسية الشهيرة. هذا التفسير من قبل هذا المؤرخ البارز لم يكن موضوع نزاع من قبل لاحقيه فقط بل من قبل سابقيه أيضاً أي حتى قبل أن يصاغ، إذا جاز التعبير. لقد رأينا هنا على التو أيضاً كيف أنه لا الفارسي ولا الرياضيون من أمثال الكرجي[١٥٣] فضلاً عن شارحي إقليدس ممن هم بتميز ابن الهيثم[١٥٤] قد تعرفوا في IX-14 إلى ما سوف يصبح لاحقاً المبرهنة الأساسية، وهذا يعني أن قراءة هيث ليست تاريخية بالفعل. نفهم من الآن فصاعداً أن بعض المؤرخين ممن لا يأبون قراءة تقهقرية قد ترددوا، مع ذلك، في اعتماد قراءة هيث، فكلهم قد اعترفوا بأن المبرهنة الشهيرة غائبة من كتاب **الأصول** دون أن تكون مع ذلك مجهولة من قبل إقليدس، وهو وضع لا يتصف بالوضوح إطلاقاً. بالنسبة إلى البعض كـ إيتارد (J.Itard)[١٥٥]

---

(١٥١) Chas. F. Gauss, *Recherches arithmétiques,* traduire par A.C.M. Poulet-Delisle (Paris: Hermann, 1807), théorème 16.

(١٥٢) يكتب هيث: «وبتعبير آخر، يمكن لعدد أن يحلّل بطريقة واحدة لعوامل أوليّة». انظر: Thomas Little Heath: *Euclid's Elements,* 2nd ed. (Dover: [s.pb.], 1956), vol.2, p.403, and *A History of Greeck Mathematics* (Oxford: Clarendon Press, 1921), Chap 1: *From Thales To Euclid,* p.241.

(١٥٣) الكرخي، كتاب البديع في الحساب، ص ٢٢.

(١٥٤) أبو علي الحسن بن الهيثم، «في حل شكوك إقليدس في الأصول،» مخطوطة: «جامعة اسطنبول رقم (٨٠٠)،» ص ١٣٩ (ظهر الورقة). ويكتب عن IX-14 وعن IX-15: «والذي يلي هذه الأشكال هو الشكل الرابع عشر والخامس عشر وليس في واحد منها شك ولا اختلاف برهان وعلتها هي الأشكال التي بيّنا علتها»، ص ١٣٩ (ظهر الورقة).

(١٥٥) انظر: Itard, *Les Livres arithméthiques d'Euclide,* p.68, حيث يكتب: «يجب أن لا نبحث في كتاب **الأصول** عن التبديل ولا عن التجميع في حاصل ضرب عدة عوامل، ولا عن تحليل العدد إلى جداء عوامله الأوليّة، ولا عن كافة قواسمه». ويتساءل بعد ذلك ما إذا كان يحق لنا الاستنتاج أنها كانت مجهولة من قبل إقليدس. ويجيب على هذا السؤال بالقول: «سيكون في ذلك تجاهل لميزة بحث كبحث **الأصول** حيث أثبتت بصورة منطقية، بالتأكيد، ولكن ملتوية بعض الشيء، مجموعة حقائق رياضيّة وجوهريّة لكل بحث لاحق، لكن دون أن يحاول =

مثلاً، فإنه يعزو هذا الغياب إلى انشغالات تعليمية حرّكت إقليدس في كتابه الأصـول وصرفتـه عن إنهاء مـوضـوعـه. أمـا بـالنسبـة إلى البعض الآخـر مثـل بـوربـاكي (Bourbaki)(١٥٦) فهو يعتقد أن إقليدس لم يتمكن من صياغة هذه المبرهنة بسبب نقص في المصطلحات والرموز المناسبة للقوى من أية درجة كانت. ومؤخراً أيضاً(١٥٧)، ودون التخلي عن تفسير هيث، كان هناك اتجاه يحاول قصر الأمر على تأكيد أنّ IX-14 تكافىء حالة خاصة من المبرهنة الأساسية، أي حالة الأعداد الطبيعية دون عوامـل مربعـة أي عندما يكون $(p_1, p_2 \ldots, p_n)$ حاصل ضرب أعداد أوليـة بحيث إن كل اثنـين متمايـزان فيما بينهما، فلا يوجد له إذن عوامل أولية سوى $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

مهـما اعتمد من تفسـير لـ IX-14 فلا يمكن إلاّ أن نستنتـج أن هناك غيـاباً لأيـة

= استنفاد الموضوع إطلاقاً وحيث يتم تجنب التطبيقات». لِنُشِرْ إلى الموقف الذي سبق لهاردي (Hardy) ورايـت (Wright) أن اتخذاه منذ العام ١٩٣٨. انظر:

Hardy and Wright, *The Theory of Numbers*:

«It might seem strange at first that Euclid, having gone so far, could not prove the fundamental theorem itself; but this view would rest on a misconception. Euclid had no formal calculus of multiplication and exponentiation, and it would have been most difficult for him even to state the theorem. He had not even a *term* for the product of more than three factors. The omission of the fundamental theorem is in no way casual or accidental; Euclid knew very well that the theory of numbers turned upon his algorithm, and drew from it all the return he could», p.182.

(١٥٦) Nicolas Bourbaki, *Eléments de mathématiques* (Paris: Hermann, 1960), p.110.

ويضيف الملاحظة التالية: «استناداً إلى هذه الفرضية، يمكننا ملاحظة أن إثبات مبرهنة الأعـداد التامّة ما هو في الحقيقة إلاّ حالة خاصة أخرى من مبرهنة وحـدانية التحليـل إلى عوامـل أوليّة. وتتفق كـافة الشهـادات على إثبـات أنه منـذ تلك الحقبة فـإن تحليل عـدد إلى عوامله الأوليـة كـان معـروفـاً ومستعملاً عادة. لكننا لا نجد إثباتاً تـامّاً لمبرهنة التحليـل إلى عوامـل قبل تلك التي أعـطاها غـوس (Gauss) في بداية «التحقيقات» (Disquisitiones)»، ص ١١.

(١٥٧) انـظر: A.Mullin, «Mathematico - Philosophical Remarks on New Theorems Analogous to the Fundamental Theorem of Artihmetic,» *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol.6, no.3 (1965), pp.218-222, and D. Hendy, «Euclid and The Fundamental Theorem of Arithmetic,» *Historia Mathematica*, vol.2 (1975), pp.189-191,

وأخيراً الاستعادة المتبصرة لهذه المسألة من قِبَل:

W.Knorr, «Problems in the Interpretation of Greek Number Theory: Euclid and the Fundamental Theorem of Arithmetic,» *Stud. Hist. Phil. Sci.*, vol.7, no.3 (1976), pp. 353-368.

صياغة ولأي برهان عن وجود تحليل للعدد الطبيعي إلى عوامل أولية، ولا يبقى من IX-14 في أحسن الحالات إلاّ برهان لوحدانية التحليل إلى عوامل، ووجوده ليس سوى مصادرة (Postulat) في الحالة الخاصة المذكورة سابقاً. فكيف لا نستغرب إذن مساراً يهدف إلى برهان الوحدانية دون إثبات الوجود، في حين أن الوسائل كافة قد اجتمعت لإثبات هذا الوجود؟ وفي الواقع، ولهذه الغاية فإن القضية VII-13 كانت قد استخدمت من قِبل لاحقي إقليدس. وبما أنه من غير المعقول التذرع هنا بسبب ظرفي لتبرير هذا الغياب، فالأحرى إذن أن نقبل بداهة كما نوّه بذلك العديد من المؤرخين[١٥٨]، بأن إقليدس لا يعالج مطلقاً في **الأصول** مشكلة التحليل إلى عوامل أولية، أو أن هذه المشكلة لم تبد له على الأقل على درجة من الأهمية كي يكرّس لها نظرية خاصة. إذا كانت هذه الفرضية هي الأفضل فإن الجدل السابق الذي أثير باختصار في هذه الصفحات يبدو نافلاً من الناحية التاريخية. فقد خيل إلى هيث أنه يقرأ مبرهنة لا وجود لها بالواقع عند إقليدس فأثار ومناقضوه جدلاً لا لزوم له ونسب إلى إقليدس مشروع لم يكن هو صاحبه ليلام بعد ذلك على خلل ارتكبه عند تنفيذه.

فالدراسة لـ«المقالات الحسابية» لإقليدس التي تستبعد عمداً المسائل التي أثارها نسب هذه المقالات وتلك التي أثارتها غايتها، أي تطبيق هذه المقالات على المقالة العاشرة، تبيّن أن تسلسلها الإجمالي لا يتضمن وجود أي دور لنظرة خاصة بتحليل عدد ما إلى عوامله الأولية. فأول ما نقابل في هذه المقالات هو خوارزمية إقليدس - المسماة أحياناً ἀνθυφαίρεσις - على ما أسّست عليه في الشكلين من الكتاب السابع. ولكن مع اعتبارنا للتصور الإقليدي للوحدة - كمقياس لأي عدد - وللعدد - ككثرة منتهية من الوحدات - فإن الخوارزمية تسمح بإثبات وجود القاسم المشترك الأكبر. وتظهر فجأة أهمية مفهوم الأعداد الأولية فيما بينها متبوعة بالأعداد الأولية التي أُكد وجودها ولاتناهيها في الكتاب IX.

ضمن هذا التطور لبحث إقليدس لا شيء يجبر على البحث عن مبرهنة ليست أساسية في تنظيم الكتاب IX على الأقل ولا تخدم إطلاقاً في دعم تطبيقات أخرى أساسية. هذه هي تحديداً حالة مبرهنة الحساب الأساسية.

إذا ما واجهنا هذا المضمون لكتاب **الأصول** بمضمون البحث الخاص بجميع

---

(١٥٨) انظر: Hardy and Wright, *The Theory of Numbers*; Bourbaki, Ibid.; Itard, *Les Livres arithmétiques d'Euclide,* and Knorr, Ibid.

قواسم عدد طبيعي والمكرّس لدرس مجموعها وعددها ندرك على وجه أفضل الأسباب التي قادت رياضيّاً كالفارسي إلى إدراك هذه المبرهنة. ففي الواقع، إذا كانت هذه المبرهنة قد أبصرت النور فذلك نظراً إلى إعداد هذه الدراسة عن القواسم وإلى إدخال الوسائل التوافيقية الضرورية لذلك، في حين أن كل الشروط المطلوبة لبرهانها كانت مدونة منذ وقت طويل في كتاب **الأصول**. لقد فرضت هذه المبرهنة نفسها إذن بصورة طبيعية لتحقيق ما أعدّت من أجله: السماح بتطبيق الوسائل الجبرية على الحساب الإقليدي. وهكذا لم يدرك الفارسي ولا حتى لاحقوه الدور الأساسي والمركزي لهذه المبرهنة، ولكي تصبح متميزة بذاتها حقاً، كان لا بد من الانتظار حتى التمكن من إثبات أنها ليست «على الصورة الطبيعية» التي تبدو عليها، وبمعنى آخر، إنها لا تتحقق في حساب كل حلقة من الأعداد الصحيحة، ولكنّ هذا موضوع آخر.

ب ـ من الممكن إذن من الآن فصاعداً وبمساعدة المبرهنة السابقة ووسائل توافيقية أن ندرس الدالّتين الحسابيّتين الأوليتين، لكن يبقى علينا التأكد من الوسائل الفعلية للتحليل إلى عوامل أولية. فمنذ البغدادي على الأقل لجأ الرياضيّون إلى مقدمات مكرّسة لتسهيل تطبيق إيراتوستين (Eratosthène)، ومن أهمّها المقدّمة التالية:

المقدمة (٤)

إذا لم يكن لعدد طبيعي n أي قاسم أولي p بحيث $p^2 < n$، فإن n هو عدد أولي.

وهي مقدمة تُنسب خطأ إلى فيبوناكشي (Fibonacci)[١٥٩].

إن دراسة الدوال الحسابية بكل معنى الكلمة تبدأ مع القضيتين ٥ و٦ اللتين تعكسان جيداً مجمل دراسة الفارسي.

---

(١٥٩) انظر كيف يطبق هذه القاعدة (الفقرة ١٥)، لنشر إلى أنه بالإضافة إلى ذلك، وأثناء تفحصه لتحليل عدد ما، وتطبيق جدول ايراتوستين (Eratosthène) يعطي الفارسي قضايا أخرى، وهكذا فبعد أن يذكّر بالكتابة العشرية لعدد طبيعي N: $N = a_n 10^n + \dots + a_1 10 + a_0$ يعود ليؤكد مثلاً على: أ ـ بما أن $N \equiv a_0 \pmod{10}$ فإن N هو عدد مفرد عندما يكون a_0 عدداً مفرداً. ب ـ إن N تقبل القسمة على خمسة إذا كان $a_0 = 5$ أو $a_0 = 0$. وكَمثل العديد غيرها من القضايا التي تهدف إلى معرفة ما إذا كان العدد أوليّاً أم لا، وذلك بتفحّص رقمه الأخير (أو أرقامه الأخيرة).

القضية (٥)

«كل مركب حلّل إلى أضلاعه الأوائل فإن المؤلفة من تلك الأضلاع الثنائية والثلاثية وغيرهما، إلى المؤلفة السميّة لعدد الأضلاع إلا واحداً، كلّها أجزاء له»[١٦٠].

القضية (٦)

«كل مركب حلل إلى أضلاعه الأوائل فإنه لا يوجد له جزء سوى الواحد وأضلاعه الأوائل والمؤلفة من أضلاعه الثنائية أيضاً إن كانت أكثر من اثنين، والثلاثية أيضاً إن كانت أكثر من ثلاثة وهلم جرّا، إلى أن تنتهي إلى المؤلفة السميّة لعدد الأضلاع إلاّ واحداً»[١٦١].

ويبدو على الفور أن المسألة مدروسة بأسلوب توافيقي متعمّد. وبعدها تتتابع مجموعتان من القضايا، الأولى تتعلق بالدالة: مجموع أجزاء القواسم التامة، وإن كان قد حصل ابن قرّة والبغدادي كما رأينا على بعض النتائج الجزئية الخاصة بهذه الدالة، غير أنه لم تجر في أية لحظة دراسة لهذه الدالة الحسابية لذاتها، وقد أعدّ الفارسي في كتابه للمرّة الأولى بحثاً مكرّساً لأجلها فقط. سنعطي إذن أهم القضايا التي وردت وبرهنت في كتابه.

القضية (٧)

إذا كان $n = p_1 p_2$ وكان p_2 عدداً أولياً و $(p_1, p_2) = 1$

فإن: $\sigma_0(n) = p_2\sigma_0(p_1) + \sigma(p_1)$

أو حسب تعابيره الخاصة: «إذا ضرب عدد مركب في عدد أول، فإن لم يكن المضروب فيه أحد أضلاع المركب الأوائل، كان مجموع أجزاء السطح مثل مضروب أجزاء المركب مجتمعة في ذلك الأول مع المجتمع من أجزاء المركب مع المركب»[١٦٢].

بإمكاننا تلخيص صورة برهان الفارسي كما يلي:

لنرمز بـ $\mathscr{D}_0(n)$ لمجموعة أجزاء القواسم التامة للعدد n وبـ $\mathscr{P}$ لمجموعة عناصر الطرف الثاني من العلاقة السابقة. يبيّن الفارسي أولاً أن كل عنصر من $\mathscr{P}$ هو قاسم فعلي للعدد n وبالتالي عنصر من $\mathscr{D}_0(n)$، لذا فإن $\mathscr{P} \subset \mathscr{D}_0(n)$. ويبرهن بواسطة الخلف

(١٦٠) انظر: الفارسي، **تذكرة الأحباب في بيان التحاب**، الفقرة ٦.
(١٦١) المصدر نفسه، الفقرة ٩.
(١٦٢) المصدر نفسه، الفقرة ١٨.

أن $\mathscr{D}_0(n)$ لا يحتوي على أي عنصر لا ينتمي إلى $\mathscr{P}$ وهكذا يحصل على النتيجة. وفي الواقع فإن الفكرة التي تتضمنها القضية (V) كما سنرى هي:

$$\sigma(n) = \sigma(p_1p_2) = \sigma(p_1)\,\sigma(p_2) = \sigma(p_1)\,(1+p_2)$$

لذا: $$\sigma_0(n) = \sigma(p_1)\,(1+p_2) - p_1p_2$$

وبالتالي نصل إلى النتيجة.

لازمة (٨):

إذا كان $n = p^r$ حيث p أولي.

فإن: $$\sigma_0(n) = \sum_{k=0}^{r-1} p^k = \frac{p^r - 1}{p - 1}$$

لقد سبق للبغدادي أن طبّق هذه اللازمة مثلاً[١٦٣].

وينظر الفارسي فيما بعد بحالة أكثر تعقيداً، وسبق لابن قرّة أن عالجها، ثم يبرهن[١٦٤].

القضية (٩)

إذا كان: $n = p_1p_2$ حيث: $(p_1, p_2) = 1$ فإن:

$$\sigma_0(n) = p_1\sigma_0(p_2) + p_2\sigma_0(p_1) + \sigma_0(p_1)\,\sigma_0(p_2)$$

وهذا ما يشهد أيضاً على معرفته للعبارة:

$$\sigma(p_1p_2) = \sigma(p_1)\,\sigma(p_2)$$

وبأنه كان يعرف أن الدالة σ هي جدائية. لنقرأ نص هذه القضية التي يستعمل برهاناً مماثلاً لبرهان القضية السابقة فيكتب[١٦٥]: «إذا ضرب عدد مركب في عدد مركب كان جميع أجزاء السطح مثل سطح جميع أجزاء المضروب في المضروب فيه مع سطح جميع أجزاء المضروب فيه في المضروب مع جميع أجزائه، إن لم يناسب اثنان من المضروب وأجزائه اثنين من المضروب فيه واجزائه على الولاء، وإن ناسب فجميع أجزائه هو جميع السطحين بعد أن يلغى منه كل من مضروب

---

(١٦٣) المصدر نفسه، الفقرة ٢٧.

(١٦٤) المصدر نفسه، الفقرة ٢١.

(١٦٥) المصدر نفسه.

طرفي أربعة متناسبة». ويعني المقطع الأخير من الجملة كما يشهد بذلك ما يتبع من البحث أن أي زوج من قواسم p_1 ليس بنسبة أي زوج من قواسم p_2 وهكذا فإن $1 = (p_1, p_2)$، وإلّا فكما يشير الفارسي لاحقاً، من الضروري أنّ جزءاً واحداً على الأقل من أجزاء القواسم التامة للعدد p_1 غير الواحد هو في الوقت نفسه جزء من القواسم التامة للعدد p_2. في هذه الحالة حيث $1 \neq (p_1, p_2)$ يجب أن تطرح القواسم التي تتكرر. ويحاول الفارسي أخيراً لكن دون أن ينجح، ونفهم ذلك دون عناء، إقامة صيغة فعليه للحالة الأخيرة أي عندما يكون $n = p_1p_2$ حيث $1 \neq (p_1, p_2)$.

كل هذه القضايا عن دالة جمع العوامل تظهر بعد ذلك بثلاثة قرون على الأقل عند ديكارت[١٦٦] الذي ينسب إليه المؤرخون صياغتها، لكننا نعلم من الآن فصاعداً أنها سبق أن وردت في نهاية القرن الثالث عشر عند رياضيين أعطوا، خلافاً لديكارت، العديد من البراهين عليها.

إن الطريق المجتاز للحصول على القضايا، والطريقة التي اعتمدها الرياضيون من أجل إعدادها والتي تحدد العقلية الرياضية بحد ذاتها هي أكثر أهمية من القضايا ذاتها. إلى هذه الطريقة يشير ديكارت دون أن يتوقف كثيراً عندها في رسالة إلى مرسين (Mersenne) في ١٣ حزيران/ يونيو ١٦٣٨، فيكتب: «بالنسبة للطريقة التي استخدمتها في إيجاد أجزاء القواسم التامة، أقول لك انها ليست شيئاً آخر سوى تحليلي الخاص والذي أطبقه على

---

(١٦٦) René Descartes, *Oeuvres*, publiées par Ch. Adam et Paul Tannery (Paris: [s.pb.], 1966), vol.10, pp.300-302.

انظر أيضاً: *Excerpta Mathematica, IV, De Partibus Aliquotis Numerorum,*

حيث يعطي ديكارت العديد من القضايا السابقة دون براهين، فيورد اللازمة ٨ على الشكل التالي:

«Numerus autem primus, saepius per seipsum multiplicatus, sicuti an^n, partes aliquotas habet $\frac{a^n - 1}{a - 1}$. Hoc est: seipsum minus 1, divisum sua radice minus1», p.301.

ويورد التعابير التالية في القضية (٧)، من: المصدر نفسه:

«Si reperire velimus partes aliquotas numeri cujusdam primi, per alium numerum multiplicati, cujus jam habemus partes aliquotas, veluti si partes aliquotae numeri a sint b, & x sit numerus primus, partes aliquotae numeri <ax> sunt $bx + a + b$».

ويورد أيضاً القضية ٩، من: المصدر نفسه:

«Si habemus duos numeros primos inter se eorumque partes aliquotas, habemus etiam partes aliquotas producti ipsorum: veluti, si unus sit a, ejusque partes aliquotae sint b, alter vero sit c, cujus partes aliquotae sint d, partes aliquotae ac erunt $ad + bc + bd$».

هذا النوع من المسائل كما على مسائل أخرى ويلزمني وقت كي أشرحه على شكل قاعدة يمكن أن تكون مفهومة من قبل أولئك الذين يستخدمون طريقة أخرى»(١٦٧). بعد مرور شهر تقريباً على هذا التاريخ وبمعزل عن ديكارت يصف فيرما (Fermat) طريقته الخاصة في إيجاد أجزاء القواسم التامة باللجوء إلى التعبير نفسه إذ يكتب إلى مرسين نفسه في ١٠ آب/ أغسطس ١٦٣٨ «بالنسبة لأعداد أجزاء القواسم التامة، سأكتب طريقتي التحليلية إذا سمح لي الوقت بذلك حول هذا الموضوع وسوف أطلعك عليه»(١٦٨). إن تماثل المصطلحات هذا - تحليل، وطريقة تحليلية - ليس وليد صدفة بالتأكيد، فهو يدل على وحدة فكرية. صحيح أنه ضمن سياق كهذا يبدو أن هذه الكلمات تشير بشكل أساسي إلى الجبر بالمعنى الذي قصده ڤييت (Viète) والذي لا يفترق بصورة جوهرية عن العلم الموروث عن الكرجي ومدرسته(١٦٩). ويمكن أن نبرهن بصورة عامة كيف أنه في هذين التقليدين تمت مماثلة «التحليل» أو حتى استبداله بالجبر. لكن إذا تمسكنا بالفصل الخاص بأجزاء القواسم التامة وحده، يكفي كي نقتنع بذلك أن نقرأ ما كتبه فيرما عندما بدأ بتكريس نفسه فعلاً لهذه الدراسة. ففي ١٦ كانون الأول/ ديسمبر عام ١٦٣٨ كتب إلى روبيرڤال (Roberval): «بالنسبة لما هي عليه الأعداد وأجزاء قواسمها التامة، فقد وجدت طريقة عامة تجيب على كافة الأسئلة بواسطة الجبر الذي خططت أن أكتب عنه بحثاً موجزاً»(١٧٠). لكن فيرما لم يكتب أبداً هذا البحث الذي أعلن عنه. غير أن هذا الدور نفسه للجبر هو الذي يطل من قراءة «Excerpta Mathematica» لديكارت وهو يبرر أيضاً شرح كلمة «تحليل» ويميّز مجموع الأبحاث حول أجزاء القواسم التامة في النصف الأول من القرن السابع عشر. لكن كما رأينا للتو، فإن استعمال الطرق الجبرية ليس بأي حال من الأحوال وقفاً على رياضيي تلك الحقبة وإنه في الواقع من مكتسبات القرن الثالث عشر على الأقل. وتحديداً فإن تطبيق الجبر هذا على المجال التقليدي من الحساب الإقليدي وهذا الاستعمال للطرق الجبرية في الحساب لم يسم الانشطار الحاصل بين بحث الفارسي وبحث الاسكندريين فحسب، بل أيضاً بحث ابن قرّة ولاحقيه. وتكفي دراسة دالة الجمع الخاصة بأجزاء القواسم التامة للتدليل على ذلك. لكن هذا الطابع الجبري يظهر أكثر سطوعاً في استعادتين اثنتين: الأولى عندما لمس الفارسي

---

(١٦٧) Waard, *Correspondance du Père Marin Mersenne*, p.345.

(١٦٨) المصدر نفسه، ج ٨، ص ٢٧ (طبعة ١٩٦٣).

(١٦٩) انظر: «Al-Karajî,» in: Charles Coulston Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner, 1970-78).

(١٧٠) Tannery et Henry, *Oeuvres de Fermat*, vol.2, p.93.

الهدف المحدد ولجأ في سبيل تحقيقه إلى الطرق الجبرية فكان البرهان الجديد لمبرهنة ابن قرّة. ويظهر هذا الطابع ثانية عندما نقرّ ـ التوسيع المأخوذ في هذا المجال ـ دراسة أجزاء القواسم التامة ـ تحت تأثير دفع الطرق الجبرية، وعندما نلاحظ استقلاليته حيال الهدف الرئيسي الذي هو إثبات المبرهنة الخاصة بالأعداد المتحابة. المقصود تحديداً دراسة دالة عدد أجزاء القواسم التامة لعدد طبيعي والربط ما بين الأعداد الشكلية والتوافيق، وهو ما تتطلبه هذه الدراسة الجديدة.

لإقامة برهانه الجديد لمبرهنة ابن قرّة، بدأ الفارسي بإثبات المقدمة التالية:

المقدمة (١٠)

ـ لدينا لكل عدد طبيعي n (١٧١):

$$2^n q_n - 2^n p_{n-1} p_n + (2^{n+1} - 1) = q_n$$

يفرض الفارسي $x = 2^n$ الذي يسمّيه «شيء» وفق اللغة الجبرية لتلك الحقبة ويستخلص أن:

$$p_{n-1} = \frac{3}{2} x - 1, \quad p_n = 3x - 1, \quad p_{n-1} p_n = \frac{9}{2} x(x-1) + 1$$

$$q_n = \frac{9}{2} x^2 - 1$$

يكفي التعويض والمطابقة كيما نحصل على النتيجة.

ونصل أخيراً إلى برهان الفارسي لمبرهنة ابن قرّة(١٧٢). بما أن $(2^n, q_n) = 1$ و q_n هو عدد أولي بحسب المعطى، وبمساعدة القضية (٧) يمكننا أن نكتب:

$$\sigma_0(2^n q_n) = \sigma_0(2^n)\, q_n + \sigma(2^n) \qquad (1)$$

ومن اللازمة (٨) نحصل على:

$$\sigma_0(2^n) = 2^n - 1 \quad \text{و} \qquad (2)$$

$$\sigma(2^n) = 2^{n+1} - 1 \qquad (3)$$

وبتعويض (2) و(3) في (1) نجد أن: $\sigma_0(2^n q_n) = 2^n q_n - q_n + (2^{n+1} - 1)$

---

(١٧١) الفارسي، تذكرة الأحباب في بيان التحاب، الفقرات ٢٥ و٢٦.

(١٧٢) المصدر نفسه، الفقرة ٢٧.

ومن المقدمة (١٠) نحصل على:

$$\sigma_0(2^n q_n) = 2^n p_{n-1} p_n \qquad (4)$$

ومن جهة أخرى، وبما أنّ $(2^n, p_{n-1}p_n) = 1$ ، وبناء على القضية (٧)، لدينا:

$$\sigma_0(2^n p_{n-1} p_n) = \sigma_0(2^n)\, p_{n-1} p_n + \sigma(2^n)\,(1 + p_{n-1} + p_n) \qquad (5)$$

وبواسطة (2) و(3) نجد:

$$\sigma_0(2^n p_{n-1} p_n) = (2^n - 1)\, p_{n-1} p_n + (2^{n+1} - 1)\,(1 + p_{n-1} + p_n)$$

لكن:

$$(2^{n+1} - 1)\,(1 + p_{n-1} + p_n) = q_n + p_{n-1} p_n - (2^{n+1} - 1)$$

وبالتعويض في (٥) نجد إذن:

$$\sigma_0(2^n p_{n-1} p_n) = 2^n p_{n-1} p_n + q_n - (2^{n+1} - 1)$$

ووفق المقدمة (١٠) نستنتج أن:

$$\sigma_0(2^n p_{n-1} p_n) = 2^n q_n \qquad (6)$$

ونحصل من (٤) و(٦) على النتيجة، وهكذا تكون مبرهنة ابن قرّة قد أثبتت. هذا هو بالتحديد مسعى الفارسي إذا ما استثنينا بالطبع اختلاف طريقة التدوين.

إذا كانت دالة الجمع ضرورية لهذا البرهان فدالة عدد أجزاء القواسم التامة لعدد طبيعي ليست كذلك. لقد التزم الفارسي إذن درس الدالة الأخيرة بهدف درس أجزاء القواسم التامة بحد ذاتها، وقصد أبعد من مبرهنة ابن قرّة. لنرمز بـ $\tau_0 = (n)$ لعدد أجزاء القواسم التامة للعدد، وبـ $\tau(n) = \tau_0(n) + 1$ لعدد قواسم n. يبرهن الفارسي:

القضية (١١)

إذا كان $n = p_1 p_2 \dots p_r$

حيث $p_1, \dots, p_r$ عوامل أولية متمايزة، فإن:

$$\tau_0(n) = 1 + \binom{r}{1} + \dots + \binom{r}{r-1}$$

هذه القضية التي تُنسب بشكل ما إلى الأب ديـديه (Deidier)[١٧٣] واردة كـما يلي عنـد الفارسي: «وليكن أ ، فنحلله إلى أضـلاعـه الأوائـل، وهي إمـا أن تكـون متسـاويـة أو متفاضلة، جميعها أو بعضها، فإن كانت متساوية جميعها فالمركب أحد أجناس ضلعيه في المرتبة السميّة لعـدد الأضلاع عـلى أن أول المراتب هـو الضلع، وأجزاؤه هما ما دونـه من الواحـد واحـد <من> أضلاعه والأجناس، وليس له جزء سواهـا بشكل بحـ من مقـالة ط <من الأصـول> [إذا كان $a = p^n$، حيث p أولي فإن أجزاء قواسم a هي p^k حيث $0 \leqq k < n$] وإن كانت متفاضلة جميعها، فليكـن ب حـ د ه ، فنضرب ب في حـ وفي د وفي ه وحـ في د < وفي ه > ود في ه فيحصـل المؤلفة الثنائية الست؛ ثم لِيُلق كـل واحد منهـا وتؤلف الثلاثـة الباقيـة فيحصـل المؤلفـة الثلاثية الأربع، وبهذا تنتهي الأجزاء المؤلفة فيكون جميع الأجـزاء بحيث لا يشذ منهـا شيء: الواحـد والأضلاع الأوائل وهذه المؤلفة لا غير»[١٧٤]. ولكن قبل العودة إلى الطريقة التي تسمح بإيجاد هـذه التوافيق لنـذكر أن الفـارسي يستعمـل، لكن دون أن يثبتهـا بـالفعـل، القضيـة التالية[١٧٥]:

القضية (١٢)

إذا كان: $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ حيث $p_1, p_2, \dots, p_r$ عوامل أولية فإن:

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{r} (e_i + 1)$$

---

(١٧٣) انـظر: Deidier (Abbé), *L'Arithmétique des géomètres, ou nouveaux éléments de mathématiques* (Paris: [s.pb.], 1739), p.311.

ففي فقـرة تتعلق بـ «معرفـة قواسم عـدد ما» يكتب القس ديـديه: «إذا كـانت كافـة القـواسم البسيطة لهذا العدد غير متسـاوية، نغفـل منها العـدد واحد، ثم نتفحص كم يمكن للقـواسم البسيطة الأخرى أن تعطي من حواصل ضرب كلّ اثنين في كل مرّة، وكلّ ثلاثـة في كلّ مـرّة، وكلّ أربعـة في كلّ مرّة إلـخ . . . ونضيف إلى العدد الـذي حصلنا عليـه عدد القـواسم البسيطة ونضمنهـا الواحـد، فيصبح المجموع العام هو عدد القواسم المختلفة للعدد المعطى»، ص ٣١١.

نلاحظ أن القس ديديه يورد قضية الفارسي $\sigma(n)$ بـالنسبة إلى القـواسم دون أن يبرهنهـا، لكنه يتحقق منها بواسطة مثال عددي. ولم يورد حسـاب المجموع ($\sigma(n) = 2^n$) بكل عموميتـه، بل اكتفى بتحققه على المثال $n = 30030$، ص ٣٣٠.

(١٧٤) الفارسي، المصدر نفسه، الفقرة ٩.

(١٧٥) المصـدر نفسه، الفقـرة ٢٨. يورد مـونتمور (Montmort) القـاعدة نفسهـا بعـد عـدة قرون، ويكتب على الشكل التالي: «لنفترض أننا نريد معرفة عـدد قواسم الكميّـة الحرفيـة a^5b^3cede وأن الواحد هو من ضمن القواسم، سنجد أن عدد القواسم هو ٢٨٨، وذلـك وفقاً للقـاعدة العـادية التي نضرب بموجبها كافة الإساس ببعضها، بعد أن نكون قد زدنا واحداً على كل أسّ».

ج - **هل توجد طريقة بسيطة لتعداد كل التوافيق الضرورية لحساب أجزاء القواسم التامة لعدد طبيعي؟** للإجابة عن هذا السؤال التطبيقي بكل معنى الكلمة، استعدنا فصلاً قديماً من الحساب، هو الأعداد الشكلية. إن فعالية هذه الاستعادة كما سنرى تكمن في توسيع مفهوم العدد الشكلي لأي درجة كانت وإلى التفسير الجديد التوافيقي فعلاً والذي أعطي له. فمن جهة ليس هناك تمسك بالأعداد المضلعة والهرمية ومن جهة أخرى هناك مماثلة بين الأعداد الشكلية ومعاملات ثنائية الحدّ التي ستصبح من الآن فصاعداً غرض التفسير التوافيقي. وبهذه الطريقة سنجد أن كلّ حدّ يمثل ما يكفي من عدد المرّات الممكنة في نقل الحروف التي تؤلّفه، وهكذا فالمعامل لـ a^2b معطى حسب عدد التباديل الممكنة لـ *aab* أي *aab* و *aba* و *baa* وهو ثلاثة. هذان الفعلان المتضافران - التوسيع والتفسير - يكتسبان أهمّيّة جوهرية بالنسبة إلى تاريخ التحليل التوافيقي وكانا قد نسبا إلى فرينكل (Frenicle) ورينيه فرنسوا دسليز (René François de Sluse) وباسكال (Pascal)[(١٧٦)]. ونحن ننوي أن نبين أنهما قد أنجزا في عصر الفارسي على الأقل.

لنبدأ بالتذكير بما برهناه سابقاً في مكان آخر[(١٧٧)] فيما يخص وجود نشاطين توافيقيين منذ نهاية القرن العاشر، الأول كان من عمل الجبريين الذين كانوا يعرفون

---

(١٧٦) B.Frenicle de Bessy, «Abrégé des combinaisons,» dans: Académie royale des sciences, *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (Paris: L'Académie, 1693), pp.54-55, et Pascal, «Traité du triangle arithmétique,» dans: *Oeuvres complètes* (Paris: Seuil, 1963), pp.54-55.

نذكّر بأن هذا البحث يعود إلى عام ١٦٥٤. غير أن بعض أبحاث «الموجز» لفرينكل عرفت من مرسين، إذا قبل عام ١٦٤٨، وهو العام الذي توفي فيه مرسين. نجد بين تلك الأبحاث تلك الخاصة بالأعداد الشكلية وعلاقتها بالتحليل التوافيقي. انظر:

Coumet, «Mersenne, Frenicle e l'éléboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du XVIIème siècle,» pp. 328-330.

أما بالنسبة إلى رينيه فرنسوا دسليز (René François de Sluse)، انظر:

Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol.2, p.9.

سنجد تلك النتيجة من الآن فصاعداً عند رياضيين آخرين من القرن السابع عشر؛ كذلك الأمر بالنسبة إلى: J. Wallis, «De Combinationibus, Alternationibus et Partibus Aliquotis,» in: *Opera Mathematica*, vol.2 (1693), pp.485-486; 2ème ed. (Olms, 1972).

(١٧٧) Rushdi Rashed, «Algèbre et linguistique: L'Analyse combinatoire dans la science arabe,» in: Cohen, *Boston Studies in the Philosophy of Sciences*, pp.383-399.

المثلث الحسابي وقاعدة تكوينه منذ زمن الكرجي، وكانوا قد لجأوا إلى ممارسة توافيقية عندما كانوا يعالجون نظماً من المعادلات الخطية(١٧٨). أما الثاني فهو الخاص بالمعجميين وبالتحديد أولئك الذين استخدموا التوافيق والتباديل بدقة وفق قواعد عامة بالطبع لكن دون أن يهتموا بصياغتها بوضوح. ويبدو من زاوية معارفنا الراهنة أن هذا المجال من الأعداد الشكليّة كان مكان التقاء هذين النشاطين. إن المكوّنات الرئيسية لأبحاث الجبريين والمعجميين كانت قد ترسّخت وحدتها قبل نهاية القرن الثالث عشر على الأرجح، ونجد في بحث الفارسي تعبيراً عن هذا التوحيد. ولكي نقدّر ما قُطع من مسافة حتى الفارسي، علينا أن نعود بلمحة موجزة إلى دخول الأعداد الشكلية على الرياضيات العربية.

فمنذ ترجمة ابن قرّة لِـ مقدمة الحساب لنيقوماخوس الجرشي (Nicomaque de Gérase) والحسابيون العرب يعرفون جدول الأعداد المضلّعة كما أعطاها ابن قرّة في ترجمته(١٧٩):

العدد المثلث	1	3	6	10	15	21	28	36	45	$\frac{1}{2}n(n+1)$
العدد المربع	1	4	9	16	25	36	49	64	81	n^2
العدد الخماسي الأضلاع	1	5	12	22	35	51	70	92	117	$\frac{1}{2}n(3n-1)$
العدد السداسي الأضلاع	1	6	15	28	45	66	91	120	153	$n(2n-1)$
العدد السباعي الأضلاع	1	7	18	34	55	81	112	148	189	$\frac{1}{2}n(5n-3)$

إن قراءة بسيطة لنص نيقوماخوس تكفي لتبين لنا أن هذا الرياضي كان يعرف قاعدة تشكيل هذا الجدول والتي يمكن إعادة كتابتها على النحو التالي:

$$p_n^r = p_{n-1}^r + p_1^{r-1}$$

حيث p_n^r هو العنصر الموجود في الصف رقم n وفي العمود رقم r.

منذ القرن العاشر كانت تعاد كتابة هذا الجدول بزيادة عدد صفوفه وأعمدته

(١٧٨) انظر المقدمة الفرنسية، من:
Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*, p.77 sq.

(١٧٩) *Kutsch, Tābit B. Qurra's: Arabische Übersetzung der des Nikomachos von Gerasa*, p.77.

لنذكر أن الجدول في الطبعة اليونانية يحتوي على عمود إضافي يشتمل تباعاً على الأعداد (55, 100, 145, 190, 235). انظر أيضاً: Hoche, *Introduction*, p.97.

تجدر الملاحظة أن هذا الجدول أو بعض أشكاله الأخرى، يوجد في معظم الأبحاث الحسابية التمهيدية.

حسب ما تقتضيه الحاجة في الأبحاث الحسابية كبحث البغدادي وابن سينا وابن البنّاء والأمويّ لاحقاً. وتحقق فضلاً عن ذلك تقدم ظاهر في حساب قوى الأعداد الطبيعية الأولى. وبلغت هذه الحركة أوجها في برهان ابن الهيثم[١٨٠] لعبارة معروفة من قبل سابقيه كالقبيصي[١٨١] ومعاصريه كالبغدادي[١٨٢]:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

وإذا حصرنا البحث في الأعداد الشكلية فقط فندرس أولاً مجموعها، وهكذا فالبغدادي يحسب الأعداد الهرمية ويبين أن المجموع الهرمي للجذر n يكتب:

$$\pi_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

ويقيم حساب الأعداد المجسمة بطريقة مشابهة انطلاقاً من الأعداد الأولى المربعة حتى n ثم انطلاقاً من الأعداد الأولى الخماسية حتى n[١٨٣]:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

حتى الآن، وخلافاً لما تمكّنا أن نلاحظه في دراسة قوى الأعداد الطبيعية الأولى حتى n، ليس هناك من جديد بصورة أساسية ولا شيء ذا أهمية استثنائية قد أضيف على المكتسب من أعمال اليونانيين حول الأعداد الشكلية باستثناء بعض النتائج المتعلقة بمجموع هذه المتتاليات، وبصورة أعم، بمعرفة أفضل بخصائص الصفوف

---

(١٨٠) انظر ترجمة بحث ابن الهيثم: «Sur la mesure du paraboloïde,» dans: Heinrich Suter, *Die Abhadlung über die Ausmessung des paraboloïdes, von el Hasan b. el-Hasan b. el-Haitham* (Leipzig: [n.pb.], 1912), p.296 sq.

انظر أيضاً طبعتنا وترجمتنا للنص نفسه، في:

Journal for History of Arabic Science, vol.5, nos.1-2 (1981), p.199 sq.

(١٨١) القابسي، المصدر نفسه، ص ٨٦ (ظهر الورقة) و٨٧ (وجه الورقة).

(١٨٢) البغدادي، «التكملة في الحساب،» ص ٦٥ (وجه الورقة).

(١٨٣) المصدر نفسه، ص ٦٤ (وجه الورقة)، و٦٥ (ظهر الورقة).

والأعمدة(١٨٤). نضيف إلى هذا أيضاً رفض الرياضيين كافة لأي تمثيل «هندسي» للأعداد الشكليّة. وخارج إطار هذه الخطوط لا يمكننا حتى الآن استخلاص أي شيء من دراسة المراجع المعروفة.

يبدو أن مساهمتين في نهاية القرن الثالث عشر قد وضعتا موضع التساؤل هذه المحدودية في معرفة الأعداد الشكليّة والتي لا تعبر في الحقيقة إلّا عن غياب النصوص. صحيح أن المساهمة الأولى جزئية ونقصد بها مساهمة ابن البنّاء. أمّا الثانية الأكثر عمومية فهي للفارسي، ولأن ابن البنّاء مغربي بينما الفارسي هو إيراني وبما أن كليهما لا يدّعي الإكتشاف بل كأنهما يعرضان نتائج معروفة، نظراً إلى هذه الأسباب مجتمعة، هناك مجال للاعتقاد أن هذين الرياضيين يندرجان ضمن سلالة لها إرث مشترك.

فابن البنّاء في شرح لكتابه في الحساب(١٨٥) وبعد أن يدرس الأعداد المضلعة يعالج الأعداد المثلثة وتلك المتولدة من مجاميعها أي الأعداد الشكليّة من الدرجة الرابعة، فيقيم الصلة بين التوافيق المستخدمة في المعاجم وبين الأعداد الشكلية. إن عملاً كهذا لذو أهمية تتطلب منا التحليل. وفي الحقيقة، يذكر ابن البنّاء أن التوافيق الخاصة بـ p عنصر والمأخوذة ثلاثة ثلاثة معطاة. «وينتفع بجمع المربعات في تركيب الكلمات الثلاث لحصر اللغة وشبهها، مثل كم كلمة ثلاثية في حروف المعجم بصورة واحدة دون مقلوباتها؟ لأن الكلمات الثلاثية إنما هي جمع مثلثات ضلع منتهاها أقل من تلك العدة باثنين أبداً.

وجمع المثلثات هو بضرب ضلع منتهاها في مسطحي العددين اللذين يليانه بعده وأخذ سدس الخارج»(١٨٦). وهكذا إذا أشرنا بـ p إلى عدد العناصر وبـ F_k^3 للأعداد المثلثة فيكتب قول ابن البنّاء على الشكل التالي:

---

(١٨٤) المقصود بذلك استنفاد ودرس ما يمكن أن تمثله هذه الصفوف والأعمدة.

(١٨٥) انظر: أبو العباس أحمد بن محمد بن البنّاء، «رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب،» مخطوطات: «تونس، المكتبة الوطنية رقم (٩٧٢٢)،» الأوراق ١ ـ ٤٥. ونشكر سويسي على تلطفه بإعطائنا نسخة عن هذه المخطوطة.

للاطلاع على حياة ابن البنّاء، انظر: أبو العباس أحمد بن محمد بن البنّاء، **تلخيص اعمال الحساب**، تحقيق وتعليق وترجمة محمد سويسي (تونس: الجامعة التونسية، ١٩٦٩)، ص ١٥ وما يليها من النص العربي، وص ١٧ وما يليها من النص الفرنسي. أنظر أيضاً:

A.Djebar, *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIème et XIVème siècles* (Orsay: Publications mathématiques, 1980-1981).

(١٨٦) ابن البنّاء، «رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب،» ص ١٥ (ظهر الورقة).

$$\binom{P}{3}=\sum_{k=1}^{p-2}F_k=\frac{p(p-1)(p-2)}{6}$$

وللتحقق من صحة هذه النتيجة يعود ابن البنّاء إلى الحالة العامة لتوافيق p عنصر مأخوذ منها في كل مرّة k عنصر. وهنا بالتحديد يسقط الأعداد الشكليّة.

وفي الواقع فإن ابن البنّاء يؤكد على أنّ:

$$\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2} \quad \text{وأن:} \quad \binom{P}{3}=\frac{(p-2)}{3}\binom{P}{2}$$

ثم ينتقل إلى التعميم، أو كما يكتب[١٨٧]:

«والثلاثية بضرب الثنائية في ثلث الثالث من تلك العدة قبلها، والرباعية بضرب الثلاثية في ربع العدد الرابع من تلك العدة قبلها، والخماسية تضرب الرباعية في خمس العدد الخامس قبلها، وعلى هذا أبداً تضرب عدد التركيب الذي قبل التركيب المطلوب في العدد الذي بعده من العدة المفروضة قبلها مثل عدد التراكيب المطلوب، وتأخذ من الخارج الجزء السميّ لعدد التركيب». وبعبارة أخرى فإن ابن البنّاء يورد:

$$\binom{p}{k}=\frac{p-(k-1)}{k}\binom{p}{k-1} \qquad (1)$$

ويبرهن ابن البناء هذه العلاقة مستخدماً استقراء رياضياً قديماً من نوع حددنا خصائصه في مكان آخر[١٨٨]. ولتقدير الأسلوب الذي يهمنا أمره بشكل خاص، فلنعد كتابة هذا البرهان بالتعابير نفسها التي أوردها ابن البنّاء. ليكن p عدد العناصر المعطى التي نريد توفيقها <تركيبها> للحصول على توافيق من عنصرين، لا يبرهن ابن البناء شيئاً، بل يستعيد:

«فهو جمع الأعداد على تواليها من واحدة إلى العدد الذي قبل العدة المعطاة»[١٨٩]. «وأما الثلاثية، فإن كل واحدة من الثنائيات يجتمع منها واحد من بقية العدة فتكون الاقترانات الثلاثية مثل ضرب الثنائية في العدة المعطاة إلا اثنين وهو العدد الثالث من العدة المعطاة قبلها $\left[(p-2)\binom{p}{2}\right]$ ولما كانت التأليفات في الثلاثية الواحدة ثلاث ثنائيات، لزم من ذلك تكرار الثلاثية ثلاث مرات، هي ومقلوباتها، مثل ان الألف والباء إذا جمعتا مع الجيم، كان ذلك كجمع الألف والجيم مع الباء

(١٨٧) المصدر نفسه، ص ١٦ (وجه الورقة).

(١٨٨) Rashed, «L'Induction mathématique: Al-Karajī et As-Samaw'al,» pp.1-21.

(١٨٩) ابن البنّاء، المصدر نفسه.

وكجمع الباء والجيم مع الألف[١٩٠]. فهذه الثلاثيات الثلاث حاصلها ثلاثية واحدة، وإنما صارت ثلاثية لأجل ترتيب حروفها الثنائية، فيجب أن يؤخذ ثلث الثنائيات ويضرب في مسائل العدة المعطاة $\left[\left(\frac{1}{3}\binom{p}{2}\right)(p-2)\right]$ أو يضرب الثنائية في ثلث مسائل العدة المعطاة $\left[\binom{p}{2}\frac{(p-2)}{3}\right]$»[١٩١].

ويستعيد برهاناً مشابهاً للسابق بالنسبة إلى الحالة $k = 4$ ويستنتج في حالة $k = 5$، وبالتالي مهما كان k. من كل ما سبق يستنتج ابن البنّاء[١٩٢] العلاقة التالية:

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} \tag{2}$$

التي سنجدها فيما بعد عند كاردان (Cardan) وفيرما (Fermat)[١٩٣].

إذا نظرنا إلى النتائج فقط، فلن نجد ما يمكن أن يدهشنا بالفعل. فالعلاقة (1) سمحت بتحديد العبارة الجدائية (2)، وكلتاهما على السواء تستنتجان بسهولة من قانون التشكيل الجمعي لجدول معاملات ثنائية الحدّ. هذا القانون كما نعلم كان قد

---

(١٩٠) المصدر نفسه، ص ١٦ (وجه الورقة).

(١٩١) المصدر نفسه.

(١٩٢) المصدر نفسه: «فإننا نضع أعداد الضرب متفاضلة بالواحد، يكون أعظمها عدد تلك الجملة *[p]* وتكون عدتها كعدة التراكيب *[k]*، ثم يضع أعداداً للقسم عليها متفاضلة بالواحد يكون أعظمها تلك العدة المعطاة *[k]* وابتداؤها من الواحد ومن الاثنين، ثم نزيل الاشتراك بين الأعداد الأولى والأعداد الثانية، وفي فعلنا ذلك تذهب الأعداد التي فيه كلها أبداً، ثم يضرب الباقي من الأعداد الأولى بعضه في بعض يكون عدة ما في تلك الجملة من تلك التركيبة»، ص ١٦ (ظهر الورقة).

(١٩٣) انظر: Carl Benjamin Boyer, «Cardan and the Pascal Triangle,» *American Mathematical Monthly*, vol.57 (1950), pp.387-390.

وفي رسالته المؤرخة في ٤ تشرين الأول/ نوفمبر ١٦٣٦ إلى روبيرفال يعتبر فيرما أن هذه القضية ليست توافيقية بل حسابيّة. ويكتب: «إليك هذه القضية الهامّة التي قد تفيدك فيما تعمل والتي انجزت عملي بواسطتها بنجاح. إنها قاعدة وجدتها للحصول على المجموع، ليس المثلث منها فقط، وهو ما قام به باشيه (Bachet) والآخرون، بل الهرميّة منها والمثلثة - التثليث، إلخ... حتى اللانهاية». هاك نصّ القضية:

Utlimum latus in latus proxime majus facit duplum trianguli.
Ultimum latus in triangulum lateris proxime majoris facit triplum pyramidis.
Ultimum latus in pyramidem lateris proxime majoris facti quadruplum triangulotrianguli.
Et eo in infinitum progressu.»

انظر: Waard, *Correspondance du Père Marin Mersenne*, vol.6, pp.146-147.

ذكر واثبت منذ ثلاثة قرون بواسطة الكرجي، ثم استعاده السموأل في القرن الثاني عشر ولم ينقطع قط عن الانتشار(١٩٤). صحيح أن ابن البنّاء لا يثبت الحالة $\binom{n}{1}$ ، ويمكننا الظن أنه أراد أن يتحاشى بذلك $\binom{n}{0}$ رغم حضورها في المثلث الحسابي كما أورده السموأل مثلاً(١٩٥). وكذلك فهو لا يثبت الحالة $\binom{n}{2}$ ويكتفي بالقول: «أما الثنائية، فهي جمع الأعداد على تواليها من واحد إلى العدد الذي قبل العدة المعطاة»(١٩٦). وحتى لو لم يكن بإمكاننا الجزم، يبدو لنا من غير المحتمل أن البنّاء (أو مصادره) كان يجهل هذا المثلث. وفي الواقع أنه في مقابل القليل من الممارسة الفعلية للتوفيق، هناك صياغة لا يمكن أن تجد تبريراً لعموميتها إلاّ خارج هذه الممارسة، أي بعبارة أخرى، في صياغة الرياضي لقانون تشكيل المثلث.

لكن ما هو أهم من هذه النتائج، بنظرنا، هو بالتحديد النهج التوافيقي لبحث ابن البنّاء إضافة إلى الصلة التي يقيمها جزئياً بين الأعداد المتحابة والتوافيق. والمقصود أولاً الأعداد المثلثة وتوافيق p عنصر مأخوذة في كل مرة اثنين اثنين، وبعد ذلك الأعداد الشكلية من الدرجة الرابعة وتوافيق p عنصر مأخوذة في كل مرة ثلاثة ثلاثة. لنورد ما قاله ابن البنّاء: «ويلزم من ذلك أن كل عددين متواليين يضرب أحدهما في نصف الثاني، فالخارج هو ما في أكبرهما من التركيبات الثنائية، وهو مثلث أصغرهما، كما تقدم. وكل ثلاثة أعداد متوالية يضرب أحدهما في نصف الثاني، وما خرج في ثلث الثالث فالخارج هو ما في أكبرها من التركيبات الثلاثية، وهو ما يجتمع من المثلثات على تواليها إلى مثلث العدد الأصغر، وهو مثل جمع مربعات الأفراد المتوالية من الواحد إلى الأصغر إن كان فرداً، أو مثل جمع مربعات الأزواج المتوالية من الاثنين إلى الأصغر إن كان زوجاً، كما ظهر لك بالاستقراء»(١٩٧).

إن نتائج كهذه لم تكن لتهمل في تلك الحقبة، لنذكر فقط أنه حتى بداية القرن السابع عشر فإن باشيه دي مزرياك لم يقترح ما هو أكثر أهمية حول هذا الموضوع(١٩٨).

---

(١٩٤) لقد أصبح بمقدورنا في الحقيقة أن نبيّن أن انتشار المثلث الحسابي في الرياضيات العربية لم ينقطع يوماً منذ القرن العاشر وحتى القرن السابع عشر. وسوف نختتم هذا الموضوع بكتابة فقرة عن «انتشار ـ المثلث الحسابي».

(١٩٥) انظر إلى شكل المثلث، في:

Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*

(١٩٦) ابن البنّاء، «رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب،» ص ١٦ (وجه الورقة).

(١٩٧) المصدر نفسه، ص ١٦ (ظهر الورقة).

(١٩٨) انظر: Meziriac, «Appendicis ad Librum de Numeris polygonis. Liber =

لكن الغريب في الأمر أن يكون ابن البنّاء قد اقتصر على درجتين من الأعداد الشكلية وأن تكون الصلة بين الأعداد الشكلية والتوافيق قد استنفدت بهذه السرعة.

ويتبلور سؤالنا إذن: لماذا ابتعد ابن البنّاء سريعاً عن هذا الموضوع فيما كانت بحوزته جميع الوسائل الحسابية والتوافيقية الضرورية لإقامة العلاقة بين الأعداد الشكلية والتوافيق بكل عموميتها؟ يبدو لنا أنّه للإجابة عن هذه الأسئلة، علينا الرجوع إلى مكانة أجزاء القواسم التامة والدوال الحسابية. ففي الفصل المكرّس للتوافيق الخاصة بنموذجين من الأعداد الشكلية، يبدو أن ابن البنّاء يهدف فقط إلى تبيان كيف يمكن للأعداد الشكلية أن تكون ذات نفع في حساب «توافيق الكلمات الثلاثية» في حقل المعجميين، ويهمل كلياً أجزاء القواسم التامة، إضافة إلى أنه في هذا الفصل نفسه تخلى عن الأعداد المتحابة لأنها «لا جدوى لها»[(١٩٩)]. والأمر يختلف كلياً عندما ينصرف الرياضي إلى دراسة أجزاء القواسم التامة ويكون عليه معرفة جميع التوافيق الضرورية لحساب عددها، إذ يجد نفسه مجبراً على الانتقال لمستوى آخر من العمومية، ولا يعود بإمكانه التوقف قبل ما أسماه باسكال فيما بعد «استعمال المثلث الحسابي للترتيب العددي» وفي الحقيقة فقد وجدنا كل هذا في بحث الفارسي.

وفي الواقع فإن وضع الأعداد الشكلية يختلف جذرياً حالما نريد الإجابة عن مسألة عدد أجزاء القواسم التامة، حيث لم تعد القضية مسألة هذه أو تلك من الأعداد المضلعة أو الهرمية والتي تهم الرياضي، بل هي الأعداد الشكلية من أي درجة كانت. إن مستوى من التجريد كهذا يستدعي صياغة عامة. لتشكيل هذه الأعداد الشكلية، يورد الفارسي صيغة تكافؤ العلاقة:

$$F_p^q = \sum_{k=1}^{p} F_k^{q-1} \qquad (3)$$

Secundus, Prop. 17,» la proposition suivante: «Si numerus secetur in duas partes, = tum in tres, tum in quatuor, tum in quinque, & sic deinceps, & quaelibet pars unius sectionis comparetur, cuilibet ex aliis partibus eiusdem sectionis, continget hanc comparationem in prima sectione fieri semel, in secunda ter, in tertia sexies, in quarta decies, & sic continue per numeros triangulos ascendendo»,

انظر: *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum* (1621), p.49.

ويقيّم باشيه العلاقة بين الأعداد الثلاثية والتوافيق الناتجة عن n شيء مأخوذة 2 معاً في كل مرّة، لكنه لا يثبت عموميّة التدليل.

(١٩٩) ابن البنّاء، المصدر نفسه، ص ١٧ (وجه الورقة).

حيث F_p^q هو العدد الشكلي ذو الرقم p والدرجة q وحيث $F_1^q = 1$. وباستخدام (3) ينشىء الجدول التالي كمثال على ما تقدّم[200].

جدول رقم (٤ - ٢)

عددها / مجاميعها		الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة	السادسة	السابعة	الثامنة	التاسعة	العاشرة
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
الأولى	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
الثانية	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
الثالثة	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
الرابعة	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
الخامسة	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
السادسة	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
السابعة	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
الثامنة	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
التاسعة	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756
العاشرة	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716

يبرهن الفارسي عبارة تكافىء العبارة:

$$F_p^q = \binom{p+q-1}{q} \qquad (4)$$

وهكذا يقيم صلة بين التوافيق والأعداد الشكلية من أية درجة كانت، وحول ما إذا كان بالإمكان من الآن فصاعداً الرجوع إلى جدول الأعداد الشكلية لمعرفة عدد أجزاء القواسم التامة، يكتب: «والطريق في استعلام الأجزاء الثنائية أو الثلاثية أو غيرهما عن أي عدة من الأضلاع كانت، إذا كانت أوائل ومتفاضلة جميعها، هو أن يطلب في سلسلة المجتمعات السميّة لعدد التأليف إلا واحداً، العدد الذي مرتبته - أعني أو أعدادها سمية لعدد الأضلاع إلاّ أعداد التأليف، فهو عدد تلك المؤلفة»[201].

لنفترض أن العدد المعطى يحلّل إلى n عامل أولي متمايز. للحصول على عدد أجزاء القواسم التامة لعدد m من العوامل، حيث $0<m<n$، نأخذ العنصر الموجود عند تقاطع الصف $(m-1)$ والعمود $(n-m)$، فإذا أكملنا جدول الفارسي بإضافة الصف والعمود المؤلفة جميع عناصرهما من واحد، أي من العوامل F_k^0 و F_1^k وأضفنا

(٢٠٠) الفارسي، تذكرة الأحباب في بيان التحاب، الفقرة ١٦.

(٢٠١) المصدر نفسه، الفقرة ١٧.

صفاً من عناصر F^1_k وهي الأعداد الطبيعية نحصل على F^m_{n-m+1} الذي هو بحسب (4) مساو لِـ $\binom{n}{m}$ (٢٠٢). لتكن G^m_n عناصر الجدول غير التام السابق فيكون إذن : $G^m_n = F^{m+1}_{n+1}$

لبرهان القضية السابقة يجري الفارسي عملية توافيقية بحتة فيطبق بصورة متتالية المثلث الحسابي المؤلف من عناصر كل منها عبارة عن توفيق p عنصر مأخوذ منها k عنصر في كل مرّة. من الواضح أن هذا الأسلوب التوافيقي الممتلك بصورة أفضل مما عند ابن البنّاء يهيمن على مجمل بحثه. هذا الشرح وهذا الأسلوب يطولان تاريخ التحليل التوافيقي بالقدر نفسه الذي يطولان فيه نظرية الأعداد. وقد يكون مناسباً إيراد الفارسي نفسه. فهو يبدأ بالنظر في حالة عدد طبيعي محلّل إلى خمسة عوامل أولية متمايزة وبالبحث عن عدد أجزاء القواسم التامة المؤلفة من عنصرين ليبرهن أنه مساوٍ لِـ $G^1_3 = F^2_4 = 10$. ويكرر الاستدلال نفسه بالنسبة إلى عدد محلّل إلى ستة عوامل أولية متمايزة، فيبرهن بواسطة صيغ توافيقية أن عدد أجزاء القواسم التامة المؤلفة من ثلاثة عناصر يساوي $G^2_3 = F^3_4 = 20$. ولأن القضية قد أثبتت في حالة خمسة عناصر مأخوذة اثنين منها في كل مرة، وفي حالة ستة عناصر مأخوذة 3 منها في كل مرة، يفترض الفارسي أن القضية صحيحة في حالة n عنصر مأخوذ منها k عنصر في كل مرة حيث $(1 \leqq k \leqq n)$ ويكتب:

«فليكن الأضلاع أ ب ج د ه ، فالثنائية منها لا تخلو إما أن يوجد في أضلاعها ه أو لا، والثاني إما أن يوجد فيها د أو لا، والثاني لا يخلو إما أن يُعدم فيها أ أو ب أو ج ، فالمؤلف الثنائي من ثلاثة ثلاثة وهي في المرتبة السمية لعدد الأضلاع إلا أعداد التأليف - اعني اثنين - وهي المرتبة الأولى من المجتمعات السمية لعدد التأليف إلا واحداً، أي الأولى $\left[\binom{3}{2} = 3 = G^1_1 = F^2_2\right]$ والتي يوجد فيها د من غير ه فيكون الضلع الآخر منها أحد أ ب ج الثلاثة الباقية، فهي ثلاثة أيضاً؛ فالمؤلفة الثنائية < من أ ب ج د > ستة. على القاعدة المذكورة، والتي يوجد فيها ه فيكون الضلع التالي أحد أ ب ج د الأربعة الباقية، فهي أيضاً أربع؛ فالمؤلفة <الثنائية> من هذه الخمسة عشر وهي من المجتمعات

---

(٢٠٢) ولا ينسى الفارسي بالتحديد F^0_k التي يدوّنها في الجدول إلى جانب المجاميع الأولى والثانية... إلخ.

الأول في المرتبة الثالثة، وهي سمية لعدد الأضلاع إلا أعداد التأليف»(٢٠٣).

وبسبب النقص في جدوله، لم يستطع الفارسي إعطاء جميع مراحل برهانه، وسنوجزه فيما يلي. يقوم الفارسي أولاً بإثبات أن:

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = F_2^2 + F_3^1 = F_1^1 + F_2^1 + F_3^1 = F_3^2$$

ثم:

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{2} + \binom{4}{1}$$

وبالتعويض يحصل على:

$$\binom{5}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} = F_1^1 + F_2^1 + F_3^1 + F_4^1 = F_4^2$$

هذا التوسيع لا يحرّف إطلاقاً المعنى الذي قصده الفارسي، ويجد تأكيده الجلي في البرهان الذي أعطاه للحالة التالية: 6 عوامل، عدد التوافيق 3 في كل مرة، ويكتب(٢٠٤):

«وليكن الأضلاع أ ب جـ د هـ ز فالثلاثية منها لا تخلو إما أن يكون أحد أضلاعها ز أو لا، والثاني إما أن يكون أحدها هـ أو لا، والثاني - أعني التي تكون مؤلفة من أ ب جـ د الأربعة فقط - فلا بد وألا يوجد منها واحد فقط من الأربعة، فهي أربعة، $\left[\binom{4}{3}\right]$ أي الأول من المجتمعة الثانية، $[G_1^2 = F_2^3]$ والتي لا يوجد فيها هـ من غير ز فيكون الضلعان الباقيان من كلٍّ منها ضلعي أحد المؤلفة الثنائية من الأضلاع الباقية - أعني أ ب جـ د - وهي ست $\left[\binom{4}{2}\right]$، فهذه أيضاً ست. فالثلاثية من أ ب ج د هـ [ز] الخمس عشر والتي يوجد فيها ز فضلعا كل منها الباقيان ضلعا أحد من المؤلفة الثنائية من أ ب جـ د هـ الخمس الباقية وهي عشر $\left[\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}\right]$، فهي الثلاثية أيضاً <وهي> عشر. فالثلاثية من أ ب جـ د هـ ز عشرون $\left[\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}\right]$ وهي من المجتمعات الثانية - التي هي سميّة لعدد

---

(٢٠٣) الفارسي، المصدر نفسه.

(٢٠٤) المصدر نفسه.

التـأليف إلا واحداً ـ في المـرتبة الثـالثة التي <هي> سميـة لعدد الأضـلاع إلا اعداد التـأليف. وإن كانت الأضلاع متفاضلة، بعضها، ومتساوية بعضها بعضها فنستخرج المؤلفة على القـانون المـذكور ثم نلقي المكررة وتكون الباقية سائر الأجزاء $[G_3^2 = F_4^3]$ ».

نـرى إذن أن الفارسي يتـابع مـا قام بـه سابقـاً فيستخدم النتـائج التي كـان قد حصل عليها للتو، ويثبت على التوالي:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = F_2^3 + F_3^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_3^3$$

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = F_4^3$$

لقد برهن الفارسي قضيته إذاً وذلك باللجـوء إلى استقراء ريـاضي قديم، لكنـه يصطدم بعقبة استدلال يطال إشارة مزدوجة ودون أن يكون لديه أي ترميز.

في حسابه للتوافيق المكرّسـة لتحديـد عدد أجـزاء القواسم التـامة لعـدد طبيعي يستعيد الفارسي إذن معاملات ثـنائية الحـد، لكنه يعـطيها تفسـيراً توافيقياً صرفاً. إن عملاً كهذا، مؤسساً للتحليل التوافيقي بحد ذاته، سمح أيضاً بفهم للأعداد الشكلية أكـثر عمـومية بمـا لا يقـاس ممـا يمكن أن نصـادفه عنـد السـابقـين والمعـاصرين المعـروفين من الفـارسي. فـالجـدول السـابق ـ المستعمـل من قبـل بـرنـولـلي (J.Bernoulli)[٢٠٥] ـ لا يمثل بالنسبـة إلى الفارسي سـوى أداة ملائمـة ونموذجـاً حسب

---

(٢٠٥) Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi*, 2nd ed. (Bruxelles: [s.pb.], 1968), p.114.

يكمـل برنـولي الجـدول مضيفـاً F_k^0 إلى F_i^k، ومن المفيـد مقارنـة الفارسي بـالشرح الذي أورده برنولي:

«Hine vero haud difficulter colligimus, uniones omnium serierum rursus efficere seriem monadun, bibiones seriem lateralium, terniones trigonalium, caeterasque combinationes majorum exponentium itidem constituere series aliorum figuratorum altioris generis, prosus ut combinationes praecedd. capitum, hoc solo cum discrimine, quod ibi series a cyphris, hic ab ipsis statim unitatibus incipiant», p.113.

ثم يُدخل جدوله الذي سبق أن أُعطي موجز عنه في «بحث» باسكال. انظر:

Oeuvres complètes, p.55.

ومن المرجح أيضاً أن يكون قد سبقه فرينكل إليه. انظر:

Coumet, «Mersenne, Frenicle et l'élėboration de l'analyse combinatoire dans la pre-=mière moitié du XVIIème siècle,» p.331.

تعبيره الخاص[٢٠٦]: «وقد وضعنا بعض المؤلفات مع أجزائها وأمثُلِها في هذه الجداول ليؤخذ منها ما يوجد فيها ويكون أمثلة لما عداها». وكان من أولى نتائج هذا التعميم تحويل لغة الرياضي في اتجاه أكثر تجريداً. صحيح أنه قبل الفارسي بكثير كان التمثيل الهندسي للأعداد المضلّعة قد أمسى مهملاً وأن استمراره هنا وهنالك كان مكرّساً لمساعدة مخيلة أولئك الذين يتلقون دروساً ابتدائية في الحساب. فكان طبيعياً إقصاء تمثيل كهذا من عمل بحثي كدراسة الفارسي، بل أكثر من ذلك، لم يبق فيه أي نعت هندسيّ للأعداد، وحتى التعابير - مثلثة، وهرمية... إلخ - التي تستخدم للدلالة على الأعداد الشكلية فقد اختفت، ولم يعد يتحدث الفارسي إلاّ بلغة المتسلسلات الجمعية - مُجْتمعات - من درجة كذا. وبعد ذلك بزمن طويل عبر علماء من أمثال فرينكل (Frenicle) وباسكال (Pascal) وبرنوللي (J.Bernoulli) بمفردات قريبة جداً من مفردات الفارسي[٢٠٧].

إذا ما قارنا بين دراسة معاصر للفارسي أي ابن البنّاء وبين بحث الفارسي، نجد أنه لا يختلف عنها بعموميته فقط بل في فحواه المغاير لها تماماً. لكن لو قارناه ببحث باسكال، أي بأول «استعمال للمثلث الحسابي» لكان جديراً بهذه المقارنة مع الأخذ بالاعتبار المشكلية المعالجة والعمومية التي تمّ التوصل إليها والهم البرهاني الذي حرّكه، رغم أنه بقي دون شك أصعب نفاذاً وأقل بساطة، وفي كلتا الحالتين، كما هو الحال أيضاً عند فرينكل، فالعمومية تضمنها معرفة مباشرة بدرجة أقل أو أكثر للمثلث الحسابي، غير أنها معرفة حقيقية دائماً. وفي جميع هذه الحالات لا بدّ من التمييز أيضاً بين هذا المسعى التوافيقي وبين مسعى آخر حسابي ليس أقل عمومية منه. ولكي نوضح هذا الفارق الأساسي هنا، لنأخذ بتفسير محتمل للقضية التي أعطاها فيرما (Fermat) في رسالته XII الشهيرة. حيث يكتب: «لدينا في متوالية طبيعية ضعف المثلث الذي ضلعه العدد الأخير، فإذا ضربنا هذا العدد بالعدد الأكبر منه مباشرة نحصل على ثلاث مرّات الهرم الذي ضلعه العدد الأخير، وإذا ضربنا هذا العدد بمثلث العدد الأكبر منه مباشرة نحصل على

= ثم ظهر الجدول في العديد من الأبحاث الحسابيّة، انظر مثلاً:
Deidier, *L'Arithmétique des géomètres, ou nouveaux éléments de mathématiques*, p.322.

(٢٠٦) الفارسي، المصدر نفسه، الفقرة ١٦.

(٢٠٧) يتحدث فرينكل عن «القوى المثلثة». انظر:
Frenicle, «Abrégé des combinaisons», p.54.
ويتحدث باسكال عن «الدرجات العددية»، المصدر نفسه، وبرنوللي عن «متسلسلات لصور اخرى من درجة أعلى»، المصدر نفسه: «Series aliorum figuratorum altioris generis».

أربعـة أضعاف مثلث ـ مثلث العـدد الأخير، فـإذا ضربنا هـذا العدد بهرم العدد الأكـبر منه مبـاشرة وهكذا دواليك إلى ما لا نهاية بطريقة منتظمة»[٢٠٨].

وتكتب هذه القضية: $F_p^q = \frac{p}{q} F_{p+1}^{q-1}$

لا يهمنا في شيء هنا مـا إذا كانت هـذه النتيجة قـد برهنت قبـل فيرمـا[٢٠٩]، إذ سنولي اهتماماً أكبر للطريق التي سمحت لـه بالتـوصل إليهـا والتي لا يمكننا معـرفة أي شيء أكيد عنها في غياب البرهان[٢١٠]. ويبدو أن عبـارة «الطريقـة المنتظمـة» يُقصد بهـا الدلالة على اللجوء إلى استقراء غير تـام بالضرورة، وغـير توافيقي[٢١١] عـلى الأرجح،

---

(٢٠٨) Tannery et Henry, *Oeuvres de Fermat,* vol.3, pp.291-292.

(٢٠٩) يؤكد فيرما أن المقصود هو اكتشافه الخاص ويكتب:

«Propositionem pulcherrimam et mirabilem, quam nos invenimus, hoc in loco sine demonstratione apponemus...»,

انظر: المصدر نفسه، ج ١، ص ٣٤١. لكن هنري يعتبر أن هذه النتيجة «قد اعـطيت سابقـاً من قبل بريغز (Briggs)»، انظر: المصدر نفسه، ج ٤، ص ٢٣٤.

(٢١٠) انظر: المصدر نفسه، ج ١، ص ٣٤١، حيث يكتب فيرما:

«Cujus demonstrationem margini inserere nec vacat, nec licet».

(٢١١) المقصود إذاً ـ حسب فيرما ـ «طريقة منتظمة»، يتطلب تحريرها مكاناً أوسع من الهامش المعطى لها في مطبوعة باشيه عن «المسائل العددية» لديـوفنطـس. ومع ذلـك تبدو تـوجيهاتـه شديـدة الإيجاز وملائمة لبرهان يشبه البرهان الذي سنعطيه هنا، أكثر من ملاءمتها لبرهانٍ بوسائل توافيقية، إذ إن الأخير ينجز حالما نحدّد معاملات ثنائيات الحدود والأعداد الشكلية أي:

$$F_{p-q+1}^q = \binom{p}{q}$$

وينتج عن ذلك:

$$F_p^q = \binom{p+q-1}{q}$$

إذن:

$$pF_{p-1}^{q-1} = p\frac{(p+q-1)\dots(p+1)}{(q-1)!} = q\frac{(p+q-1)\dots p}{q!} = qF_p^q$$

بخلاف البرهان السابق. سنعطي برهاناً حسابيّاً أطول، وبالتـالي أصعب من البرهـان السـابق. نثبت أولاً المقدمة التالية: مقدمة:

$$F_{n+p}^q = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=q}}^{q} F_n^i F_p^j$$

تتحقق العلاقة السابقة مباشرة في حال $q = 1$.

وفي حال $q = 2$، فإننا نحصل على:

وكان يسمح به الاستعمال حتى قبل فيرما (Fermat) بكثير. صحيح أن مساهمة الفارسي كما مساهمات فرينكل (Frenicle) وباسكال (Pascal) فيما بعد، كانت أقل

$$F_{n+p}^2 = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) + \ldots + (n+p)$$ =

$$= F_n^2 + F_n^1F_p^1 + F_p^2 = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=2}}^{2} F_n^iF_p^j.$$

لنفترض أن العلاقة السابقة صحيحة في حال q، ولندرس:

$$F_{n+p}^{q+1} = F_1^q + \ldots + F_n^q + F_{n+1}^q + \ldots + F_{n+p}^q$$

معتمدين على تعريف الأعداد الشكلية. فنحصل من استعمالنا للإستقراء على:

$$F_{n+p}^{q+1} = F_n^{q+1} + \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=q}}^{q} F_n^iF_1^j + \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=q}}^{q} F_n^iF_2^j + \ldots + \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=q}}^{q} F_n^iF_p^j$$

لذا فإن:
$$F_{n+p}^{q+1} = F_n^{q+1} + F_n^0\sum_{k=1}^{p} F_k^q + \ldots + F_n^q\sum_{k=1}^{p} F_k^0$$

وبحسب تعريف الأعداد الشكلية فإن:

$$F_{n+p}^{q+1} = F_n^{q+1} + F_n^0F_p^{q+1} + \ldots + F_n^qF_p^1$$

لكن:
$$F_n^{q+1} = F_n^{q+1}F_p^0$$

إذن:
$$F_{n+p}^{q+1} = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=q+1}}^{q+1} F_n^iF_p^j$$

قضية:
$$qF_p^q = pF_{p+1}^{q-1}$$

باستخدامنا المقدمة، نستطيع أن نكتب:

$$F_{p+1}^{q-1} = F_p^{q-1} + F_p^{q-2}F_1^1 + \ldots + F_p^{q-p-1}F_1^p + \ldots + F_1^{q-1},$$

$$F_{p+1}^{q-1} = F_{p-1}^{q-1} + F_{p-1}^{q-2}F_2^1 + \ldots + F_{p-1}^{q-p-1}F_2^p + \ldots + F_2^{q-1},$$

....

$$F_{p+1}^{q-1} = F_{p-k}^{q-1} + F_{p-k}^{q-2}F_{k+1}^1 + \ldots + F_{p-k}^{q-p-1}F_{k+1}^p + \ldots + F_{k+1}^{q-1},$$

....

$$F_{p+1}^{q-1} = F_1^{q-1} + F_1^{q-2}F_n^1 + \ldots + F_1^{q-p-1}F_n^p + \ldots + F_n^{q-1};$$

إذا جمعنا الأعمدة تباعاً، نحصل في كل مرّة على F_p^q، لأن:

$$F_{p-q}^{q-p-1}F_{k+1}^p = F_{q-p}^{p-k-1}F_{p+1}^k$$

وحسب تعريف الأعداد الشكلية F_p^q، يصبح لدينا:
$$\sum_{k=0}^{p-1} F_{q-p}^{p-k-1}F_{p+1}^k = F_{q+1}^{p-1} = F_p^q$$ =

بساطة من حيث استخدامها لوسائل أخرى غير الوسائل الحسابية البحتة، غير أنها تستمد عموميتها في الوقت نفسه من التفسير التوافيقي ودراسة دالة «عدد أجزاء القواسم التامة». ولكن هذه الدراسة الأخيرة بالتحديد هي التي أثارت التفسير إياه. كذلك لا يمكن لدراسة الفارسي أن تكون قد عولجت سابقاً من قبل رياضيين من أصحاب التقليد القديم الذين لم يهتموا إلّا بالأعداد الشكلية فقط(٢١٢).

استنتاج حول النظرية الكلاسيكية للأعداد

ومع ثابت بن قرّة نصبح بالفعل ضمن إطار الحساب الهيلينستي، فهو نفسه ترجم إقليدس ونيقوماخوس الجرشي، وعلى خطى هؤلاء بالذات أدرك وحقق نظرية للأعداد المتحابّة. فأبحاثه حول الأعداد التامّة واكتشافه في حقل الأعداد المتحابّة، وأعمال لاحقيه (كالبغدادي مثلاً) تندرج جميعها ضمن هذا الاتجاه الحسابي الهيلينستي. وبينما كان هذا الاتجاه الأخير كغيره من الاتجاهات الحسابية الباقية هدفاً لتنشيط كثيف انشغل الجبريون من جهتهم بتوسيع بل بتجديد علمهم، فتم لهم إنجاز هذه المهمة بواسطة الحساب كما بيّنا ذلك في مكانٍ آخر. غير أن ما يهمنا هنا هو الإشارة إلى الدور المركزي لهذا الجبر في تطور نظرية الأعداد.

وهكذا تمّ في القرن العاشر، من قِبل رياضيين كالخازن مثلاً، إعداد التحليل الديوفنطسي الصحيح، وهو فصل مهم في هذه النظرية تبعاً لهذا الجبر من ناحية، وخلافاً له من نواحٍ أخرى. ففي هذا القرن وبداية القرن التالي وبالإرتباط بهذا التحليل، طرحت إحدى المسائل المركزية في نظرية الأعداد وهي مسألة البحث عن الشرط الكافي والضروري الذي يميّز الأعداد الأولية. وقد بيّنا في حينه، كيف أن ابن الهيثم صاغ هذه المسألة وكيف أنه استطاع الإجابة عنها بواسطة نص مبرهنة ويلسون.

= ونحصل أخيراً على:

$$pF_{p+1}^{q-1} = qF_p^q$$

يمكن تشبيه أسلوب هذا البرهان المبني مباشرة على تعريف الأعداد الشكلية وعلى المقدمة السابقة، بالأسلوب الذي فكّر به فيرما عندما كتب هذه الملاحظة، أي حوالى سنة ١٦٣٨، وفق التعيينات الأخيرة لتواريخ الرسالة السابعة.

(٢١٢) إن قراءة البحث الجبري الفارسي، أي تعليقه على «بهائية» ابن الخيام، تكشف إلفة مع الطرائق التوافيقية، وهكذا، ولاحتياجات جبريّة، كأن يأخذ مربع كثيرة حدود ويبرهن أن عدد تباديل n حدّ مأخوذة اثنين في كل مرّة هو n^2. انظر فصل استخراج الجذور.

هذه الجدلية بين الحساب والجبر تشتمل أيضاً على فصل كامل في التحليل العددي وفصل آخر مكرّس لحل المعادلات العددية. وإذا لم نتناول سوى نظرية الأعداد وحدها فقد بيّنا هذه المرة أن مثل هذه الجدلية لم توفر حتى الإرث الإقليدي أيضاً. بفضل الطرق الجبرية استطاع الفارسي إنشاء فصل جديد يمكن تسميته بأجزاء القواسم التامة والتأويل التوافيقي للأعداد الشكلية. إن إدخال الطرق الجبرية ذاتها لم يكن في الحقيقة يخضع لأي تخطيط مسبق دقيق الإعداد والتهيئة النظرية، بل فرض نفسه ببساطة على رياضي نشأ حسب تقليد الجبريين ووجد نفسه تجاه مسائل الحساب الإقليدي، فقدم له هذا الإدخال وسيلة مغادرة إطار هذا الحساب موضعيّاً على الأقل كي يرتبط بالمجال الواسع للنظرية الكلاسيكية للأعداد. ضمن هذا التقليد ستتعايش من الآن فصاعداً مع الحساب الإقليدي أجزاء وفصول لم تعد إقليدية صرفة، وقد سبق أن أشرنا إلى اثنين منها ونستطيع الآن أن نضيف إليها هذا الفصل عن أجزاء القواسم التامة والأعداد الشكلية.

نلاحظ عند قراءة مؤرخي الرياضيات أن الإكتشافات والنتائج التي ذكرناها للتو تعتبر بشكل عام نتاج رياضيي النصف الأول من القرن السابع عشر إن لم يكن القرن الثامن عشر، وأكثر من ذلك فإلى هذه النتائج بالتحديد يتم الإستناد في تعريف عقلانية جديدة للحساب. ألم يجر التأكيد غالباً على أن دراسة ديكارت (Descartes) وفيرما (Fermat) لأجزاء القواسم التامة قد افتتحت عصراً جديداً، وأن دراسة الأعداد الشكلية من قبل فرينكل (Frenicle) وباسكال (Pascal) تعبّر عن عقلانيّة جديدة؟ ولكن الأبعد من الخطأ التاريخي البسيط هو أن احتقاراً للحقيقة كهذا يهدد بتزييف فهم التاريخ لنظرية الأعداد في القرن السابع عشر نفسه، إذ إنه لكثرة الإصرار على رؤية الجدة في المكان الذي ليست فيه، ننتهي بألا نراها حيث توجد فعلاً.

فالجهل بمكانة نظرية الأعداد في الرياضيات العربية قاد إلى الظن بأن هذا الفصل حول أجزاء القواسم التامّة والأعداد الشكلية، والتحليل الديوفنطسي الصحيح أيضاً، هو من عمل رياضيّي النصف الأول من القرن السابع عشر. إن ما يعود حسب تصورنا إلى تحديد أصالة هؤلاء هو إدخالهم الطرق الجبرية في نظرية الأعداد. ويصبح خطر الالتباس بشأن فيرما أكبر، وكذلك التقليل من أهمية نتاجه الذي لم يكن تطوره في الواقع كاستمرار لنظرية الأعداد المجبرنة هذه، إذا صح التعبير، بل بالقطع معها.

ولن نستطيع عندئذ وبالوضوح اللازم استخلاص البداية لنظرية حسابية خالصة للأعداد عام ١٦٤٠ تقريباً وهذه مسألة نتناولها بإسهاب في مكان آخر(٢١٣).

وخلاصة القول حول الرياضيات العربية، فإن الفرضية القائلة بكون نظرية الأعداد هي حلقتها الأضعف لا تصمد أمام الوقائع التي استطعنا إعادة تشكيلها خلال دراساتنا المختلفة، فقد بيّنا في الحقيقة أن التحليل الديوفنطسي الصحيح والبحث عن معيار للتعرف إلى الأعداد الأولية وأجزاء القواسم التامة والأعداد الشكلية، جميعها فصول من هذه النظرية الجديدة للأعداد التي أعدّت انطلاقاً من القرن العاشر. فهذه الفصول وحدها تكفي لفرض مراجعة لتاريخ النظرية الأولية للأعداد وتفرض نفسها قبل أي تصحيح للتعاقب التاريخي الذي اصطلح على القبول به. لا شيء يسمح في الحقيقة بفصل أعمال رأت النور في القرن العاشر عن تلك التي أنجزت خلال القرون اللاحقة حتى عام ١٦٤٠ وضمن النطاق الذي كانت فيه النتائج والطرق تصدر في الواقع عن موضوع الحساب نفسه. هذه النظرية الكلاسيكية للأعداد تعقب المرحلة الهيلينستية وهي سابقة على النظرية الجديدة التي رأيناها تبدأ في أعمال فيرما.

(٢١٣) انظر مقدمة: Rushdi Rashed, *Arithmétiques de Diophante* (Paris: Les Belles Lettres, [s.d.]).

مُلحَق

مفهوم العلم كظاهرة غربية وتاريخ العلم العربي(*)

إن القول بأنّ العلم الكلاسيكي هو في جوهره أوروبي وبأنه يمكننا أن نظهره على أصوله بصورة مباشرة في الفلسفة والعلوم عند اليونان، هذا القول، خلافاً لما تعوّدناه في تاريخ الفلسفة والعلوم، لم يلحقه تغيير يذكر خلال القرنين الأخيرين، رغم كلّ ما شهدناه من صراعات شتّى قامت حول تأويل الظواهر في هذا الميدان. فقد قبل الفلاسفة دون استثناء ـ أو كادوا ـ هذا القول وأخذوا به كمصادرة لتعريف العقل الكلاسيكي نفسه. هكذا نرى كلا من كانط (Kant) وكونت (Comte)، وكلا من الكانطيين الجدد والوضعيين الجدد، كما نرى كلاًّ من هيغل (Hegel) وهوسرل (Husserl)، وكلاًّ من الهيغليين والظواهريين والماركسيين، نرى كل هؤلاء يعتمدون هذه المصادرة أساساً يقيمون عليه تفسيرهم للحداثة الكلاسيكية.

فحتى يومنا هذا، تُساق أسماء باكون (Bacon) وديكارت (Descartes) وغاليلو (Galilée)، للدلالة على المراحل التي قُطعت بعد استئناف المسيرة عقب عصور الانحطاط، وكمعالم بارزة على طريق العودة الثورية إلى فلسفة اليونان وعلمهم. وإن أغفل البعض ذكر اسم الأول وأضاف البعض أسماء آخرين، فالجميع يتصوّرون هذا الرجوع إلى العلم والفلسفة اليونانيين كطلب نموذج يُسار على منواله وكاستعادة مثال يحتذى به، كما يشهد على ذلك لجوء كلٍّ من برنشفيك (Brunschvicg)[1] وكواريه

(*) ترجمة أحمد حسنواني، الخبير بالمركز القومي الفرنسي للبحث العلمي.

(١) فيلسوف فرنسي، اهتم بخاصة بفلسفة العلم وتاريخه (١٨٦٩ ـ ١٩٤٤). ومن بين مؤلفاته في هذا المجال، انظر: =

(Koyré)[1]، في تعريفه المجازي للعلم الكلاسيكي، إلى وصفه بأنّه أفلاطوني أو أرخميدسي.

قد يسوّل لنا أن نعزو هذا الإجماع من جانب الفلاسفة إلى منهجهم الذي يدفع بهم إلى تخطي المعطيات التاريخية المباشرة، وإلى تبنّيهم موقفاً جذرياً من الأمور، وحرصهم على إدراك ما يسمّيه هوسرل «الظاهرة الأصلية التي تميّز أوروبا من الناحية الروحية». وبالتالي كان من حقنا أن نتوقع تغير الوضع عندما نولي أنظارنا شطر أولئك الذين يتناولون مباشرة حقائق تاريخ العلوم. ولكن لا تلبث أن تخيب آمالنا، إذ نرى مؤرخي العلوم يتخذون تلك المصادرة بعينها كمنطلق لأعمالهم ولتفسيرهم لتلك الحقائق خاصة. ولا نكاد نجد خلافاً يذكر، في تاريخ الطبيعيات، بين بوغندورف (Poggendorf)[3] و روزنبرغر (Rosenberger)[4]، ودوهيرنغ (Dühring)[5] وجيرلند (Gerland)[6] من ناحية، وبين دوهايم

Léon Brunschvicg: *Les étapes de la philosophie mathématique* (1913), et *L'expéri-* = *ence humaine et la causalité physique* (1922).

(٢) وُلد بروسيا، ودرس الفلسفة والرياضيات بفرنسا وألمانيا (١٨٩٢ - ١٩٦٤). ثم درّس تاريخ العلوم وتاريخ الفلسفة بفرنسا، وبجامعة القاهرة، وبالولايات المتحدة الامريكية. وله عدّة مؤلفات في هذين الميدانين نذكر من بينها:

Alexandre Koyré: *Etudes galiléennes* (1939); *From the Closed World to the Infinite Universe*, Publications of the Institute of the History of Medicine, The Johns Hopkins University, 3d. Ser: The Hideyo Noguchi Lectures, vol.7 (Baltimore, Mad Johns Hopkins, 1957), et *La révolution astronomique: Copernic, Kepler, Barrelli*, Ecole pratique des hautes études, sorbonne, histoire de la pensée, 3 (Paris: Hermann, 1961).

(٣) هو عالم الفيزياء الألماني والمؤرخ لها (١٧٩٦ - ١٨٧٧)، اشهر مؤلفاته، انظر:

Johann Christian Poggendorff, *Biographisch - Litterarisches Handwörterbuch für Mathematik, Astronomic, Physik mit Geophysik, Chemie,...* 7 vols. in 24 (Berlin: Verlag, 1863).

(٤) هو المؤرخ الألماني للعلوم الطبيعية (١٨٤٥ - ١٨٩٩)، عرف بخاصة بكتابه:

Ferdinand Rosenberger, *Die Geschichte der Physik*, 3 vols. (1883-1890).

(٥) فيلسوف ألماني وعالم من علماء الاقتصاد (١٨٣٣ - ١٩٣١). ويشير المؤلف هنا إلى كتابه:

Eugen Dühring, *Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik* (1873).

(٦) هو عالم الفيزياء الألماني والمؤرخ لها (١٨٣٨ - ١٩١٠)، اشتهر بـ:

Ernest Gerland, *Geschichteder Physik von den ältesten zeiten bis zum Ausgange des* = *achtzehnten Jahrhunderts* (München: R. Odlenboury, 1913),

(Duhem)(٧) من ناحية أخرى؛ كما لا نجد خلافاً يذكر في تاريخ الرياضيات بين تانري (Tannery)(٨) وكنتور (Cantor)(٩) وبورباكي (Bourbaki)(١٠). فجلّ المؤرخين، سواء اعتبروا قيام العلم الكلاسيكي كنتيجة فصم عن العصر الوسيط، أو انحازوا إلى الرأي القائل بتواصل غير منقطع بينهما، أو تبنوا، كأغلبهم، موقفاً توفيقياً، فهم يتفقون على الإقرار بالمصادرة نفسها، إقراراً يتفاوت وضوحاً وغموضاً.

وحتى يومنا هذا، نجد المؤرخين يقبلون في أعمالهم هذه المصادرة، وذلك على الرغم من أعمال ويبك (Woepcke)(١١) وسوتر (Suter)(١٢) وويدمان

= وبكتاب: Ernest Gerland and Tranmüller, *Geschichte der physikalischen experimentierkunst* (1899).

(٧) فيزيائي فرنسي ومؤرخ للعلوم (١٨٦١ - ١٩١٦). ومن بين مؤلفاته في تاريخ العلم:
Pierre Maurice Marie Duhem: *Les Origines de la statique: Etudes sur Léonard de Vinci* (1906-1913), et *Le Système du monde: Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, 2nd ed., 6 vols. (Paris: Hermann, 1913-1959).

(٨) مؤرخ العلوم الفرنسي (١٨٤٣ - ١٩٠٤)، من أعماله، أنظر:
Paul Tannery: *Pour l'histoire de la science hellène* (1887); *La Géométrie grecque*, (Paris: [s.pb.], 1887), et *Recherches sur l'histoire de l'astronomic ancienne* (Paris: [s.pb.], 1893).
وقد حقّق أعمال ديوفنطس، كما شارك في تحقيق أعمال فيرما Fermat وأعمال ديكارت. وجُمعت مقالاته المتعذرة في ستّة عشر جزءاً تحت عنوان: *Mémoires scientifiques.*

(٩) أحد رواد تاريخ الرياضيات في ألمانيا في أواخر القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين (١٨٢٩ - ١٩٢٠). واشتهر بخاصة بكتابه:
Moritz Benedikt Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der mathematik*, 4 vols. (Leipzig: Teubner, 1880-1908).

(١٠) اسم منتحل يختفي وراءه جماعة من بارزي الرياضيين الفرنسيين ويعرف «بورباكي» بـ «عناصر الرياضيات» *Eléments de mathématiques*، ظهرت في القرب من ثلاثين كراسة، منذ عام ١٩٣٩، وتحتوي على ملاحظات تاريخية متفرّقة، جمعت في كتاب قائم بذاته:
Nicolas Bourbaki, *Eléments des mathématiques* (Paris: Hermann, 1960)

(١١) وهو المؤرخ المشهور للجبر العربي. وُلد ونشأ بألمانيا. ثم استقر بفرنسا ومكث بها حتى وفاته (١٨٢٦ - ١٨٦٤). حقّق «المقالة في الجبر والمقابلة» للخيام، وترجمها إلى الفرنسية تحت عنوان:
Franz Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Al-Khayyāmī* (Paris: [s.pb.], 1951), et *Extrait du Fakhrī: Traité d'algèbre* (Paris: [s.pb.], 1853).
حيث قدّم في هذا الأخير تلخيصاً لنص الكرجي وتعليقاً متصلاً عليه. ولويبك عدة دراسات قيمة في تاريخ الرياضيات العربية.

(١٢) مستشرق سويسري اختص بتاريخ الرياضيات العربية، ويعد كتابه الذي دوّن فيه لأعمال الرياضيين والفلكيين العرب مرجعاً (١٨٣٨ - ١٩٢٢)، انظر: =

ومن أعمال فيدمان (Wiedemann)[13] ولوكي (Luckey)[14] في ميدان تاريخ العلم العربي، ومن أعمال نيدهام (Needham)[15] في مجال تاريخ العلم الصيني، على الرغم مما أتى به أخيراً «معجم السير العلمية»[16]. وأكثر من ذلك: ففي حين أن مفهوم تاريخ العلوم في ذاته أصبح - وكذلك مناهجه - منذ قليل، محل نزاع ونقد، فهناك اتفاق ضمني على ترك القول الذي نحن بصدده خارج النقاش، وبالتالي، على جعله في مأمن من الشك. ويتّفق على ذلك دعاة التحليل الداخلي ودعاة التحليل الخارجي، والقائلون بالتواصل والقائلون بالانقطاع، والدارسون للعلم كظاهرة اجتماعية والمحللون للمفاهيم العلمية. وهكذا نصادف من جديد التصوّر نفسه: وهو أن العلم الكلاسيكي، سواء في حداثته أو في أصوله التاريخية، يبدو، آخر الأمر، كنتاج الإنسانية الأوروبية دون سواها؛ بل أكثر من ذلك، فإنه يبدو كالميزة الأساسية التي تعرف بواسطتها هذه الإنسانية. فالنشاط العلمي للإنسانية الأوروبية يشكل وحده، دون سواه، في هذا التصوّر، موضوع التاريخ. وإن اعترف بنوع من الممارسة العلمية للحضارات الأخرى، إلّا أن هذه الممارسة العلمية تظلّ خارج التاريخ، أو إن أدرجت في سياقه لم يتم لها ذلك إلّا بوصفها مساهمات للعلوم الأوروبية أساساً. ولا تعتبر هذه المساهمات

= Heinrich Suter, *Die Mathematiker, und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Leipzig: Teubner, 1900).

وله كذلك عدّة مقالات تتناول نقاطاً معيّنة من تاريخ الرياضيات العربية.

(١٣) فيزيائي ألماني، عني بتاريخ العلوم الطبيعية العربية (١٨٥٣ - ١٩٣٨). وأصدر، بين عام ١٩٠٣ وعام وفاته، علاوة على مقالات متفرّقة في عدّة حوليات، سلسلة من الدراسات في تاريخ العلوم العربية، سماها «إسهامات في تاريخ العلوم الطبيعية»:

«Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften».

وظهرت هذه المقالات، في:

Sitzungsberichten der Physikalisch - Medizinischen Sozietät zu Erlawgen.

(١٤) هو مؤرخ الرياضيات الألماني، وتدور أعماله حول تاريخ الحساب العربي خاصة، ونذكر منها: Paul Luckey, *Die Rechenkunst bei Ǧamšid b. Mas'ūd al-Kāšī* (Wiesbaden: Steiner, 1951).

(١٥) وُلد عام ١٩٠٠ بانكلترا. وأصدر، مع جماعة من المشاركين، كتاباً يعدّ مرجعاً في تاريخ العلم الصيني بعنوان:

Joseph Needham, *Science and Civilization in China,* 6 vols. in 12 (Cambridge, [Eng.]: University Press, 1954-1986).

(١٦) Charles Coulston Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner, 1970-1978).

إلّا مجرد تكميلات فنية لهذه العلوم الأوروبيّة، لا تغير بحال من الأحوال تشكيلها الفكري العام أو الروح التي تميزها. وتشكّل الصورة المرسومة للعلم العربي مثلاً بليغاً عن هذا النهج: فما العلم العربي، وفقاً لهذه الصورة، إلّا متحف للتراث اليوناني، نقل ـ كما هو أو بعد أن أضيفت إليه بعض التجديدات الفنية ـ إلى ورثته الشرعيين، أي الأوروبيين. وعلى أية حال، لم يدمج النشاط العلمي الذي نشأ وطوِّر خارج أوروبا بصورة عضوية في تاريخ العلوم، بل ظل موضوعاً تعنى به «اثنوغرافية العلم»، الذي كان الاستشراق ترجمتها في ملك الدراسة الجامعية.

ولا يقتصر مدى هذا القول على مجال العلم، وتاريخه وفلسفته، فكلّنا يعرف جيداً وجه استخدام هذا المفهوم إبّان القرن التاسع عشر؛ كما أن الكل يعرف أنه محور الجدال الذي يحمل اليوم العنوان نفسه الذي كان يحمله بالأمس: الجدال بين التجديد والتقليد. فكما كانت الحال في القرن الثامن عشر في أوروبا، يقرن العلم اليوم ـ وقد وصف بأنه أوروبي ـ بالحداثة في النزاع القائم بين القدماء والمحدثين في بعض أقطار البحر الابيض المتوسط والأقطار الآسيوية التي تجتاز مرحلة البحث عن الذات. ومؤرخ العلوم، عندما يتدبّر، بصفته مؤرخاً مفهوم العلم كظاهرة غربية، لا يثير مسألة تتعلق بتخصصه العلمي فحسب، ولكن بوسعه أن يساهم أيضاً في الإجابة عن سؤال مطروح في يومنا هذا.

ولنقلها دون مواربة: إن مقصدنا هنا ليس استرجاع حقوق هضمت، ولا إقامة معارضة بين علم وصف بأنه أوروبي وعلم نزعم بدورنا أنه شرقي. بل كل ما نرمي إليه هنا هو أن نفقه المغزى الكامن في وصف وتحديد العلم الكلاسيكي بالأوروبية، وأن ندرك الأسباب التي دعت إلى هذا التحديد، الجغرافي على الأقل و«الانتروبولوجي» بلا مراء لظاهرة عالمية بالضرورة وبحكم التعريف.

ولهذا سنبدأ برسم المعالم التاريخية لمفهوم العلم كظاهرة غربية، الذي تدل الدلائل كلها على أنه مفهوم صادر عن أصول متعددة ومتنوعة. ثم سنقابل هذا المفهوم والمذهب المتعلق به، بحقائق تاريخ العلوم. ولأسباب واضحة، لا يمكننا أن نقدم في نطاق هذه الدراسة، عرضاً نستنفد فيه كل النقاط المثارة، فضلاً عن إدعائنا تقديم عرض نهائي. ولكن سنكتفي بطرح المسألة على بساط البحث، وباقتراح بعض الفرضيات ملتزمين بقيدين في دراستنا هذه: أولهما، أن العلم غير الأوروبي الوحيد الذي سنأخذه بعين الاعتبار هو ذلك العلم الذي كان نتاج شعوب متنوعة، وعلماء

اختلفت عقائدهم وأديانهم ولكنهم حرّروا معظم أعمالهم العلمية، إن لم يكن جميعها باللغة العربية. وثانيهما، أننا سنحيل في أغلب الأحيان، في عرضنا لآراء مؤرخي العلوم، إلى مؤلفات المؤرخين الفرنسيين.

يرد مفهوم العلم الأوروبي في أعمال مؤرخي القرن الثامن عشر وفلاسفته. ويقوم في هذه الأعمال بوظيفتين مترابطتين رغم اختلافهما. فإضافة إلى كونه وسيلة لتعريف الحداثة في سياق جدال عقائدي امتدّ طوال هذا القرن، فهو يمثل عاملاً بنائياً لسرد تاريخي ساذج ذي أهداف جدلية نقدية. ففي الجدال المتعلق بـ«القدماء والمحدثين» الذي كان قد أثير من قبل، أشار العلماء والفلاسفة، في تعريفهم للحداثة، إلى ذلك العلم الذي جمع فيه بين الاستدلال بالقياس والتجربة. فهكذا نرى باسكال (Pascal) في مقدمة «المقالة في الخلاء»، ثم إلى حدّ ما، مالبرانش (Malebranche) في «البحث عن الحقيقة» يحاولان، منذ بداية القرن السابع عشر، تبيان تفوّق المحدثين(١٧). فبالاعتماد على الاستقراء التاريخي، أو بالأحرى على الاستقراء التاريخي المزعوم، كان هم المحدثين توفير التحديدات الملموسة لهذا الجدال العقائدي، بحيث يبدو تفوقهم أمراً لا مراء فيه. وقد كان هذا أحد الأسباب، بل وليس أقلّها، التي دعت إلى إدخال تاريخ العلوم كفن مستقل، في القرن الثامن عشر. ولكن كان في هذه اللحظة قد تم تمثيل الغرب بأوروبا وأقيمت المعارضة بين «الحكمة الشرقية» والفلسفة الطبيعية الغربية في الصيغة التي اتخذتها بعد نيوتن (Newton)، كما يظهر ذلك على سبيل المثال في «الرسائل الفارسية» لمونتسكيو (Montesquieu)(١٨).

وزيادة على هذا الدور النقدي الجدلي الذي قام به مفهوم العلم الغربي في هذا النزاع المتواصل المتجدد، كان لهذا المفهوم أيضاً دور في صياغة تصور للتاريخ، هذا التصور الذي يعتبر التاريخ كتعاقب لمراحل نمو العقل الإنساني. كذلك ظهر مفهوم العلم الغربي لتمييز مرحلة من مراحل الحركة المتدرجة للعقل الإنساني؛ هذه الحركة

---

(١٧) انظر باسكال، في: *Oeuvres complètes* (Paris: [s.pb.], 1963), p.231.

انظر أيضاً: Nicolas Malebranche, *De la recherche de la vérité, où l'on traite de la nature de l'esprit de l'homme et de l'usage qu'il en doit fuire pour éviter l'erreur dans les siences*, 3 vols. (Paris: Vrin, 1910), vol.1, p.139.

(١٨) انظر مونتسكيو، في: *Oeuvres complètes* (1964).

انظر الرسالتين رقم (١٠٤) و(١٣٥)، وبخاصة الرسالة رقم (٩٧).

التي كـان يحكمهـا في الـوقت نفسـه، تـرتيب تـراكمي وتخلص متصـل من الأخـطاء المكتسبة. فعلى سبيل المثال، عنـدما يـذكر كنـدورسيه (Condorcet)[19] أسـاء باكـون وغاليلو وديكارت لتعيين الحداثة ـ شأنه في ذلك شأن كثيرين من بعده ـ فإنه إنما يفعل ذلـك للإشـارة إلى الانتقـال من «الحقبـة الثـامنـة» إلى «الحقبـة التـاسعـة» من «اللوح التاريخي»[20] لإنسانية يتطابق مستقبلها، في نظره، مع انتشار للتنوير غـير محدود. فمن وجهة النظر هذه، لا يكون العلم الكلاسيكي أوروبياً وغربياً إلاّ بقدر ما يمثّل مرحلة من مـراحل التـابع المتـواصل والمقيم لكيـان واحد بعينـه: الإنسانيـة. فبـالنسبـة إلى فونتنيل[21] ودالمبار[22] وكندورسيه، سيكون من العبث قراءة أصول العلم الكـلاسيكي في الفلسفـة والعلم اليونـانيين فقط، إذ إن وصف العلم الكـلاسيكي بأنـه أوروبي لا يـراد به عنـدهم أي وصف «انتروبـولوجي»، وإنمـا يعبّر فقط عن تـطابق بين تـاريـخ تجريبي وتاريخ مثالي هو حقيقة التاريخ الأول. ونجد مثالاً لهذا التصور وإن كان مثالاً مقصوراً على تاريخ العلوم، في «المقال الافتتاحي» الـذي قدّم بـه الابي بوسّـو (Abbé Bossut)[23] لـ «الموسوعة المنهجية»، وهـو يعرض فيـه لـوحـة تـاريخيـة لتقـدّم العلوم الدقيقة؛ ويقسم هـذه اللوحة إلى ثـلاث فترات، ويخلط في عـرضه لهـا بين تخمينـات

---

(١٩) فيلسوف ورياضي فرنسي، كان له دور سياسي أثناء الثورة الفرنسية (١٧٤٣ ـ ١٧٩٤). وكان مشروعه النظري يرمي إلى تطبيق الرياضيات، وبخاصة حساب الاحتمالات، على الظواهر الإنسانية. انظر بالنسبة إلى إعادة كتاب القسم الرياضي، في:

Condorcet, L'Abbé Boussut et Lalande, *L'Encyclopédie de Diderot.*

وكان ذلك، في: *L'Encyclopédie méthodique* (Paris: [s.pb.], 1784).

التي عوّضت موسوعة ديدرو. وله كتاب فلسفي:

Esquisse d'un tableau historique des progrés de l'esprit humain (1793).

(٢٠) **تخطيط** (باريس، ١٩٦٦)، ص ٣٠١.

(٢١) أديب وفيلسوف فرنسي (١٦٥٧ ـ ١٧٥٧)، انحاز إلى جانب المحدثين في النزاع بين «القدماء والمحدثين»، وله في ذلك:

Bernard de Fontenelle: *Digression sur les anciens et les modernes* (1688), et *Entretiens sur la pluralité des mondes* (Paris: [s.pb.], 1686).

(٢٢) عُرف بأعماله في الرياضيات والميكانيكا، وبمشاركته في «موسوعة ديدرو» كمشرف على القسم العلمي منها (١٧١٧ ـ ١٧٨٣). وتعبر «المقالة الافتتاحية» التي استهل بها هذه الموسوعة أصدق تعبير عن فلسفة «التنوير» التي سادت أوروبا في القرن الثامن عشر. انظر:

Jean le Rond d'Alembert, *Traité de dynamique* (1743).

(٢٣) كان في عداد الفلاسفة والعلماء الذين التفّوا حول «موسوعة ديدرو» (١٧٣٠ ـ ١٨١٤). ويتمثل دوره في تاريخ العلوم في أنه أنشأ كتبا دراسية في الفيزياء، كان لها تأثير بالغ.

وبين أحداث تاريخية، بعضها وهمي وبعضها الآخر صحيح. والذي يهمنا هو ان الابي بوسو ينطلق من المصادرة على أن «كل الشعوب المعتبرة في العالم القديم أحبّت الرياضيات ومارستها، والذين برزوا في هذا الجنس من العلوم هم الكلدانيون والمصريون، والصينيون، والهنود، واليونان، والرومان والعرب وغيرهم؛ أما في العصور الحديثة، فأمم أوروبا الغربية»(٢٤). فالعلم الكلاسيكي - على حدّ تعبير الابي بوسّو - أوروبي وغربي، لا لشيء إلّا لأن «التقدّم الذي أحرزته أمم غربي أوروبا في مجال العلوم منذ القرن السادس عشر إلى يومنا هذا يفوق إلى حدّ بعيد ما أحرزته الشعوب الأخرى»(٢٥).

هكذا صيغ مفهوم العلم الغربي في القرن الثامن عشر. ولكن لحقه في أوائل القرن التاسع عشر تغيّر في طبيعته وفي مداه. وباختصار اكتمل آنذاك هذا المفهوم على يديّ ما سماه ادغار كينه (Edgar Quinet)(٢٦) في القرن الماضي «النهضة الشرقية»(٢٧) ويقصد الاستشراق. فالاستشراق أضفى عليه البعد «الانتروبولوجي» الذي كان يعوزه، وتم لهذه «النهضة الشرقية» بأن ألقت الشك على «العلم في الشرق»، وكان لـ «التاريخ بواسطة اللغات» دور السند العلمي - المزعوم - في انجاز هذه العملية.

وبقي التصور المتداول أثناء القرن الثامن عشر متداولاً فيما بعد هنا وهناك، وخصوصاً عند مؤرخي علم الهيئة، إلّا أن التصور الجديد فرض نفسه أكثر فأكثر. فمنذ أوائل القرن التاسع عشر ساهم الاستشراق، بفضل المواد التي جمعها وبفضل مفاهيمه، أكبر مساهمة في تكوين المواضيع التاريخية لمختلف الفلسفات. ففي ألمانيا مثلها في فرنسا، وضع الفلاسفة كل ثقتهم في الاستشراق، وإن كانوا قد فعلوا ذلك لدواع مختلفة ولا شك، إلّا أنهم اتفقوا على تصور واحد بعينه، وهو أن الشرق والغرب لا يتعارضان بوصفهما وضعين جغرافيين، بل كوضعيتين تاريخيتين وهذا التعارض لا يقتصر عندهم على فترة تاريخية معينة، بل مرده إلى جوهر كل من الطرفين، إن صح التعبير. ولنذكر في هذا الصدد دروس في تاريخ الفلسفة وغيرها

---

(٢٤) Condorcet, *L'Encyclopédie méthodique*, p.30.

(٢٥) المصدر نفسه.

(٢٦) أديب ومؤرخ فرنسي (١٨٠٣ - ١٨٧٥)، انظر:
Edgar Quinet: *Le gène des religions* (1842); *Les Révolutions d'Italie* (1848-1853), et *La Révolution* (1865).

(٢٧) وهو العنوان الذي أعطاه كينه لفصل من كتابه: *Le gène des religions*.

من أعمال هيغل[٢٨]، كما نستطيع أن نذكر «عن البابا» لجوزف دي ماستر (Joseph de Maistre)[٢٩]. وفي تلك الفترة نفسها، ظهرت أفكار من قبيل «نداء الشرق» و«العودة إلى الشرق»، كما يشاهد ذلك عند دي ماستر وعند أتباع سان سيمون (Saint-Simon)[٣٠] من بعده، وهي أفكار تعبّر عن ردة فعل تجاه العلم وتجاه العقلانية بصورة أعم. ولكن الاعتقاد بأن مفهوم العلم الغربي قد اكتسب السند العلمي الذي كان يعوزه إلى ذلك الحين، بعد ان لم يكن له سوى سند فلسفي، أقول إن هذا الاعتقاد لم يرسخ في الأذهان إلاّ مع ظهور ونموّ المدرسة «الفيلولوجية».

وإن كانت أهمية هذه المدرسة بالنسبة إلى جميع الفنون التاريخية معروفة إلا أنه لا تعرف حتى الساعة، بصورة دقيقة، كيفية تأثيرها في تاريخ العلوم. غير أن كل الدلائل تشير إلى أن هذا التأثير لم يكن مباشراً فحسب، بل كان غير مباشر أيضاً، وذلك بفضل اتساع نطاق هذه المدرسة إلى دراسة الأساطير والأديان. وعلى أيّ حال، ومنذ البداية، وضعت أعمال فريدريك فون شليغل (Friedrich von Schlegel)[٣١] وفرانز بوب (F.Bopp)[٣٢] خاصة، المؤرخ أمام موقف جديد: فموضوع بحثه يشكّل الآن كلاًّ لا يمكن رده إلى عناصره، من حيث طبيعة هذه العناصر ومن حيث

(٢٨) انظر: Hegel: *Leçons sur la philosophie de l'histoire,* traduction de Gibelin (Paris: [s.pb.], 1963), p.38 sq., et *Leçons sur l'histoire de la philosophie* (Paris: [s.pb.], 1963), vol.2, pp.19-20.

(٢٩) فيلسوف سياسي فرنسي (١٧٥٤ ـ ١٨٢١)، عبّرت مؤلفاته عن الاتجاه المعادي لأفكار الثورة الفرنسية وقادت إلى العودة إلى الحكم الملكي المطلق، ويظهر ذلك في كتابه:

Joseph de Maistre, *Considérations sur la France* (1796);

كما قادت إلى علو كلمة «البابا» إزاء كل السلطات الزمنية، ويظهر ذلك في كتابه:

Du Pope (1819), 2ème.ed (Léon: [s.pb.], 1884), p.487 sq, et *Soirées de Saint-Petersbourg* (1821).

(٣٠) فيلسوف اجتماعي ويُعتبر المؤسّس للتيار الاشتراكي الفرنسي (١٧٦٠ ـ ١٨٢٥). ومن بين أتباعه الذين قالوا بنداء الشرق: Prosper Enfantin (١٧٩٦ ـ ١٨٦٤).

(٣١) أديب وفيلسوف ألماني (١٧٧٣ ـ ١٨٢٩)، وكان كتابه:

Friedrich von Schlegel, *Über die Sprache und Weisheit der Indier* (1808).

يمثل نقطة الانطلاق للدراسات وهو أول من وضع عبارة «النحو المقارن».

(٣٢) هو أحد مؤسسي علم اللغة المقارن (١٧٩١ ـ ١٨٦٧)، وأبرز مؤلفاته:

Franz Boff: *Über das conjugationssystem der sanskritsprache in Vergleichung mit jenem der griechischen, persischen und germanischen Sprache* (1816), and *Vergleichen de Grammatik* (1833-1853).

وجودها؛ الأمر الذي يفرض طريقاً في البحث يلجأ فيه إلى المقارنة بين كليات متماثلة من حيث بناها ومن حيث الوظيفة التي تؤديها. فشليغل في سنة ١٨٠٨، وماكس موللر (Max Müller)[٣٣] فيما بعد، يعتبران «التاريخ الطبيعي» نموذجاً للتاريخ، كما يعتبران أن علم اللغة المقارن يلعب بالنسبة إلى علوم اللسان الدور الذي يلعبه علم التشريح المقارن بالنسبة إلى علوم الأحياء. وهكذا تؤدّي هذه الطريقة بشليغل إلى التمييز بين صنفين من اللغات: يشتمل الصنف الأول على اللغات الطيّعة[٣٤] وهي اللغات الهندية الأوروبية، ويشتمل الصنف الثاني على سائر اللغات الأخرى. والأولى هي اللغات «الرفيعة»، أمّا الثانية فهي أدنى رتبة: فاللغة السنسكريتية، وبالتالي اللغة الألمانية - التي يعتبرها شليغل أقرب اللغات إليها - هي «لغة متّسقة ومكتملة منذ بدء نشأتها»، هي «لغة قوم ليسوا ببهائم بل ذوي ذكاء ناصع»[٣٥]. ولا عجب في أقوال شليغل هذه: فنحن ندخل مع ظهور المدرسة الألمانية، في ميدان تصنيف العقليات. ولم يكن من شأن ڤون شليغل أو بوب، كما لن يكون من شأن جاكوب غريم (Jacob Grimm)[٣٦] فيما بعد، أن يخالفوا همبولت (Humboldt)[٣٧] عندما يرى أن اللغة هي «روح أمة» و«عبقريتها» التي تختصّ بها، و«نظرتها إلى الحياة».

---

(٣٣) ولد ونشأ بألمانيا (١٨٣٣ - ١٩٠٠)، ولكنه استقرّ بانكلترا، وعني بخاصّة بعلم الأساطير المقارن، وله عدّة مؤلفات في هذا الميدان نذكر منها:

Max Mülles, *Comparative Mythology* (1856).

(٣٤) Les langues flexionnelles.

(٣٥) Friedrich von Schlegel, *Über die sprache und weisheit der Indier*, traduction française par A.Mazure (Paris: [s.pb.], 1837).

ولنذكّر بأن صنفي اللغات: المصرفة وغير المصرفة: تستنفد كل ميدان اللغة، على حد تعبير شليغل، المصدر نفسه، ص ٥١.

وحسب رأي شليغل، لا تدخل اللغات السامية في صف اللغات المصرفة: إذ إن التصريف الذي يطرأ على جذورها مستعار عن لغات أخرى، ص ٥٤ـ ٦١. أما اللغات الهندية الأوروبية «فإنها تتطلّب أسطع ذكاء وأثقبه» لأنها تعبر عن أسمى مفاهيم العقل الخالص والكلي، كما تعبر عن غور الضمير بأكمله، ص ٧٩.

(٣٦) اهتم بخاصة بمقارنة اللغة الجرمانية وبمقارنة الأطوار التي مرّت بها هذه اللغات (١٧٨٥ - ١٨٦٣)، انظر: Jacob Crimm, *Deutsche Grammatik* (1819-1837).

وعني كذلك بعلم الأساطير وبالثقافة الشعبية.

(٣٧) اشتهر بدراسته للغة القديمة التي كانت تستعمل بجزيرة «جاوا» (١٧٦٧ - ١٨٣٥)، وبخاصة بالبحث العامّ الذي قدّم به لهذه الدراسة، انظر:

Wilhelm von Humboldt, *Uber die Verschiedenheit des meuschlichen Sprachbaues und ihren Einfluss auf die geistige Enturcklung des menschengeschlechts* (1836).

فمنذ ذلك الحين، تهيّأت الأسباب لوقوع التحول من تاريخ اللغات إلى التاريخ بواسطة اللغات.

ولنلاحظ في بادىء الأمر أن نمو الدراسة المقارنة للأديان والأساطير حوالى منتصف القرن التاسع عشر على أيدي أ. كوهن (A.Kuhn)[٣٨] وماكس موللر قد تمّ بفضل فقه اللغة المقارن وبعلاقة وطيدة به. هكذا تكتمل عملية تصنيف عقليات الشعوب. منذ ذلك الحين وانطلاقاً من هذه المذاهب، ظهرت أخطر محاولة رمى أصحابها إلى إعطاء مفهوم العلم الغربي الأوروبي أسساً علمية مزعومة. وإن كانت بواكير هذا المشروع تظهر في مؤلف جامع لكريستيان لاسن (Christian Lassen)[٣٩]، إلا أن مداها الحقيقي يتجلى، بفرنسا هذه المرة، في أعمال أرنست رينان (Ernest Renan).

فقد كان الهدف العلمي لارنست رينان أن ينجز «بالنسبة إلى اللغات السامية ما أنجزه بوب بالنسبة للغات الهندية الأوروبية»[٤٠]. وقد تمثلت مهمته في الواقع في الاستفادة مما ألف

---

(٣٨) Adalbert Kuhn (١٨١٣ - ١٨٨١) ومن مؤلفاته، انظر:

Adalbert Kuhn, *Die Herabkunft des Feuers und des Göttestnrucks: Ein Beitrag zur vergleichenden Mythologie des Indogermanen* (1859), et *Mythologische Studien* (1886-1913).

وتشبه طريقته في البحث طريقة ماكس موللر.

(٣٩) عالم لغة نروجي (١٨٠٠ - ١٨٧٦)، مختص بدراسة اللغات الهندية، ونذكر من أعماله:

Christian Lassen, *Indische Altertumskunde*, 4 vols. (Leipzig: [n.pb.], 1847 - 1862).

(٤٠) Ernest Renau (١٨٢٣ - ١٨٩٣). انظر له:

Histoire générale et système comparé des langues sémitiques (Paris: Michel Lévy, 1863), p.IX.

يتبع رينان نظرة اللغويين الألمان كما يقتبس عباراتهم، فهو يقول مثلاً: «إن الوحدة والبساطة اللتين تميّزان الجنس السامي تصادفان في اللغات السامية نفسها. فالتجريد غير معروف لديها، والتفكير الميتافيزيقي ممتنع عليها. إذ إن اللغة هي القالب الضروري لصوغ العمليات الفكرية التي يُباشرها شعب ما، فإن كان محتوما أن يكون لسان يكاد يعوزه التركيب النحوي ويعوزه تنوّع التركيب، لسان يفتقر إلى تلك القرائن التي تعقد بين أقسام التفكير علائق جدّ دقيقة، ويصف الأمور بأوصافها الخارجية، كان إذن محتوماً أن يكون لسان كهذا مناسباً كل المناسبة للتعبير البليغ عن موحيات الملهَمين ولوصف انطباعات عابرة، ولكن كان محتوماً أن يستعصي على كل تفكير فلسفي وعلى كل تأمّل فكري»، ص ١٨. ويقول فيما بعد: «نستطيع القول بأن اللغات الآرية، إذا قورنت باللغات السامية، هي لغات التجريد وعلم ما بعد الطبيعة إزاء لغات الواقعية والشعور الحسّي»، ص ٣٣.

في ميداني فقه اللغة وعلم الأساطير المقارنين للتوصل إلى وصف يرمي إلى اكتناه[41] الفكر السّامي وتجلياته عبر التاريخ. ولمّا كان رينان يعتقد، كما كان يعتقد لاسن[42] من قبله، ان الآريين والساميين يقتسمون وحدهم الحضارة، صارت مهمة المؤرخ تقتصر، في نظرهما، على التقييم المقارن والتبايني لمساهمات كل من هؤلاء وأولئك. فهكذا صار مفهوم الجنس يشكّل قوام فن التأريخ، على أن ما يُراد بـ «الجنس» ههنا إنما هو مجموع «الملكات والغرائز التي يُهتدى إليها من خلال علم اللغة وتأريخ الأديان فقط»[43]. فالسّاميون إن لم يبتكروا جديداً في الفلسفة وفي العلم - بل ولم يكن في وسعهم مثل هذا الابتكار - وهذا خلافاً للهنديين الأوروبيين، فإن ذلك يرجع آخر الأمر إلى أسباب تمت إلى طبيعة اللغات السامية. ويقول رينان «إن الجنس السّامي يكاد لا يعرف إلا بخواص سلبيّة فقط: فليس له أساطير ولا ملاحم، وليس له علم ولا فلسفة، وليس له قصص ولا فنون تشكيلية ولا حياة مدنية»[44]. أما الآريون، أيّا كان أصلهم، فبهم يتحدّد الغرب وأوروبا معاً. ونرى رينان، الذي قاوم في كل مناسبة القول بالمعجزات، يقرّ مع ذلك بمعجزة وحيدة «المعجزة اليونانية»[45]. ولم يكن العلم العربي على حدّ قوله إلا «صورة منعكسة عن اليونان، أضيفت إليها تأثيرات فارسية وهندية»[46]، وباختصار فالعلم العربي

---

(٤١) Description eidètique.

(٤٢) Lassen, *Indische Altertumskunde,* vol.1, p.414 sq.

انظر على سبيل المثال: «وليس أيضاً بين الساميين والفلسفة أية علاقة، بل هم - وفي الحقيقة العرب وحدهم من بينهم - قد اقتبسوها من الفلاسفة «الهنديين - الجرمانيين». وذلك أن آراء «أولئك الساميين» وتطوراتهم سيطرت على عقولهم سيطرة منعتهم من - الارتقاء إلى مستوى التفكير الخاص كما منعتهم من - التوصل إلى انتزاع المفاهيم الكلية الضرورية من الأشخاص «المشاهدة» ومن الظروف الاتفاقية التي تكتنف تلك الأشخاص»، ص ٤١٥.

(٤٣) Renan, *Histoire général et système comparé des langues sémitiques,* pp. 490-491.

(٤٤) المصدر نفسه، ص ١٦.

(٤٥) ويذكر ميلو Gaston Milhaud (١٨٥٨ - ١٩١٨)، في هذا الصدد رينان: «هناك (معجزة) قد حصلت في غضون التاريخ، وقد تحدث عن ذلك السيد رينان منذ بضعة أيام في مأدبة «جمعية الدراسات اليونانية»، ألا وهي اليونان القديمة. أجل! حوالى خمسمائة سنة قبل المسيح كمل في الانسانية تشكل صنف من الحضارة بلغ من الكمال والتمام حدّاً أصبح معه كل ما سبقه خاملاً. فإنه كان حقّاً مولد العقل والحرية». انظر:

Gaston Milhaud, *Leçons sur les origines de la science antique* (Paris: [s.pb.], 1893), p.306, et Ernest Renan, *Souvenirs d'enfance et de jeunesse* (Paris: Nelson, 1883), p.59.

(٤٦) Ernest Renan, *Nouvelles considérations sur le caractère général des peuples sémitiques* (Paris: [s.pb.], 1859), p.89.

انعكاس عن العقل الآري.

لم يقتصر مؤرخو العلم على الاقتباس من هذا الاتجاه الفكري تصوّره لغربية العلم، بل اقتبسوا منه أيضاً طرائق لوصف تطوّر العلم والتعليق على سيره. فهكذا عكفوا على اكتشاف التصورات والمناهج العلمية، وعلى تتبع نشوئها وانتشارها، مستخدمين في ذلك التحليل «الفيلولوجي» للألفاظ، ومعتمدين على النصوص التي كانت بين أيديهم. فبعد مؤرخ الأساطير ومؤرخ الأديان، وجب الآن أن يكون مؤرخ العلوم لغوياً في الوقت نفسه. وهكذا، فقد تهيّأت التصورات والطرائق لإعطاء مفهوم العلم الغربي أساساً «انتروبولوجيا». وينعكس ذلك مثلاً في موقف تانري ودوهايم وميلو في فرنسا. فقد اقتبس كل هؤلاء عن رينان تصوره، بل حتى ألفاظه[٤٧]. وعلى الرغم من أن معظم المؤرخين قد تخلّوا عن هذه «الانتروبولوجيا»، فإن سلسلة من النتائج المتولّدة عنها لا تزال باقية. فلا يزال بعض المؤرخين يتبنى حتى اليوم هذه «الانتروبولوجيا»، إلا أن جلهم أودعها طيات النسيان، وإن احتفظوا بنتائجها. ويمكن تعداد هذه النتائج على الوجه التالي:

(١) كما أن العلم في الشرق لم يكن له أثر ملحوظ في العلم اليوناني، فكذلك لم يكن للعلم العربي أثر ملحوظ على العلم الكلاسيكي: ففي كلتا الحالتين بلغ الانقطاع درجة لم يعد يمكن معها للحاضر أن يعرف نفسه في ماضيه المتجاوز.

(٢) إن العلم الذي أتى بعد علم اليونان يعتمد على هذا العلم أشدّ الاعتماد. فحسب دوهايم «اقتصر العلم العربي على ترديد ما استقاه من العلم اليوناني»[٤٨]. ويذكّر تانري، بصورة عامّة، أنه كلما امعنا النظر في أمر العلماء الهنود أو العرب «بدوا لنا معتمدين على اليونان... [و]... دونهم من كل الوجوه»[٤٩].

(٣) بينما يعنى العلم الغربي، سواء عند بدء نشأته أم في حداثته الكلاسيكية، بالأسس النظرية، يتميز العلم الشرقي، في كنهه، بأهدافه العملية.

---

(٤٧) انظر على سبيل المثال:

Duhem, *Le Système du monde: Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, vol.2, p.126

حيث يتكلم عن «النزعات الواقعية للخيال العربي».

(٤٨) المصدر نفسه، ص ١٢٥.

(٤٩) Tannery, *La Géométrie grecque*, p.6.

ويصدق ذلك عليه حتى في فترته العربية. فالعلم الشرقي والعلم الغربي يتعارضان كعلم أرباب صنائع يحاولون إتقان قواعد صناعتهم، وعلم فلاسفة أصبحوا علماء.

(٤) إن الميزة التي يتفرّد بها العلم الغربي، سواء في أصوله اليونانية أم في نهضته الحديثة هي تقيّده بمعايير الدقة، في حين أن العلم الشرقي عامة، والعربي منه خاصة ـ ينقاد إلى قواعد تجريبية وطرائق حسابية عملية دون أن يتحقق من صحّة كل خطوة من خطاه. وتمثل حالة ديوفنطس هذه الفكرة أحسن تمثيل: فهو بوصفه رياضياً «يكاد لا يكون يونانياً»[٥٠]، على حد قول تانري. لكن تانري نفسه عندما يقارن المسائل العددية لديوفنطس بعلم الجبر عند العرب، يعود فيقول إن الجبر العربي «لا يجاوز قطّ المستوى الذي بلغه ديوفنطس»[٥١].

(٥) إنّ إدخال المعايير التجريبية الذي يميّز إجمالاً، حسب المؤرخين، العلم الكلاسيكي عن العلم الهيلينستي، هو إنجاز العلم الغربي دون سواه[٥٢]. فنحن مدينون، على حسب هذا الرأي، للعلم الغربي بالتصور النظري وبالاتجاه التجريبي.

هذه هي نتائج مفهوم العلم الغربي، الذي صيغ في القرن الثامن عشر لتعيين مرحلة من مراحل تقدّم العقل الإنساني فقط، ثم أقيم في القرن التاسع عشر على أساس «انتروبولوجي». وهذه النتائج، وإن كان قد نسي اليوم مصدرها التاريخي، إلا أنها ما زالت تسيطر على أعمال الفلاسفة والمؤرخين، ولا سيّما المتعلّقة منها بالعلم الكلاسيكي. ونحن لن نعارض هذه «الايديولوجية». بأخرى؛ ولكن كل ما سنقدمه هنا هو مقابلة بعض عناصرها بحقائق مستقاة من تاريخ العلوم، مبتدئين في ذلك بالجبر ومختتمين بمسألة حاسمة: مسألة العلاقة بين الرياضيات والتجريب.

نستنتج أن الجبر لا يخرج عن سائر العلوم العربية في اتصافها بالخواص السابقة: فهو يتميز بأهداف عملية، وبطابع حسابي عملي، وبعدم التقيد بمعايير الدقة. وهذه الخواص بالذات هي التي حدت بتانري إلى الرأي السابق ذكره، القائل بأن الجبر العربي لم يبلغ المستوى الذي بلغه ديوفنطس. كما أن هذه الخواص، على ما يبدو، هي التي سمحت لبورباكي، حديثاً، بأن يستثني المرحلة العربية من عرضه لتطور الجبر.

---

(٥٠) المصدر نفسه، ص ٥.

(٥١) المصدر نفسه.

(٥٢) انظر: Milhaud, *Leçons sur les origines de la science antique*, p.301.

بالطبع لن نتعرض هنا لمناقشة آراء هي نفسها موضع جدال - بل هي في نظرنا خاطئة - كالرأي القائل بوجود نظرية جبرية في المسائل العددية لديوفنطس، أو كالرأي القائل بوجود جبر هندسي، معترف به من حيث هو، عند اليونان. ولكنّا نقصر اهتمامنا على مسألة الطبيعة الغربية للجبر الكلاسيكي. أفلم يؤكد مراراً وتكراراً، منذ كندورسيه ومنتوكلا[٥٣] إلى بورباكي، ومروراً بكل من نسلمان (Nesselman)[٥٤] وزويتن (Zeuthen)[٥٥] وتانري وكلاين (Klein)[٥٦] - ونقتصر على ذكر أسماء هؤلاء - أن الجبر الكلاسيكي هو عمل المدرسة الايطالية، وأنه اكتمل على أيدي كل من ڤييت[٥٧] وديكارت؟ أفلا ترى ميلو (Milhaud) بالأمس، وديودونيه (Dieudonné)[٥٨] اليوم، يصرّان على إسناد بدء الهندسة الجبرية إلى ديكارت[٥٩]؟ وفي هذا الصدد، فإن النحو الذي ينحوه ديودونيه في تحرير التأريخ ذو مغزى: فهو لا يجد إلا فراغاً بين «طلائع» الهندسة الجبرية عند اليونان وبين ديكارت، ولكن، هذا الفراغ ليس ذلك الذي يقف أمامه المرء واجلاً، بل إنه ذلك الذي يبعث الطمأنينة في النفس. وفيما عدا هذه الأمثلة، كمثال بورباكي وديودونيه، فقد يحدث أن يعمد بعض المؤرخين إلى

---

(٥٣) رياضيّ فرنسي (١٧٣٥ - ١٧٩٩)، اشتهر بكتابه:

Jean Etienne Montucla, *Histoire des mathématiques*, 4 vols. (Paris: Blanchard, 1758).

(٥٤) هو مؤرخ الرياضيات الألماني (١٨١١ - ١٨٨١)، ويشير المؤلّف هنا إلى كتابه:

George Heinrich Ferdinand Nesselman, *Die Algebra des Grieschen* (Berlin: Reimer, 1842).

(٥٥) رياضي ومؤرّخ للرياضيات من الدانمارك (١٨٣٩ - ١٩٣٠). ونذكر من مؤلفاته:

Hieronymus Georg Zeuthen, *Geschichte der Mathematik in 16 und 17 Jahrhumdert* (New York: Johnson Reprint Corp., 1896).

(٥٦) Jacob Kelin، وهو مؤرخ الرياضيات الألماني، ويشير المؤلف إلى دراسته: «الحساب العملي اليوناني ونسوء الجبر» في:

Die Griedische Logistik und die Entstehung der Algebra, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomik und Physik, Studien, v.3 (Berlin: Abt., 1934).

(٥٧) رياضي فرنسي عمل بخاصة في ميدان الجبر (١٥٤٠ - ١٦٠٣)، ونذكر من مؤلفاته:

François Viète, *In artem analyticam isagoge* (1591).

(٥٨) Jean Dieudonné، رياضي فرنسي معاصر، عمل في ميداني «التوبولوجيا» والجبر، وساهم في تحرير، **عناصر الرياضيات** لبورباكي.

(٥٩) انظر: Milhaud Gaston, *Descartes savant* (Paris:[s.pb.], 1931), et Jean Alexandre Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique* (Paris: [s.pb.], 1974), vol. 1.

ذكر الخوارزمي وتعريفه للجبر، وحله للمعادلة التربيعية، لكنهم آنذاك يقفون بوجه عام عنده قاصرين الجبر العربي على مبتدعه. وهذا القصر خطير الشأن ولا ينصف تاريخ الجبر حقه. إذ إن الجبر العربي لم يكن مجرد امتداد لأعمال الخوارزمي، بل كان أساساً محاولة لتجاوزها على الصعيدين النظري والفني. وإضافة إلى ذلك، لم يكن هذا التجاوز محصلة أعمال فردية، بل جاء نتيجة تيارات جماعية، كانت فعالة آنذاك. وابتكر التيار الأول من بين هذه التيارات مشروعاً دقيقاً يتمثل في تطبيق الحساب على الجبر الموروث عن الخوارزمي ومن تبعه مباشرة من الجبريين؛ أما التيار الثاني فإنه كان يرمي إلى تجاوز العقبة المتمثلة في حل المعادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة بواسطة الجذور، وفي سبيل ذلك عمد الرياضيون الذين ينتمون إلى هذا التيار في مرحلة أولى إلى صياغة نظرية هندسية للمعادلات الجبرية، وذلك لأول مرة، ثم عمدوا، في مرحلة ثانية، بعد تعديل وجهة نظرهم إلى دراسة المنحنيات المعروفة لديهم بواسطة معادلاتها، أي أنهم بصورة واضحة بدأوا البحوث الأولى في مجال الهندسة الجبرية. وإذا كان ذلك كذلك، فالصورة التقليدية لتاريخ الجبر ما هي إلا أسطورة تاريخية. ويمكن التدليل على ذلك بذكر بعض الحقائق التاريخية.

عمد التيّار الأول، كما قلنا، إلى تطبيق الحساب على الجبر الموروث. وأول من ابتدأ بتحقيق هذا البرنامج النظري هو الكرجي في أواخر القرن العاشر. ويلخص السموأل - الذي جاء بعد الكرجي - هذا البرنامج على الوجه التالي: «التصرف في المجهولات بجميع الأدوات الحسابية كما يتصرّف الحاسب في المعلومات»[٦٠].

فاتجاه هذا البرنامج واضح، ويقع إنجازه وفقاً لمرحلتين متكاملتين: تتمثل أولاهما في تطبيق عمليات الحساب الأولية، بصورة منظمة، على العبارات الجبرية، وتتمثل المرحلة الثانية في أخذ العبارات الجبرية بصرف النظر عما يمكن أن تمثله، حتى يجوز أن تطبق عليها العمليات التي كانت، إلى ذلك الحين، مخصصة للأعداد. لكن لا يكفي، كما هو معروف، لتعريف برنامج، أياً كان، أن ينطق بأهدافه النظرية، بل يجب كذلك أن يعرف من خلال الصعوبات العملية التي لا بد أن تعارضه والتي يجب أن يعمل على حلها، ومن أخطر الصعوبات التي عارضت هذا البرنامج، مشكلة توسيع الحساب الجبري المجرد. وأحرز رياضيو القرنين الحادي عشر والثاني عشر في

---

(٦٠) السموأل بن يحيى بن عباس المغربي، الباهر في الجبر، تحقيق وتحليل صلاح أحمد ورشدي راشد، سلسلة الكتب العلمية، ١٠ (دمشق: جامعة دمشق، ١٩٧٣)، ص ٩.

هـذا الصـدد نتـائج مـا زالت تعـزى ـ خـطأ ـ إلى ريـاضيي القـرنـين الخـامس عشر والسادس عشر. ويمكن أن نذكر من بين هـذه النتائـج: توسيـع مفهوم القـوة الجبريـة بحيث يشمـل عكس هـذه القـوة بعـد أن حُـدِّدت بـوضـوح القـوة: صفـر؛ قـاعـدة الإشـارات بصورتهـا العامـة؛ قاعـدة ذات الحـدين وجـداول الأمثـال؛ جـبر كثـيرات الحدود، وخاصة خوارزمية القسمة؛ تقريب الكسور «الصحيحة» بواسـطة عناصر من جبر كثيرات الحدود[61].

وقصد الجبريون في مرحلة ثانية إلى تـطبيق هذا الحسـاب نفسه الجـبري الموسـع على العبارات الجبرية الصماء. وكان السؤال الذي طرحه الكرجي في هذا الصدد هو: «كيف التصرف فيها [أي المقادير الصمّ] بالضرب والقسمة والزيادة والنقصان وأخذ الجذور؟»[62] وضرورة الإجابة عن هذا السؤال هي التي دفعت بالرياضيين إلى ابتكار تأويل جـبري للنظرية التي تتضمنها المقالة العاشرة من كتاب **الأصول** لإقليـدس، وذلك عـلاوة على النتائج الـرياضيـة التي أحرزوهـا. ولا ننس أن بابـوس (Pappus)[63] كان يعتـبر هذه المقالة كمقالة هندسية، كما كان يعتبرها كذلك من بعده رياضي من مقـام ابن الهيثم. ويرجع ذلك إلى الفصل الأساسي والتقليدي ـ الذي نجده عند أرسطو كما نجده عنـد إقليدس ـ بين المقادير المتصلة والمقـادير المنفصلة. هكـذا، نرى أن أصحـاب مدرسـة الكَرَجي توصلوا إلى معرفة أكمل لبنية الأعداد الحقيقية الجبرية.

إضافة إلى ذلـك، شقّت أعمال الجـبريين الـذين ينتمون إلى هـذا التيار الـطريق

---

(٦١) انظر في هذا الصدد: Woepcke, *Extrait du Fakrî: Traité d'algèbre,* وأبو بكر محمد بن الحسن الكرخي، كتاب البديع في الحساب، تحقيق عادل انبوبا، الجامعة اللبنانية، قسم الدراسات الرياضية، ٢ (بيروت: الجامعة اللبنانية، ١٩٦٤)، ودراساتنا المختلفة في تاريخ هذه المدرسة الجبرية.

(٦٢) الكرخي، المصدر نفسه، ص ٣١.

(٦٣) رياضي يوناني متأخر. ولا نعرف بالضبط الفترة التي عاش فيها، والأرجح أنه ازدهر في أواخر القرن الثالث، والنصف الأول من القرن الرابع بعد المسيح. وهو معروف بكتابه: *Sunagogè.*

ويشير مؤلف المقال هنا إلى شرح بابوس للمقالة العاشرة «الأصول» لإقليدس. وقد ضاع الأصل اليوناني لهذا الشرح ولم تبق لدينا إلّا الترجمة العربية القديمة. وقد نشرت هذه الترجمة تحت عنوان: Pappus of Alexandria, *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements,* Half-Little, Harvard Semitic Series, VIII (Cambridge, Mass .: Harvard University Press, 1930).

أمام بحوث جديدة في نظرية الأعداد والتحليل العددي(٦٤). ففيما يتعلّق بالتحليل العددي مثلاً، يمكننا القول بأن رياضيي القرنين الحادي عشر والثاني عشر، بعد أن جدّدوا الجبر بواسطة الحساب، عادوا ثانية إلى الحساب، فوجدوا في بعض أبوابه، الامتداد التطبيقي للجبر الجديد. حقاً، استخرج علماء الحساب الذين سبقوا جبريي القرنين الحادي عشر والثاني عشر الجذور التربيعية والتكعيبية، كما كانوا يمتلكون صيغاً لتقريب الجذور نفسها. ولكنه لم يكن بوسعهم، لافتقارهم إلى الحساب الجبري المجرّد، تعميم نتائجهم، ولا طرائقهم، ولا خوارزمياتهم. فبفضل الجبر الجديد، صارت عمومية الحساب الجبري مقومة لباب من التحليل العددي لم يكن قبل ذلك إلا مجموع طرائق وصيغ تجريبية.

هذا الذهاب والإياب: من الحساب إلى الجبر، ثم من الجبر إلى الحساب، هو الذي أتاح لرياضيي القرنين الحادي عشر والثاني عشر الوصول إلى نتائج لا تزال تنسب ـ خطأً ـ إلى رياضيي القرنين الخامس عشر والسادس عشر. ومن هذه النتائج: الطريقة المسماة بـ «طريقة ڤييت» (Viète) لحلّ المعادلات العددية؛ والطريقة المسماة بـ «طريقة روفيني وهورنر» (Ruffini-Horner)؛ وطرائق عامة للتقريب، وخاصة تلك التي أشار إليها وايتسيد (D.T.Whiteside)(٦٥) كطريقة «الكاشي ونيوتن»؛ وأخيراً نظرية الكسور العشرية. وقد صاغ رياضيو القرنين الحادي عشر والثاني عشر إضافة إلى طرائق تكرارية من شأنها أن تؤدي إلى التقريب، طرائق استدلال جديدة كالاستقراء التام، على الوجه الذي نجده عليه في القرن السابع عشر. كما أنهم استهلّوا مناقشات منطقية وفلسفية جديدة تتعلق مثلاً بتصنيف القضايا الجبرية، أو بوضع الجبر من الهندسة. وأخيراً فإن الرياضيين الذين جاؤوا بعد هؤلاء، أثاروا مسألة الرمزية في الرياضيات.

كل هذا يؤول إلى القول بأن عدداً من التصوّرات ومن الطرائق والنتائج التي

---

(٦٤) Rushdi Rashed, «L'extraction de la racine nième et l'invention des Fractions décimales,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol.18, no.3 (1978), p.191.

(٦٥) هو المحقّق لآثار نيوتن الرياضية تحت عنوان:

Derele Thomas Whiteside, *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (Cambridge, Mass ;London: University Press, 1964).

تنسب إلى شوكيه (Chuquet)[٦٦]، وستيفل (Stifel)[٦٧]، وفولهابر (Faulhaber)[٦٨]، وشوبل (Scheubel)[٦٩]، وفييت وستيفن (Stevin)[٧٠]، وغيرهم، هي في الحقيقة من نتاج مدرسة الكرجي، التي عرفها الرياضيون اللاتينيون والعبرانيون.

لقد رأينا آنفاً أن من بين المفاهيم التي صاغها الجبريون الحاسبون منذ نهاية القرن العاشر مفهوم كثيرات الحدود. وهذا التيار الذي يتمثل الجبر كـ «حساب المجهولات» على حد التعبير الذي كان يستعمل إذاك، هيّأت السبيل لتيار جبري آخر، استهله الخيام في القرن الحادي عشر، ثم جدّده، في أواخر القرن الثاني عشر، شرف الدين الطوسي: فالخيام قد صاغ، لأول مرة، نظرية هندسية للمعادلات؛ أما الطّوسي فكان له جل الأثر في بدايات الهندسة الجبرية.

حقاً، فقد استطاع الرياضيون قبل الخيام - أمثال البيروني، والماهاني، وأبي الجود، وغيرهم - وخلافاً للرياضيين الاسكندرانيين، رد مسائل تتعلق بالمجسمات إلى معادلات من الدرجة الثالثة، وذلك بفضل مفهوم كثيرة الحدود بالذات. ولكن الخيام[٧١] كان أول من أثار أسئلة لم تكن من قبله موضوعة نصب الأعين: هل يمكن

---

(٦٦) Nicolas Chuquet، رياضي فرنسي ازدهر في النصف الثاني من القرن الخامس عشر، وألّف كتاباً وحيداً - في عام ١٤٨٤ - بقي على صورة مخطوط إلى أن نشر من قبل:
Aristide Mark, *Le Triparty eu la science des nombres* (1885).

(٦٧) يعتبر أعظم جبريّي الألمان في القرن السادس عشر (١٤٨٧ - ١٥٦٧). ونذكر من مؤلفاته:
Michael Stifel, *Arithmetica integne* (1544).

وتعليقه على كتاب الجبر لكريستوف رودولف: *Die Coss Christoffs Rudolffs* (1553-1554).

وكلمة «Coss» هي مأخوذة، من خلال الايطالية cosa، واللاتينية res، من كلمة «الشيء» العربية، التي كان يستعملها الجبريون العرب للإشارة إلى الكمية المجهولة، وأصبحت كلمة coss اسماً لصناعة الجبر لدى الرياضيين الألمان.

(٦٨) Johann Faulhaber (١٥٨٠ - ١٦٣٥)، رياضي ألماني، أسس مدرسة لتعليم الرياضيات بأولم (Ulm)، ذاع سيطها، حتى ان ديكارت التحق بها في عام ١٦٢٠. وكان فولهوبر كذلك مهندساً.

(٦٩) Johann Scheubel (١٤٩٤ - ١٥٧٠)، هو أحد رياضيي الألمان، وقد عاصر ستيفل، وله مؤلفات في الحساب والجبر.

(٧٠) رياضي ومهندس فلمندي (١٥٤٨ - ١٦٢٠). من مؤلفاته في الحساب والجبر، انظر:
Simon Stevin, *L'Arithmétique* (1585).

(٧١) انظر: Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Al-Khayyāmī,* =

ردُّ مسائل تتعلق بالخطوط أو بالسطوح أو بالمجسمات إلى معادلات من الدرجة المناظرة، هذا من جهة؛ وهل يمكن، من جهة أخرى، تصنيف المعادلات من الدرجة الثالثة بحيث يتأتى البحث عن حلول منتظمة بواسطة تقاطع منحنيات مساعدة، إذ إن الحل بواسطة الجذور كان ممتنعاً على الرياضي آنذاك؟ والإجابة عن هذين السؤالين المحددين تمام التحديد، أفضت بالخيام إلى صياغة نظرية هندسية للمعادلات من الدرجة المساوية للدرجة الثالثة أو الأقل منها. ولم يلبث الطوسي ـ الذي جاء من بعد الخيام ـ أن تبنى وجهة نظر مختلفة: فلم يقصر نظره على الأشكال الهندسية، بل إنه على العكس صار يتأمل الأشياء بواسطة العلاقات بين الدوال، ويدرس المنحنيات بواسطة المعادلات. وإن ظل الطوسي[٧٢] في حله للمعادلات يلجأ إلى المنحنيات المساعدة إلّا أنه كان يبرهن جبرياً في كل حالة عن تقاطع هذه المنحنيات بواسطة معادلاتها. وهذا من الأهمية بمكان عظيم، إذ إن الاستعمال المنسّق لهذه البراهين يدخل بصورة عملية، أدوات كانت متوافرة لدى أولئك الذين يمكن أن نسميهم المحللين، من بين رياضيي القرن العاشر؛ وهذه الأدوات هي: التحويلات الافينية، دراسة النهايات العظمى للعبارات الجبرية بواسطة ما سيعرف فيما بعد بالمشتقة؛ دراسة الحد الأعلى والحد الأدنى للجذور. وفي أثناء هذه الدراسات وعند تطبيق هذه الطرائق، أدرك الطوسي أهمية مميز المعادلة التكعيبية، وأعطى الصيغة التي تسمى بـ «صيغة كاردان» (Cardan) في حالة خاصة كما نجدها معروضة في «الصناعة العظمى» لكاردان[٧٣]. وأخيراً، وبدون المزيد من الإسهاب عن النتائج المحرزة، يمكننا القول بأن الخيام والطوسي قطعا أشواطاً بعيدة في ميدان يقال عادة ان ديكارت كان أول من ارتاده، وذلك فيما يخص النتائج وفيما يخص الأسلوب.

فإذاً، لا يسوغ لنا أن نتمثّل تاريخ الجبر الكلاسيكي كعمل النهضة الأوروبية يفضي إلى «الثورة الديكارتية» حسب تعبير تانري، إلّا إذا تركنا جانباً هذين التيارين،

= وفرانز ويبك، رسائل الخيام الجبرية، ترجمة وتحقيق وتقديم رشدي راشد وأحمد جبار (حلب: [د. ن.]، ١٩٨١).

(٧٢) Rushdi Rashed, «Résolution des équations numériques et algèbre: Al-Tusī-Viète,» *Archive for History of Exact Sciences,* vol.12, no.3 (1974), p.244.

(٧٣) Girolamo Cardano (١٥٠١ ـ ١٥٧٦)، هو الجبري الايطالي المعروف، وقد ألّف: *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis* (1545).

أعني تيار علماء الحساب من جهة، وتيار المهندسين الذين كانوا في الوقت نفسه، محللين قبل الأوان من جهة ثانية، وإلاّ إذا عزلناهما عن تاريخ الجبر متذرعين بأهدافهما «الحسابية العملية» وبعدم خضوعهما لمقتضيات الدقة!! وإذاً، فإنّ غربية الجبر تبدو وكأنها فكرة صادرة عن تأويل منصرف للتاريخ أو عن تاريخ مبتور، أو عن الاثنين معاً.

لذلك لم تكن حالة الجبر من بين الفنون الرياضية وحيدة من نوعها. فإنه كان يمكننا أن نأخذ كأمثلة موضحة للتحليل السابق حساب المثلثات، أو الهندسة، أو حساب الصغائر، أو بوجه أعمّ علم المناظر أو علم الأثقال، أو الجغرافيا الرياضية، أو علم الهيئة. فعلى سبيل المثال، إن الأعمال التي قام بها مؤرّخو علم الهيئة مؤخراً ـ وبعضها لا يزال جارياً ـ تلغي بوضوح، بل تبطل نظرة تانري لأعمال الفلكيين العرب وتأويلاته لها[٧٤]. ولكن بما أننا كلفنا أنفسنا أن نتفحص المذهب القائل بغربية العلم الكلاسيكي، فسنقصر نظرنا على عنصر أساسي من عناصر هذا العلم حسب ذلك المذهب: التجريب أو الاعتبار[٧٥]. أفلم يميِّز غالباً بين مرحلتي العلم الغربي، أي بين المرحلة اليونانية وبين مرحلة النهضة، بظهور المعايير التجريبية؟ ولا جرم أن إجماع الفلاسفة والمؤرخين وعلماء الاجتماع يتوقف عند هذا الحد. فلا يلبث أن تظهر الخلافات بينهم بمجرد ما يحاولون تحديد معنى تلك المعايير التجريبية، ومداها، وأصولها: فهناك من يردّ هذه المعايير إلى تيار الافلاطونية الأوغسطينية؛ وهناك من يردها إلى التعاليم المسيحية، ولا سيما عقيدة التجسيد منها[٧٦]؛ ويردّها ثالث إلى مهندسي عصر النهضة الأوروبية؛ ويردها رابع إلى «الأورغانون الجديد» لفرنسيس

---

(٧٤) ونقصد هنا بوجه الخصوص الترجمة التي قام بها كارّا دي ڤو Carra de Vaux لفصل من التذكرة لنصير الدين الطوسي، تحت عنوان: «الأفلاك السماوية حسب نصير الدين الطوسي،»

«Les sphères célestes selon Nasir Eddin Attûsî,»

والتي أدمجها: Tannery, *Recherches sur l'hisotire de l'astronomie ancienne,* Appendix 6, pp. 337-361.

(٧٥) نستعمل هنا المصطلح الذي كان يستعمله ابن الهيثم للإشارة إلى التجريب.

(٧٦) ومثل هذا الموقف الفيلسوف الهيغلي:

Alexandre Koyré «L'origine chrétienne de la science moderne,» dans: Alexnadre Koyré, *Mélanges Alexandre Koyré,* 2 vols., Histoire de la pensée 12-13 (Paris: Hermann, 1964), vol. 2, pp.305-306.

بـاكون، وخـامس إلى أعمال جيلبيـرت[٧٧] وهارڤي[٧٨]، وكپلر، وغـاليلو. وما هـذه إلاّ بعض مواقف من بين أخر تتطابق وتتشابك، بل تتناقـض، ولكنهـا تلتقي كلها حـول نقطة واحدة: القـول بغربيـة المعايـير الجديـدة. حقاً، لقـد حاد القليـل من المؤرخين والفلاسفة عن هـذا الرأي السـائد، وذلـك منذ القـرن التاسـع عشر، فنسبوا أصـول التجريب إلى الفترة العـربية من تـاريخ العلوم، ونخص بـالذكـر منهم ألكسندر ڤـون همبولت[٧٩] في المانيا، وكورنو في فرنسا[٨٠].

ومن الصعب في الحقيقة تحليل أصول التجريب وبـداياتـه على وجـه مرض، إذ إننا نفتقر إلى دراسة تاريخيـة دقيقة للتيـارات والمواضيـع المختلفة التي ينتمي إليهـا هذا المفهوم. وربما يمكننـا، عند القيـام بمثل هـذه الدراسـة، وقبل أي تـأريخ للمصـطلح نفسه، أن نتبين تعدد أوجه استعمال مفهوم التجريب وأن نحل الشبهـات الناجمـة عن ذلك. ويتطلب مثل هذا «التحليـل» بوجـه أخص دراسة للنقـطتين التـاليتين: تـاريخ العلاقات بين العلم والصناعة من ناحيـة؛ وبين الـرياضيـات والطبيعيـات من ناحيـة أخرى. وعلينا أن نعترف أن هذين البحثين لم ينجزا بعد، وما دام هذان البحثان على الأقل، لم ينجزا، فستبقى مسألة أصـول المعايـير التجريبيـة محل نـزاع ولا يمكن البت فيها. فأقصى ما يمكن أن نفعل، والحـالة هـذه، هو أن نقـترح بعض الفرضيـات وأن نأتي ببعض الحقائق تكفي للدلالـة على أن مـذهـب غربيـة العلم الكلاسيكي لا يـوفي التاريخ حقه. فتاريخ العلاقات بين العلم والصنـاعة يمكننـا من أن ندرك متى أصبح مقبـولاً ـ ولم وكيف أصبح مقبـولاً ـ أن معـرفـة مـا يمكن أن تتم وفي الـوقت نفسـه بالاستدلالات البرهانية وبالممارسة العملية، وأن مثل هذه المعرفة يمكن أن توصف بأنها علميـة في حين انها متصـورة من خلال إمكـانات تحققهـا العملي، الـذي يظل هـدفه

---

(٧٧) William Gilbert (١٥٤٤ ـ ١٦٠٣)، أحـد علماء الانكليز في القـرن السـادس عشر، واشتهر بكتابه: *De Magnete* (1600).

(٧٨) William Harvey (١٥٧٨ ـ ١٦٥٧)، طبيب انكليـزي، ويعتـبر أوّل من اكـتشـف الدوران الدموي، وقد عرض ذلك في كتابه: *De motu cordis et sanguinis* (1638).

(٧٩) Alexandre von Humboldt (١٧٦٩ ـ ١٨٥٩)، هو أخو فيلهلم ڤون همبـولـت وكان جغرافياً ورحّالة، ويُعتبر «كالمكتشف العلمي» للقارة الأمريكية.

(٨٠) هو فيلسوف فـرنسي (١٨٠١ ـ ١٨٧٧)، ويعتبر أحـد مؤسسي علم الاقتصاد الـرياضي. انظر:

Antoine Augustin Cournot, *Considérations sur la marche des idées et des évènements dans les temps*, 2 vols. (Paris: Boirin et Cie, 1973), pp.42-43.

خارجاً عن هـذه المعرفـة نفسها. ولا شـك أن التخفيف من شدة التعـارض التقليدي بين العلم والصناعة يبدو كنتيجة لجميع التيارات الفكرية التي سادت الفـترة العربيـة. فسواء التفتنا إلى علماء الحديث، أو إلى علماء الكلام، أو إلى العلماء في شتى الميـادين، وحتى إذا التفتنـا إلى الفلاسفـة السائـرين على خـطى الهيلينستيين المتـأخـرين ـ أمثـال الكندي والفارابي ـ نرى أنهم جميعاً ساهموا، على وجه ما، في سد الثلمة التقليدية بين العلم وبـين الصنـاعـة. وهـذه الميـزة الإجمـالية هي التي جعلت، بـلا شـك، بعض المؤرخين يحكمون ـ بصورة هي الأخرى إجمـالية ـ بـأن العلماء العرب يتّصفـون بروح عملية وبخيال واقعي. والذي يعنينا هنا هو أن هذه العلاقة الجديدة المقامـة بين العلم والصناعة أزاحت كل ما كان يقف عقبة دون تـطبيق قواعـد «الصناعـة» وأدواتها عـلى مـوضوع العلم، وبـوجه أخصّ، عـلى استدلال الـبرهـان. وبـاختصـار، لم يعـد من الواجب أن تطابق المعـرفة النهـج الأرسطي أو النهـج الإقليدسي لتـوصف بأنها معـرفة علميـة. وبفضل هـذا التصور الجـديد لـوضع العلم، ارتقت عـدة فنون كـانت تعتبر صنـاعية بحتـة ـ كالكيميـاء (القديمـة) وخاصـة الكيمياء بـالمعنى الـذي اكتسبتـه عنـد الرازي، وكالـطب والصيدلـة، وكالمـوسيقى وعلم اللغة ـ إلى مقـام المعرفـة العلمية. ولكن مهما كانت أهمية هذا التصـور الجديـد للعلاقـات بين العلم والصنـاعة، فـإنه لم يكن بـوسعـه أن يؤدي إلى أكـثر من تـوسيـع نـطاق البحث التجـريبي وإلى مفهـوم للتجريب غير واضح كل الوضوح. وفعلاً، فإنـا نشاهـد تعدّد الـطرائق التجريبيـة في ذلك العصر، كما نشاهد استعمـالاً منسقاً لهـذه الطرائق. وتشهـد على ذلـك تصانيف علماء النبات ومعاجم اللغويين، والتجـارب التي كان يجـريها الأطبـاء وعلماء الكيمياء، والمشاهدات السريرية والتشخيصات المقارنة التي كان الأطباء يقومون بها.

ولكن هذا المفهوم للتجـريب لم يكتسب البعد الـذي يحدده تحـديداً مضبـوطاً، بعـد أن كان يتّصف بشيء من الغمـوض، إلاّ بعد مـا قامت عـلاقـات جـديـدة بـين الرياضيات والطبيعيـات. ويتمثل هـذا البعد ـ الـذي نشهد ظهـوره في ميدان المنـاظر خاصة، على يدي ابن الهيثم ـ في تدبير الحجة التجريبية بصورة متسقة ومنتظمة.

كلنا يعرف أن علم المنـاظر لم يعـد مع الحسن بن الهيثم، مجـرد دراسة هنـدسية للإبصار أو للضوء، كما يعرف كلنا أيضاً أن «الاعتبار» أصبـح صنفاً قـائماً بـذاته من أصناف الحجّة؛ وكلنا يعرف أخيراً أن الذين جـاؤوا من بعد ابن الهيثم، ومنهم كـمال الدين الفارسي مثلاً، تبنّوا المعايير التجريبية في بحـوثهم في علم المناظـر، مثلاً في تلك

التي تتعلق بقوس قزح. ولكن ما هو معنى «الاعتبار» عند ابن الهيثم؟ إنا لنجد لديه من المعاني لهذه الكلمة ـ ومن الوظائف التي يقوم بها الاعتبار ـ قدر ما نجد لديه من علاقات بين الرياضيات والطبيعيات. ومجرد التردد على نصوص ابن الهيثم يبيّن لنا أن هذا المصطلح ومشتقاته ـ «اعتبر»، «المعتبر»، «اعتباراً» ـ تنتمي إلى مستويات متعددة ومتداخلة، يكاد التحليل «الفيلولوجي» البحت لا يتبيّنها. ولكن إذا صرفنا النظر عن الشكل اللغوي وركزنا على المضمون، تبيّنت لنا عدة أنماط من العلاقات بين الرياضيات والطبيعيات، ويمكننا ذلك من الوقوف على مختلف الوظائف التي يقوم بها مفهوم الاعتبار، والمناظرة لكل نمط من هذه الأنماط. وذلك أن العلاقات بين الرياضيات والطبيعيات في أعمال ابن الهيثم لها عدة وجوه، وهذه وإن لم يعالجها ابن الهيثم قصداً، إلّا أنها كامنة في أعماله وتمكّن من تحليل تلك الأعمال[٨١].

ففيما يخص علم الضوء الهندسي، الذي تم إصلاحه على يدي ابن الهيثم نفسه، تتمثل العلاقة الوحيدة بين الرياضيات والطبيعيات في تشاكل بنيتيهما. فقد استطاع ابن الهيثم، بفضل تعريفه للشعاع الضوئي، أن يتصور ظواهر الامتداد ـ بما في ذلك ظاهرة الانتشار ـ بحيث تتطابق هذه الظواهر وقواعد الهندسة بصورة تامة. ثم ابتكر تركيبات اعتبارية لاختبار قضايا كانت قد اختبرت من قبل على مستوى «التركيبات اللغوية» بواسطة الهندسة. ونذكر من بين هذه الاعتبارات تلك التي كانت ترمي إلى امتحان قوانين علم الضوء الهندسي وقواعده. وتفصح إعادة النظر ـ وإن كانت سريعة ـ في أعمال ابن الهيثم، عن حقيقتين خطيرتين لم تراعيا غالباً حق المراعاة: أولاهما أن ابن الهيثم لم يكن يرمي من وراء اعتباراته إلى امتحان قضايا كيفية فحسب، بل إلى الحصول على نتائج كمية أيضاً؛ وتتمثل الحقيقة الثانية في أن الأجهزة الاعتبارية المتنوعة التي ابتكرها ابن الهيثم، والتي كانت معقدة إذا قورنت بالأجهزة المستعملة في عصره، لا يمكن ردها إلى الأجهزة التي كان يلجأ إليها الفلكيون.

أما فيما يخص علم الضوء كفرع من العلوم الطبيعية، فإنا نصادف نمطاً آخر من العلاقات بين الرياضيات والطبيعيات، وبالتالي معنى جديداً لمفهوم الاعتبار. فبدون أن ينحاز إلى نظرية ذرية، يقرر ابن الهيثم، وفقاً لمقتضيات إصلاحه لعلم الضوء الهندسي، أن الضوء، أو على حد قوله، «أصغر الصغير من الضوء» هو شيء مادي،

---

(٨١) انظر أعمال فيدمان، ومصطفى نظيف وماتياس شرام (Matthias Schramm) وعبدالحميد صبرا وأعمالنا المتعلقة بابن الهيثم والفارسي.

مستقل عن الابصار، وأنه يتحرك في زمان، وأن سرعته تتغير حسب الأوساط التي ينفذ فيها، وأنه يسلك أسهل السبل، وان قوته تضعف تبعاً لازدياد بعده عن مصدره. ويتم تدخل الرياضيات في هذا الطور عن طريق الأمثلة التي يقيس فيها ابن الهيثم خطط انعكاس الضوء وانعطافه على خطط حركة جسم ثقيل. وبعبارة أخرى، يتمّ تدخل الرياضيات في علم الضوء عن طريق الخطط «الدينامية» لحركة الأجسام الثقيلة، بعد أن فرض أن هذه قد صيغت رياضياً. وتطبيق الرياضيات هذا على المفاهيم الطبيعية الذي سبق أن ادخل هو الذي سمح بنقل هذه المفاهيم إلى مستوى «وضع تجريبي». وعلى الرغم من أن هذا «الوضع التجريبي» كان ذا طابع تقريبي، ولا يحقق من وظائف التجريب العلمي إلا إمكان الاستدلال على الاتجاه العام للظاهرة، إلا أنه كان باستطاعته تقديم ما يلزم لوجود مفاهيم قد أمكن إحكام بنية قواعد تأليفها وإن ظلت من ناحية بنية دلالاتها غير محدودة(٨٢). وهذا ينطبق مثلاً على مخطط حركة الجسم المرمي به، كما يتصوّره ابن الهيثم، وكما سنجده فيما بعد، على وجه ما، عند كپلر وديكارت.

وهناك نوع ثالث من الاعتبار لا نجده عند ابن الهيثم نفسه ولكنا نجده عند الفارسي في أوائل القرن الرابع عشر. ويعود الفضل في إمكانية إجراء هذا النوع من الاعتبار إلى الإصلاح الذي أدخله ابن الهيثم على علم الضوء وإلى كشوفه فيه. وتهدف العلاقات المقامة بين الرياضيات والطبيعيات في هذه الحال، إلى اصطناع نموذج، وبالتالي إلى رد امتداد الضوء في جسم طبيعي إلى امتداده في جسم صناعي، وذلك بصورة منسقة وبواسطة القواعد الهندسية. فالغاية التي يرمي إليها الفارسي هنا هي تحديد علاقات تماثل، ذوات معنى رياضي، بين امتداد الضوء في جسم طبيعي وامتداده في جسم صناعي. ونرى ذلك مثلاً في لجوئه إلى استعمال كرة من البلّور، مملوءة ماء، لشرح ظاهرة قوس قزح. ووظيفة التجريب في هذه الحال هي تحقيق الشروط الطبيعية لظاهرة لا تتأتى لنا دراستها مباشرة ولا على نحو تام.

ويمكننا أن نضيف، إلى هذه الأنماط الثلاثة من التجريب، نمطين آخرين، ولكن سنغض الطرف عنهما في هذا السياق، إذ إن عرضهما يقتضي منّا مزيداً من الإسهاب، مكتفين بالملاحظة التالية: إن الأنماط الثلاثة من التجريب التي أوردناها

---

(٨٢) Des notions syntotiquement structurées mais sémantiquement indét-erminées.

آنفاً، وإن كانت مختلفة الوظائف، إلا أنها جميعاً ـ وبخلاف ما يجري في المشاهدة الفلكية التقليدية ـ لم تستعمل كأداة اختبار فحسب، بل أيضاً كوسيلة لتحقيق الوجود لمفاهيم أحكمت بنية قواعد تأليفها: ففي الأحوال الثلاثة، يرمي المعتبر إلى تحقيق وجود ذاتي لموضوع بحثه حتى يتمكن من دراسته؛ وباختصار يتمثل الأمر في تحقيق وجود عيني لمعقول لم يكن من شأنه أن يتحقق قبل ذلك. فهكذا نرى ابن الهيثم، عندما يعرض أبسط مثال لامتداد الضوء على سموت مستقيمة لا يعتبر أي ثقب كان في بيت مظلم، بل يعتبر ثقوباً معينة حسب نسب هندسية معينة، وذلك ليحقق على أدق وجه ممكن، تصوره للشعاع.

إن الاصلاح الذي أدخله ابن الهيثم والمعايير التجريبية المقتضاة كجزء لا يتجزّأ من البرهان في ميدان العلوم الطبيعية لم تنقض بانقضاء واضعها. فسلسلة النسب التي تربط بين ابن الهيثم وكپلر (Kepler)، ثم بينه وبين علماء القرن السابع عشر، لا مراء فيها.

نرى هذه المرة أيضاً أن مذهب غربية العلم الكلاسيكي يؤدي، بوجه جلي مثل ما كان الأمر فيما يتعلق بالجبر، إلى بتر التاريخ الموضوعي، لدواع لا مناص من اعتبارها كايديولوجية، لا غير.

ولنستعد في الختام بعض النقاط:

(١) إن فكرة غربية العلم الكلاسيكي، التي برزت في القرن الثامن عشر كوسيلة لتكوين تصور لتعاقب أطوار العقل الإنساني، اتّخذت على عاتق الاستشراق في القرن التاسع عشر الصبغة التي نعرفها لها اليوم، إذ صار يعتقد آنذاك أنه يمكن، انطلاقاً من «انتروبولوجية»، استنباط القول بأن العلم الكلاسيكي في جوهره أوروبي، وانه يمكن استكشاف أصوله مباشرة في العلم والفلسفة اليونانيين.

(٢) إن التعارض بين الشرق والغرب يكمن وراء النقد الموجّه ضد العلم وضد العقلانية بوجه عام من ناحية؛ ثم إنه يؤدي من ناحية أخرى إلى استثناء الإنتاج العلمي بالشرق، شرعاً وفعلاً، من تاريخ العلوم العام. ففيما يخصّ العلم المحرّر باللغة العربية يتذرّع لذلك بدعوى عدم اتّصافه بالدّقة، ومظهره «الحسابي العملي» واتّصافه بأهداف عملية. ويعتبر، إضافة إلى ذلك، أن علماء تلك الفترة، ـ بدعوى أنهم كانوا يعتمدون أشدّ الاعتماد على العلماء اليونانيين، وبدعوى أنهم كانوا قاصرين عن ابتداع المعايير التجريبية ـ لم يقوموا، آخر الأمر، إلاّ بدور المحافظين الغيورين

للمتحف الهيلينستي. وإن كانت هذه الصورة للعلم العربي قد عدلت بعض التعديل أثناء هذا القرن، وخاصة أثناء السنوات العشرين الأخيرة، إلاّ أنها لا يزال لها تأثير ضمن «الايديولوجية» التي ينطلق منها المؤرخ.

(٣) إذا قابلنا هذا المذهب بالحقائق التاريخية، انكشف لنا استخفافه بهذه الحقائق وخصبه في اختلاق التأويلات الايديولوجية: إذ إنه يقبل كحقائق مسلّمة مفاهيم تثير من المسائل أكثر مما تقدم من الحلول. ومن بين هذه المفاهيم مفهوم «النهضة العلمية» في أوروبا، في حين أن كل الدلائل تشير إلى أن الأمر لم يكن ليتعدى، في كثير من فنون المعرفة، تنشيطها من جديد. وهذه البديهيات المزعومة سرعان ما تصبح بمثابة أسس وطيدة تقوم عليها فلسفة علم أو دراسة اجتماعية للعلم، وسرعان ما تصبح منطلقاً لتدبير نظرية في تاريخ العلوم، كما يتبين ذلك من خلال محاولات حديثة العهد.

ويجدر بنا أن نتساءل، بدون إفراط تفاؤل، عمّا إذا لم يكن قد حان الأوان للتخلي عن كل وصف «انتروبولوجي» للعلم الكلاسيكي وعن الآثار التي تخلفت عن ذلك في تحرير التاريخ؛ وعما إذا لم يكن قد حان الأوان كي يتمسّك مؤرخ العلوم بالموضوعية التي تقتضيها مهنته، وكي يكف عن استيراد مختلس لِـ «ايديولوجيات» بغير ضابط ولا رادع وعن ترويجها بدون شعور، وكي يتجنب كل المحاولات التي تبرز اوجه الشبه على حساب أوجه التباين، وكي يتجنب اللجوء إلى المعجزات في تحرير التاريخ ـ كالمعجزة اليونانية عند السواد الأعظم، أو كالمعجزة العربية عند سارطون[٨٣] حديثاً ـ؛ أو باختصار، ألم يحن الأوان لكتابة التاريخ دون اللجوء إلى البديهيات الكاذبة التي تدعو إلى اصطناعها دواع قومية تكاد لا تخفى.

إن الموقف الحيادي الذي يجب على المؤرخ أن يتّخذه والذي يقف عليه كل عمل نظري في تاريخ العلوم ليس قيمة أخلاقية أولية، بل هو نتيجة عمل دؤوب لا تغر به الأساطير المتولدة عما يقال عن التعارض بين الشرق والغرب. فإذاً، من الواجب قبل كل شيء قلب التقسيم المقبول عموماً في تاريخ العلوم: فإنا لنحتاج إلى تقسيمات جديدة، تختلف حسب اختلاف الفروع العلمية، ومن شأنها أن تقطع الصلة بتاريخ عام للعلم لا يقيم وزناً لهذا التباين، ومن شأنها أن ترفض تطابقاً لا أساس له

(٨٣) انظر مثلاً: George Sarton, *The Incubation of Western Culture in the Middle-East* (Washington, D.C.: Library of Congress, 1951), pp.27-29.

بين «الزمان المنطقي» و«الـزمان التـاريخي». وسيستوعب هـذا التقسيم الزمني الجـديد تحت لفـظة واحـدة بعينهـا، مثـلاً تحت لفـظة «الجـبر الكـلاسيكي» أو «علم الضـوء الكلاسيكي»، أعمالاً تمتد من القرن العاشر إلى القرن السـابع عشر؛ وبـالتالي سـوف يؤدي هـذا لا إلى تعدد مسـتويات مفهـوم العلوم الكلاسيكيـة فحسب، بل إلى تعـدّد مستويات مفهوم العلم في العصر الوسيط أيضاً، إذ إن هذا المفهوم يتألف من عنـاصر متباينة لها مستويات مختلفة. وستتبينّ وقتذاك حقيقة العلوم الكلاسيكية التي لم تغادرها قط، وهي أنها نتاج منطقـة البحر الأبيض المتـوسط، لا بذاتهـا، ولكن من حيث هي بؤرة التبادل بين جميـع الحضارات، سـواء أكانت هـذه الحضارات تشغـل مركـز العالم القـديم أم أطرافـه. وعندئـذ فقط، يصبح المؤرخ قـادراً على المسـاهمـة. في تـوضيـح النقاش القائم في عدة أقطار تنتمي إلى هذا العالم القديم، وهو نقاش محوري بـالنسبة إلى ثقافات هذه الأقطار، أعني النقاش حول التجديد والتقليد.

قائمة المصطلحات

Entiers naturels $\mathbb{N}$	Natural numbers $\mathbb{N}$	أعداد طبيعية ـ ط
Entiers relatifs $\mathbb{Z}$	Integers $\mathbb{Z}$	أعداد صحيحة ـ ص
Nombres rationnels Q	Rational numbers Q	أعداد نسبية (منطقة) ـ ن
Nombres irrationnels	Irrational numbers	أعداد صمّاء
Nombres réels $\mathbb{R}$	Real numbers $\mathbb{R}$	أعداد حقيقية ـ ح
Exposant *(s)*	Exponent *(s)*	أس (إساس)
Base *(s)*	Base *(s)*	أساس (أسس)
Commutative	Commutative	إبدالية
Structure algébrique	Algebraic structure	بنية جبرية
Arrangement A_n^p	Arrangement A_n^p	توفيق مرتب، نسق
Combinaisons C_n^p	Combinations C_n^p	توافيق (تآليف)
Permutations P_n	Permutations P_n	تباديل (تراكيب)
Associative	Associative	تجميعية
Factorisation	Factorization	تحليل إلى عوامل
Application	Mapping	تطبيق
Application surjective	Surjective mapping	تطبيق غامر
Application injective	Injective mapping	تطبيق متباين
Application bijective	Bijective mapping	تطبيق متقابل
Approximation	Approximation	تقريب

Développement	Development	توسيع ـ مفكوك
Proportion	Proportion	تناسب
Congruence	Congruence	توافق
Isomorphisme	Isomorphism	تماثل
Paramètre	Parameter	ثابت
Binôme	Binomial	ثنائية الحد
Trinôme	Trinomial	ثلاثية الحد
Racine	Root	جذر
Famille	Family	جماعة
Solution	Solution	حل
Terme	Term	حدّ
Corps	Field	حقل
Anneau	Ring	حلقة
Fonction	Function	دالة (تابع)
Fonction affine	Affine Function	دالة أفينية
Fonction linéaire	Linear function	دالة خطية
Groupe	Group	زمرة
Classe	Class	صف
Classes résiduelles	Residual Classes	صفوف توافق
Nombre premier	Prime Number	عدد أولي
Décimal	Decimal	عُشري
Puissance	Power	قوة (رياضيات)
Proposition	Proposition	قضية
Module	Module	قياس
Polynôme	Polynomial	كثيرة حدود
Théorème	Theorem	مبرهنة
Homogène	Homogeneous	متجانسة
Identité	Identity	متطابقة
Variable	Variable	متغير
Sous ensemble	Subset	مجموعة جزئية
Egalité	Equality	مساواة

Polygone	Polygon	مضلع
Equation	Equation	معادلة
Coefficient	Coefficient	معامل
Dénominateur	Denominator	مقام
Lemme	Lemma	مقدمة
Equivalent	Equivalent	مكافىء
Discriminant	Discriminant	مميّز
Générateur	Generator	مولّد
Postulat	Postulate	مصادرة
Corollaire	Corollary	لازمة

المَراجِعْ

١ ـ العربية

كتب:

ابن أبي أصيبعة، أبو العباس أحمد بن القاسم. **عيون الانباء في طبقات الأطباء**. شرح وتحقيق نزار رضا. بيروت: دار مكتبة الحياة، ١٩٦٥.

ابن البناء، أبو العباس أحمد بن محمد. **تلخيص أعمال الحساب**. تحقيق وتعليق وترجمة محمد سويسي. تونس: الجامعة التونسية، ١٩٦٩.

ابن خلكان، شمس الدين أبو العباس أحمد. **وفيات الأعيان وأنباء أبناء الزمان**. تحقيق احسان عباس. بيروت: دار الثقافة، ١٩٧٠ ـ ١٩٧٢. ٨ ج.

ابن خلدون، أبو زيد عبدالرحمن بن محمد. **المقدمة**. بيروت: دار الكتاب اللبناني، ١٩٥٦ ـ ١٩٥٩.

ابن سينا، أبو علي الحسين بن عبد الله. **الشفاء: المنطق ـ البرهان**. تصدير ومراجعة ابراهيم مدكور، تحقيق أبو العلا عفيفي. القاهرة: الإدارة العامة للثقافة، ١٩٥٦.

ــــــ. **الشفاء ـ الطبيعيات**. تحقيق ع.ل. مظهر. القاهرة: الهيئة المصرية العامة للكتاب، ١٩٧٥.

ابن النديم، أبو الفرج محمد بن اسحق. **كتاب الفهرست في أخبار العلماء المصنفين من القدماء والمحدثين وأسماء كتبهم**. تحقيق رضا تجدّد. طهران: مكتبة الأسدى، ١٩٧١. ١٠ ج في واحد.

ابن الهيثم، أبو علي محمد بن الحسن. **الجمع في مبادىء الحساب**.

أبو كامل. **الوصايا بالجبر.**
إقليدس. **الأصول الهندسية.** ترجمة كرنيليوس ڤانديك. بيروت: [د. ن.]، ١٨٥٧.
الإقليدسي، أبو الحسن أحمد بن ابراهيم. **الفصول في الحساب الهندي.** تحقيق أحمد سعيدان. عمان: اللجنة الأردنية للتعريب والنشر والترجمة، ١٩٧٣. (تاريخ علم الحساب العربي، ج ٢)
الأموي، أبو عبدالله يعيش بن ابراهيم. **مراسم الانتساب في علوم الحساب.** تحقيق أحمد سليم سعيدان. حلب: [د. ن.]، ١٩٨١. (مصادر ودراسات في تاريخ الحساب العربي، ٢)
البصري، أبو الحسين محمد بن علي الطيب. **المعتمد في أصول الفقه.** تحقيق محمد حميدالله. دمشق: المعهد العلمي الفرنسي للدراسات العربية، ١٩٦٤.
حاجي خليفة، مصطفى بن عبدالله. **كشف الظنون عن أسامي الكتب والفنون.** تحقيق محمد شرف الدين يالتقيا ورفعت بليكه الكليسي. استانبول: مطبعة الحكومة، ١٩٤١ - ١٩٤٣. ٢ ج.
الخوارزمي، أبو عبدالله محمد بن موسى. **كتاب في الجبر والمقابلة.** تقديم علي مصطفى مشرفة ومحمد مرسي أحمد. القاهرة: [د. ن.]، ١٩٣٧ - ١٩٦٨. (طبعات مختلفة)
الرازي، فخر الدين محمد بن عمر. **مناقب الامام الشافعي.** القاهرة: المكتبة العلامية، ١٢٧٩ هـ.
السموأل بن يحيى بن عباس، المغربي. **افحام اليهود.** ترجمة ونشر مرسي برلمان. نيويورك: المجمع الامريكي للبحوث اليهودية، ١٩٦٤.
ـــــــ. **الباهر في الجبر.** تحقيق وتحليل صلاح أحمد ورشدي راشد. دمشق: جامعة دمشق، ١٩٧٣. (سلسلة الكتب العلمية، ١٠)
السيوطي، جلال الدين عبدالرحمن. **المزهر في علوم اللغة وانواعها.** تحقيق محمد أحمد جاد المولى [وآخرون]. ط ٢. القاهرة: دار احياء الكتب العربية، ١٩٥٨. ٢ ج.
الطبري، أبو جعفر محمد بن جرير. **تاريخ الرسل والملوك.** تحقيق محمد أبو الفضل. القاهرة: دار المعارف، ١٩٦٠ - ١٩٦٨. ١٠ ج. (ذخائر العرب، ٣٠)
الطوسي، أبو نصر السراج. **رسائل الطوسي.** حيدر آباد: [د. ن.]، ١٩٤٠.
الطوسي، شرف الدين. **الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر.** تحقيق وتحليل وترجمة رشدي راشد. باريس: دار الآداب الرفيعة، ١٩٨٦. ٢ ج.
عبدالجبار، أبو الحسن. **الموسوعة اللاهوتية الفلسفية.** القاهرة: [د. ن.]، ١٩٦١.
الفارسي. **تذكرة الأحباب في بيان التحاب.**
الفراهيدي، الخليل بن أحمد بن عمرو بن تميم. **كتاب العين.**

القفطي، أبو الحسن علي بن يوسف. تاريخ الحكماء. تحقيق يوليوس ليبرت. ليبزيغ: [ديتريخ]، ١٩٠٣.
الكاشي، غياث الدين جمشيد. مفتاح الحساب. تحقيق أحمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفنى الشيخ، مراجعة عبدالحميد لطفي. القاهرة: دار الكاتب العربي للطباعة والنشر، ١٩٦٧. ط ٢. تحقيق ن. النابلس. دمشق: [د. ن.]، ١٩٧٧.
كحالة، عمر رضا. معجم المؤلفين: تراجم مصنفي الكتب العربية. دمشق: مطبعة الترقي، ١٩٥٧ - ١٩٦١. ١٥ ج في ٥.
الكرخي، أبو بكر محمد بن الحسن. كتاب البديع في الحساب. تحقيق عادل أنبوبا. بيروت: الجامعة اللبنانية، ١٩٦٤. (الجامعة اللبنانية، قسم الدراسات الرياضية، ٢)
ويبك، فرانز. رسائل الخيام الجبرية. ترجمة وتحقيق رشدي راشد واحمد جبار. حلب: [د. ن.]، ١٩٨١.
اليزدي، شرف الدين. كنه المراد في علم الوفق والأعداد.
اليزدي، محمد بكر. عيون الحساب.

دوريات:

الطوسي، نصير الدين. «قوام الحساب.» تقديم أحمد سليم سعيدان. **الابحاث**: السنة ٢٠، العدد ٢، ١٩٦٧.

مخطوطات:

ابن البناء، أبو العباس أحمد بن محمد. «رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب.» تونس، المكتبة الوطنية، رقم (٩٧٢٢).
ابن الفتح، سنان. «رياضيات.» القاهرة (٢٦٠).
ابن عبدالجبار، عبدالعزيز. «نور الدلالة في علم الجبر والمقابلة.» جامعة طهران رقم (٤٤٠٩)، الملف (٦٤).
ابن الهيثم، أبو علي محمد بن الحسن. «حل شكوك اقليدس في الاصول.» جامعة استانبول رقم (٨٠٠).
ـــــــ. «شرح مصادرات إقليدس.» فايز الله (Feyzullah). استانبول (١٣٥٩١)، الملف (٢١٣).
أبو كامل. مخطوطات قرة مصطفى.
الأسعردي، محمد بن الحسن بن ابراهيم العطار. «اللباب في الحساب.» Marsh 663 (10), Bodleian.
الاقليدسي، أبو الحسن أحمد بن ابراهيم. «الفصول.» Yeni-Cami (802), Istambul.

البغدادي، أبو منصور عبدالقاهر بن طاهر. «التكملة في الحساب.» لالي، سليمانية، استانبول (٢٧٠٨/١).
التنوخي، زين الدين. «بحثه في الحساب.» الفاتيكان (٣١٧/٢).
الزنجاني. «عمدة الحساب.» طوب قاي سراي (٣١٤٥).
السموأل بن يحيى بن عباس، المغربي. «التبصرة في علم الحساب.»
Oxford Bod. Hunt. (194).
«في جمع أنواع من الأعداد.» آيا صوفيا (٤٨٣٢).
الكرخي، أبو بكر محمد بن الحسن. «الكافي في الحساب.» استانبول، مكتبة ابراهيم باشا، رقم (٨٥٥).
الماهاني. «الاصول.» باريس (٢٤٥٤).
النسوي، علي بن أحمد. «المقنع في الحساب الهندي.» Leiden arabe, no. (566).
«نصاب الجبر.» استانبول، فضل الله (١٣٦٦).
آيا صوفيا (٢٧١٨).
الجزائر (١٤٤٦/١٠).
عزت افندي (٣١٥٥).
هازينازي (١٩٩٣)، استانبول.

٢ ـ الاجنبية

Books

Académie royale des sciences. *Divers ouvrages de mathématique et de physique.* Paris: L'Académie, 1693.
Al-Bîrunî Commemoration Volume. Calcutta: [n.pb.], 1951.
Al-Samaw'al Ibn Yahaya Abbas, Al Maghribi. *Al-Bahir en algèbre d'As-Samaw'al.* Notes et introduction par Rushdi Rashed et Salah Ahmad. Damas: Université de Damas, 1972.
Al- Tahānawī. *Dictionary of the Technical Terms Used in the Science of the Musulmans.* Calcutta: [n.pb.], 1862.
Al- Tūsī, Sharaf al-Dine. *Oeuvres mathématiques, algèbre et géométrie au XIIème siècle.* Paris: Les Belles lettres, 1986. 2 vols.
Alembert, Jean le Rond de. *Traité de dynamique.* 1743.
Bernoulli, Jacques. *Ars Conjectandi.* Basel: [s.pb.], 1713. 2nd ed. Bruxelles: [s.pb.], 1968.
Boff, Franz. *Vergleichen de Grammatik.* 1833-1853.
——. *Über das conjugationssystem der sanskritsprache in Vergleichung mit*

jenem der Griechischen, persischen und germanischen sprache. 1816.
Bortto, W. *Befreundete Zahlen*. Wuppertal: [n.pb.], 1979.
Bourbaki, Nicolas. *Eléments de mathématiques*. Paris: Hermann, 1960.
Brockelmann. *Geschichte der arab-lit.*
Brunschvicg, Léon. *Les Etapes de la philosophie mathématique*. 1913.
——. *L'Expérience humaine et la causalité physique*. 1922.
Buffon. *La méthode des fluxions et des suites infinies*. 1740.
Burnside, William and A. Panton. *The Theory of Equations*. London: [n.pb.], 1912.
Cajori, Florian. *A History of Mathematical Notations*. Chicago, Ill.: Open Court Publishing Company, 1928-30. 2 vols.
Cantor, Moritz Benedikt. *Vorlesungen Über Geschichte der Mathematik*. Leipzig, B.G.: Teubner, 1880-1908. 3 vols.
Cardano, Girolamo. *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis*. 1545.
Carlebach, J. *Levi ben Gerson als Mathematiker*. Berlin: [n.pb.], 1910.
Carmichael, Robert Daniel. *Théorie des nombres*. Traduit par A. Sallin. Paris: [s.pb.], 1929.
Cohen, R. *Boston Studies in the Philosophy of Sciences*. Boston: Reidel Pub. Co., 1973.
Colebroke, H.T. *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhāscara*. London: [n.pb.], 1817.
Collant, J. *Varron Grammairien Latin*. Strasbourg: [n.pb.], 1923.
Condorcet. *L'Encyclopédie méthodique*. Paris: [s.pb.], 1784.
——. *Esquisse d'un tableau historique des progrés de l'esprit humain*. 1793.
——, L'Abbé Boussut et Lalande. *L'Encyclopédie de Diderot*.
Cournot, Antoine Augustin. *Considérations sur la marche des idées et des évènements dans le temps modernes*. Paris: Boirin et Cie, 1973. 2 vols.
Curtze, M. *Urkunden Zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*. Leipzig: [n.pb.], 1902.
De analysi per aequations numero terminorum infinitas. 1669.
Dechales, C.F. *Cursus Seu mundus mathematicus*. 1647. 2nd ed. 1690.
Dedron, P. et Jean Marc Gaspard Itard. *Mathématiques et mathématiciens*. Paris: [s.pb.], 1969.
Deidier (Abbé). *L'Arithmétique des géomètres, ou nouveaux éléments de mathématiques*. Paris: [s.pb.], 1739.
Descartes, René. *Oeuvres*. Paris: [s.pb.], 1966.
Dickson, Leonard Eugene. *History of the Theory of Numbers*. New York: Chelsea, 1919. 2nd ed. 1966. 3 vols. (Carnegie Institution of Washington, Publication no. 256)
Dieudonné, Jean Alexandre. *Cours de géométrie algébrique*. Paris: [s.pb.], 1974.
Diophanti Alexandrini Arithmeticorum. 1621.
Djebar, A. *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des*

XIIIème et XIVème siècle. Orsay: Publications mathématiques, 1980-1981.

Duhem, Pierre Maurice Marie. *Les Origines de la statique: Etudes sur Léonard de Vinci*. 1906-1913.

——. *Le Système du monde: Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*. Paris: Hermann, 1913-1959.

Dühring, Eugen. *Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik*. 1873.

Dupuis, J. *Exposition*. Paris: [s.pb.], 1892.

Excerpta Mathematica, IV, De Partibus Aliquotis Numerorum.

Fibonacci, Leonardo. *Liber Abaci*.Rome: Boncompagni, 1857-1862.

Fontenelle, Bernard La Bovier de. *Digression sur les anciens et les modernes*. 1688.

——. *Entretiens sur la pluralité des mondes*. Paris: [s.pb.], 1686.

Fourier, J. *Analyses des équations déterminées*. 1830.

Gandz, Solomon. *The Mishnat ha Middot: The First Hebrew Geometry of about 150 C.E.; Geometry of Muhammed ibn Musa d'al Khawarizmi*. Berlin: Springer, 1932. (Quellen und Studies zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. A. Quellen, 2 Bd)

Gauss, Chas. F. *Recherches arithmétiques*. Traduit par A.C.M. Poulet-Delisle. Paris: Hermann, 1807.

Gérase, Nicomaque de. *Introduction arithmétique*. Leipzig: Hoche, 1866.

Gerhardt, C.I. *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*. Hildesheim: [s.pb.], 1962.

Gerike, Helmuth and Kurt Vogel. *De Thiende von Simon Stevin*. Nieuwkoop: B. de Graaf, 1965. (Dutch Classics on History of Science, 15)

Gerland, Ernest. *Geschichte der Physik von den ältesten Zeiten bis Zum Ausagange des achtzehnten Jahrhunderts*. München: R. Oldenbourg, 1913.

—— and Traumüller. *Gerschichte der Physikalischen Experimentierkunst*. 1899.

Gilbert, William. *De Magnete*. 1600.

Gillispie, Charles Coulston. *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Scribner, 1970-1978.

Grimm, Jacob. *Deutsche Grammatik*. 1819-1837.

Guy, Richard K. *Unsolved Problems in Number Theory*. New York: Springer, 1980. (Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, vol. 1)

Hankel, Hermann. *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter*. Hildeshein: G. Olms, 1965.

Hardy and Wright. *The Theory of Numbers*. Oxford: [n.pb.], 1965.

Harriot, Th. *Artis analyticae praxis*. 1631.

Harvey, William. *De motu cordis et sanguinis*. 1638.

Heath, Thomas Little. *Euclid's Elements*. 2nd. ed. Dover: [n.pb.], 1956.

——. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921.
——. *A Manual of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1931.
Hegel. *Leçons sur l'histoire de la philosophie*. Paris: [s.pb.], 1963.
Herigone, P. *Cursus mathematicus*. 1634.
Hijab, Wasfi A. and E.S. Kennedy. *Al-Kāshī on Root Extraction*. Beirut: American University of Beirut, 1960.
Hoche, R. *Introduction*. Leipzig: [n.pb.], 1866.
Humboldt, Wilhelm von. *Über die Verschiedenheit des meuschlichen Sprachbaues und ihren Einfluss auf die geistige Euturcklung des menschengeschlechts*. 1836.
Hunger, Herbert and Kurt Vogel. *Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15 Jahrhundert*. Wien: H. Böhlaus Nachf, Kommissionsverlag der österreichischen Akademie der Wissenschaften, 1963.
Ibn al-Baytàr, Abu Muhammad Abd Allah B. Ahmad. *Ǧam'āl - mufradāt: Traité des simples*. Paris: Leclerc, 1877-83.
Ibn Aslam, Abū Kāmil Shyā'. *The Algebra of Abū Kamil: Kitāb fī al Jabr Wa'l muqābala d'Abū Kāmil*. Traduction de Matin Levey. Madison: University of Wisconsin Press, 1966.
International Congress of Mathematical Sciences. Pakistan: Hamdard National Foundation, 1975.
Itard, Jean Marc Gaspard. *Arithmétique et théorie des nombres*. Paris: Presses universitaires de France, 1967. (Collection «Que Sais-Je?.)
——. *Les Livres arithmétiques d'Euclide*. Paris: Hermann, 1961.
Jamblique. *In Nicom. Introd*. Leipzig: [n.pb.], 1894.
Juschkewitsch, A.P. *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Leipzig: Teubner, 1964.
——. *Über ein Werk des Abu Abdallah Muhammed Ibn Mūsā al-Hawarizmi al- Maǧūsī zur Arithmetik der inder*. Leipzig: [n.pb.], 1964. (Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin, Beiheft zum 60)
Keith, A.B. *A History of Sanscrit Literature*. London: [n.pb.], 1924.
Klein, Jacob. *Die Griedische Logistik und die Entstéhung der Algebra*. Berlin: Abt., 1934. (Quellen und studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomik und Physik, Studien, vol.3)
Koyré, Alexandre. *Etudes galiléennes*. 1939.
——. *From the Closed World to the Infinite Universe*. Baltimore, Mad.: Johns Hopkins, 1957. (Publications of the Institute of the History of Medicine. The Johns Hopkins University, 3d Ser.: The Hideyo Noguchi Lectures, vol. 7)
——. *Mélanges Alexandre Koyré*. Paris: Hermann, 1964. 2 vols. (Histoire de la pensée, 12-13)
——. *La Révolution astronomique: Copernic, Kepler, Bornelli*. Paris:

Hermann, 1961. (Ecole pratique des hautes études, Sorbonne, histoire de la pensée, 3)

Krumbacher, Karl. *Geschichte der byzantinischen Litteratur.* New York: Burt Franklin, 1896.

Kuhn, Adalbert. *Die Herabkunft des Feuers und des Göttesturucks: Ein Beitrag zur vergleichen - den Mythologie der Indogermanen.* 1859.

——. *Mythologische studien.* 1886-1913.

Kutsch, Wilhelm. *Tābit B. Qurra's: Arabische Übersetzung der des Nikomachos von Gerasa.* Beyrouth: Imprimerie catholique, 1958. (Beirut, Université St. Joseph, Institut de lettres orientales des Beyrouth, 9)

Lagrange. *Démonstration d'un théorème nouveau.* Berlin: l'Académie de Berlin, 1771.

Lange, G. *Die Praxis des Rechners.* Frankfurt: Herausgegeben U. Übersetz, 1909.

Lassen, Christian. *Indische Ȧltertumskunde.* Leipzig: [n.pb.], 1847-1862. 4 vols.

Levey, M. and M. Petruct. *Kūshayr ibn-Labbān, Principles of Hindu Reckonning.* Madison: [n.pb.], 1965.

Libri, Guillaume. *Histoires des sciences mathématiques en Italie: Depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle.* Paris: Renouard, 1936.

Lucas, Edouard. *Théorie des nombres.* Paris: Villars, 1958.

Luckey, Paul. *Der Lehrbrief über den kreisumfang.* Berlin: Akademie - Verlag, 1953.

——. *Die Rechenkunsh bei Ǧamšid b. Mas'ūd al-Kāšī.* Wiesbaden: Steiner, 1951.

Maistre, Joseph de. *Considérations sur la France.* 1796.

——. *Du Pope.* 2ème ed. Léon: [s.pb.], 1884.

——. *Soirées de Saint-Petersbourg.* 1821.

Malebranche, Nicolas. *De la recherche de la vérité, où l'on traite de la nature de l'esprit de l'homme et de l'usage qu'il, en doit faire pour éviter l'erreur dans les sciences.* Paris: Vrin, 1910. 3 vols.

Mark, Aristide. *Le Triparty eu la science des nombres.* 1885.

Mélanges. Caire: Institut d'études orientales, 1955.

Mémoires de l'académie royale des sciences: Depuis 1666 jusqu'à 1699. Paris: [s.pb.], 1729.

Methodus fluxionum et serierum infinitarum. 1671.

Meyerhof, Sobhī. *The Abridged Version of the Book of Simple drugs' of Ahmad ben Muhammad al-Ghāfiqī.* By Gregorious abu'l-Farag. Cairo: [n.pb.], 1932.

Méziriac, Bachet de. *Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres.* Léon: [s.pb.], 1624.

Milhaud, Gaston. *Descartes savant.* Paris: [s.pb.], 1931.

——. *Leçons sur les origines de la science antique.* Paris: [s.pb.], 1893.
Montmort. *Essai d'analyse sur les jeux du hasard.* 2ème ed. Paris: [s.pb.], 1713.
Montucla, Jean Etienne. *Histoire des mathématiques.* Paris: Blanchard, 1758. 2ème ed. 1799.
Mordell, Louis Joel. *Diophantine Equations.* London; New York: Academic Press, 1969. (Pure and Applied Mathematics, vol. 30)
Mouraille, J. *Traité de la résolution des équations en général.* Marseille: [s.pb.], 1768.
Müller, Max. *Comparative Mythology,* 1856.
——. *Hanbuch der Klassischen Altertums Wissenschaft.* 1913.
Murdoch, J.E. and E.D. Sylla. *The Cultural Context of Medieval Learning.* Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company, 1975.
Needham, Joseph. *Science and Civilization in China.* Cambridge, [Eng.]: University Press, 1954-1966. 6 vols. in 12.
Nesselmann, George Heinrich Ferdinand. *Die Algebra der Grieschen.* Berlin: Reimer, 1842.
Oeuvres complètes. Paris: Seuil, 1963-1964.
Oeuvres de Lagrange. Paris: [s.pb.], 1878.
Oughtred, W. *De Aequationem affectarum resolutione in numeris.* 1652.
Pappus, of Alexandria. *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1930. (Halflittle, Harvard Semitic Series, vol. VIII)
——. *Sunagogē.*
Platzeck, E.W. *Raimund Lull, sein Leben - seine Werke, die Grundlagen Seines Denkens.* Düsseldorf: [n.pb.], 1964.
Poggendorf, Johann Christian. *Biographical - Litterarisches Handwörterbuch für Mathematik, Astronomie, Physik mit Geophysik, Chemie.* Berlin: Verlag, 1863. 7 vols. in 24.
Prestet, J. *Nouveaux éléments des mathématiques.* 1689.
Quinet, Edgar. *Le Gène des religions.* 1842.
——. *La Révolution.* 1865.
——. *Les Révolutions d'Italie.* 1848-1853.
Rashed, Rushdi. *Arithmétiques de Diophante.* Paris: Les Belles lettres, [s.d.].
——. *L'Art de l'algèbre de Diophante.* Traduit du Grec par Qusta b. Lūqā. Caire: [s.pb.], 1975.
——. *L'Oeuvre algébrique d'al-Khayyām.* Alep: [s.pb.], 1982.
Renan, Ernest. *Histoire générale et système comparé des langues semitiques.* Paris: Michel Lévy, 1863.
——. *Nouvelles considérations sur le caractère général des peuples sémitiques.* Paris: [s. pb.], 1859.
——. *Souvenirs d'enfance et de jeunesse.* Paris: Nelson, 1883.
Rosenberger, Ferdinand. *Die Geschichte der Physik.* 1883-1890.

Sarfatti, Gad Ben-'Ami. *Mathematical Terminology in Hebrew Scientific Litterature of the Middle Ages.* Jerusalem: [n.pb.], 1968.

Sarton, George. *The Incubation of Western Culture in the Middle-East.* Washington, D.C.: Library of Congress, 1951.

——. *Introduction to the History of Science.* 2nd ed. Baltimore, Mad.: Wilkins, 1950. 3vols. in 5. (Carnegie Institution of Washington Publication, no. 376)

Sayili, Ayden Mehmed. *Logical Necessity in Mixed Equations by 'Abd al-Hamid ibn Turk and the Algebra of his Time.* Ankara: Türk Tarih Kurumu Basimevi, 1962. (Türk Tarih Kurumu Yayinlarindan 17, Seri, no. 41)

Schau, V.C.E. *Chronologie Orientalischer Völker von Albirunī.* Leipzig: Neudruck, 1923.

Schlegel, Friedrich von. *Über die Sprache und weisheit der Indier.* Traduction Française par A. Mazure. Paris: [s.pb.], 1837.

Scott, Joseph Frederick. *A History of Mathematics: From Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century.* London: Taylor and Francis, 1969.

Sédillot, Louis Pierre Eugène Amélie. *Prolégomènes des tables astronomiques.* Paris: Firmin, 1847. 2 vols. in 1.

Sezgin, Fuat. *Geschichte des Arabischen Schrifttums.* Leiden: Brill, 1967-1982.

Shanks, Daniel. *Solved and Unsolved Problems in Number Theory.* New York: Chelsea Publishing Company, 1978.

Smith, David Eugene. *A Source Book in Mathematics.* New York: McGraw Hill, 1959.

Stevin, Simon. *L'Arithmétique.* 1585.

Stifel, Michael. *Arithmetica integne.* 1544.

——. *Die Coss Christoffs Rudolffs.* 1553-1554.

Struik, Dirk Jan. *The Principal Works of Simon Stevin.* 1958.

——. *Simon Stevin, Science in the Netherlands around 1600.* 1970.

——. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969.

Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita. Venise: [s.pb.], 1494.

Suter, Heinrich. *Die Abhandlung Über die Ausmessung des Paraboloides, Von el-Hasan b. el-Hasan b. el Haitham.* Leipzig: [n.pb.], 1912.

——. *Die Mathematiker und Astronomen der Arber und ihre Werke.* Leipzig: Teubner, 1900.

Tannery, Paul. *La Geómétrie grecque.* Paris: [s.pb.], 1887.

——. *Mémoires Scientifiques.* Toulouse: Privat, 1912.

——. *Pour l'histoire de la science héllène.* 1887.

——. *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.* Paris: [s.pb.], 1893.

—— et Ch. Henry. *Oeuvres de Fermat.* Paris: [s.pb.], 1894-1896.
Tropfke, Johannes, *Geschichte der Elementar - mathematik in Systematischer Darstellung.* Berlin: Guyter, 1930. 3vols.
Turnbull, Herbert Western. *The Correspondence of Isaac Newton.* Cambridge, [Eng.]: Royal Society at the University Press, 1959.
Viète, François. *De numerosa potestatum purarum, atque adfectarum.* Leiden: [n.pb.], 1646; Olms: [n.pb.], 1970.
——. *In atem analyticam isagoge.* 1591.
Vogel, Kurt. *Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus: Das Früheste Lehrbuch Zum Rechnen mit indischen Ziffern.* Aalen: [n.pb.], 1963.
Vuillemin, Jules. *La Philosophie de l'algèbre.* Paris: Presses universitaires de France, 1962.
Waard, C. De. *Correspondance du Père Marin Mersenne.* Paris: [n.pb.], 1962.
Waerden, Bartel Leendert Van Der. *Erwachende Wissenschaft.* Bâle: Stuttgart, 1956.
Wallis, Jennifer Seberry. *Algebra.* 1693.
Waring, E. *Méditationes Algebraicae.* Cantabridgiae: [n.pb.], 1770.
Weidemann, Eilhard. *Aufsätze Zur arabischen Wissenschaftsgeschichte.* Hildestreim: Ilms, 1970. 2 vols. (Collectanea, VI/1,2)
Whiteside, Derele Thomas. *The Mathematical Papers of Isaac Newton.* Cambridge, Mass.; London: University Press, 1964.
Whittaker, Edmund Taylor and George Robinson. *The Calculus of Observations: A Treatise of Numerical Mathematics.* London: Blackie, 1926.
Woepcke, Franz. *L'Algèbre d'Omar Al-Khayyāmī.* Paris: [s.pb.], 1851. 1951.
——. *Extrait du Fakhrī: Traité d'algèbre.* Paris: [s.pb.], 1853.
Young, J.R. *The Theory and Solution of Algebraical Equations.* London: [n.pb.], 1843.
Youschkevitsch, M. *Les Mathématiques arabes VIIIème - XVème siècles.* Traduit par M. Cazenave et K. Jaouiche. Paris: Vrin, 1976.
Zeuthen, Hieronymus Georg. *Geschichte der Mathematik in 16 und 17 Jahrhundert.* New York: Johnson Reprint Corp., 1966.

Periodicals

Al-Tūsī, Sharaf al-Dīn. «Viète.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 12, no. 3, 1974.
Anbouba, Adel. «L'Algèbre arabe an IXème et Xème siècles: Apreçu général.» *Journal for the History of Arabic Science:* vol. 2, no. 1, 1978.
Archive for History of Exact Sciences. (Various Issues).
Boyer, Carl Benjamin. «Cardan and the Pascal Triangle.» *American Mathematical Monthly:* vol. 57, 1950.

Cajori, Florian. «Fourier's Improvement of the Newton-Raphson Method.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 11, 1910-1911.
——. «Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation.» *American Mahtematical Monthly:* vol. 18, 1911.
——. «Origin of the Name (Mathematical Induction).» *American Mathematical Monthly:* vol. 25, no.5, 1918.
Della Vida, Giorgio Levi. «Appunti e Quesibi di Storia Letteraria Araba, IV.» *Rivista degli studi Orientali:* vol. 14, 1933.
Freudenthal, Hans. «Zur Geschichte derl vollständigen Induktion,» *Arch. Intern. d'hist. des Sci.:* vol. 6, 1953.
Gandz, Solomon. «The Invention of the Decimal Fractions and the Application of the Exponential Calculus by Immanuel Bonfils of Tarascon (c. 1350).» *Isis:* vol. 25, no. 69, May 1936.
Hara, Kokiti. «Pascal et l'induction mathématique.» *Revue d'histoire des sciences:* vol. 15, nos. 3-4, 1962.
Hendy, D. «Euclid and the Fundamental Theorem of Arithmetic.» *Historica Mathematica:* vol. 2, 1975.
Horner, W.G. «A New Method of Solving Numerical Equations of all Orders by Continuous Approximation.» *Phil. Trans. Roy. Soc.:* 1819.
«Ibn al- Haytham et le théorème de Wilson.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 22, no. 4, 1980.
Istoriko Matematisheskei Isseldovainya: vol. 15, 1963.
Journal for History of Arabic Science: vol. 5, nos. 1-2, 1981.
Knorr,W. «Problems in the Interpretations of Greek Number Theory: Euclid and the Fundamental Theorem of Arithmetic.» *Stud. Hist. Phil. Sci.:* vol. 7, no. 3, 1976.
Luckey, Paul. «Die Ausziehung der n-ten wurzel und der binomische lehrsatz in der islamischen Mathematik.» *Mathematische Annalen:* vol. 120, 1948.
Mahnke, D. «Leibniz auf der suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung.» *Bibliotheca Mathematica:* no. 3, 1912-1913.
«Maurolico Arithmeticorum Libri duo.» *Opuscula Mathematica* (Venise): 1575.
Mullin, A. «Mathematico - Philosophical Remarks on New Theorems Analogous to the Fundamental Theorem of Arithmetic.» *Notre Dame Journal of Formal Logic:* vol. 6, no. 3, 1965.
Picutti, E. «Il libro dei quadrati di Leonardo Pisano.» *Estratto della Physis:* Anno. 21, 1979.
Rabinovitch, N.L. «Rabi Levi ben Gershon and the Origins of Mathematical Induction.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 6, no. 3, 1970.
Rashed, Rushdi. «L'Analyse diophantienne au Xème siècle: l'Exemple d'Al-Khāzin.» *Revue d'histoire des sciences:* vol. 32, no. 3, 1979.
——. «L'Extraction de la racine nième et l'invention des fractions déci-

males.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 18, no. 3, 1978.

——. «L'Induction mathématique: Al-Karaji et As-Samaw'al.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 9, no. 1, 1972.

——. «Matériaux pour une histoire des nombres amiables.» *Journal for History of Arabic Science.*

——. «Résolution des équations numériques et algèbre: Al-Tūsi-Viète.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 12, no. 3, 1974.

——. «Les Travaux perdus de Diophante, I et II.» *Revue d'histoire des sciences:* vol. 27, no. 1, 1974; vol. 28, no. 2, 1975.

Revue de l'institut des manuscrits arabes: vol. 13.

Revue de métaphysique et de morale: vol. 19, 1911.

Rosenthal, F. «Al-Asturlābi and As-Samaw'al.» *Orisis:* vol. 9, 1950.

Saïdan, Ahmad Salim. «The Earliest Extant Arabic Arithmetic.» *Isis:* vol. 57, no. 194, 1966.

Sarton, George. «The First Explanation of Decimal Fractions and Measures (1585): Together with a History of the Decimal Idea and a Facsimile (No. XVII) of Sherin's Disme.» *Isis:* vol. 23, no. 65, June 1935.

——. «The First Explanation of Decimal Fractions and Measures.» *Isis:* vol. 23, no. 65, June 1935.

Souissi, Mohammed. «Opuscules d'Ibn al-Banā' du Maroc sur les nombres parfaits, abondants, deficients et amiables.» *Annales de la faculté des lettres de l'université de Tunis:* no. 13, 1976.

Suter, Heinrich. «Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmil al-Misrī.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 11, 1910-1911.

——. «Über das Rechenbuch des al-Nasawi.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 3, 1966.

——. «Zur Geschichte des Jakobsstabes.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 9, 1895; vol. 10, 1896.

Tytler, J. «Essays on the Binomial Theorem, as Known to the Arabs.» *Asiatic Researcher:* vol. 13, 1820.

Vacca, G. «Maurolycus, The First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction.» *Bulletin of American Mathematical Society:* vol. 16, 1909.

——. «Sui Manoscritti di Leibniz.» *Bolletino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche:* no. 2, 1899.

Vaux, Carra de. «L'Astrolabe linéaire ou Bâton d'Et-tousi.» *Journal asiatique:* vol. 5, 1895.

Wallis, J. «De Combinationibus, Alternationibus et Partibus Aliquotis.» *Opera mathematica:* vol. 2, 1693.

Waterhouse, W. «Note on a Method of Extracting Roots in As-Samaw'al.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 18, no. 3, 1978.

Woepcke, Franz, «Discussions de deux méthodes arabes pour déterminer

une valeur approchée de Sin. 1°.» *Journal des mathématiques pures et appliquées:* 1854.

——. «Notice sur une théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs.» *Journal asiatique:* vol. 4, 1852.

Papers

Coumet, E. «Mersenne, Frenicle et l'élaboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du XVIIème siècle.» Thèse, Université Sorbonne, Paris, 1968. 2 vols.

Conferences

Actes du VIIIème congrès d'histoire des sciences, Moscou, 1971.

Manuscripts

Al-Tūsī, Sharaf al-Dīn. India Office 80th 766 (I.O.461).
Bibliotheca Medica laurenziana, Orient (238).
Bibliothèque nationale, Paris (2457).
Bodleian, Huntington (237).
Bodleian Library, Thruston (3).
Leiden, Or. (168/14).

فهرس

(أ)

ابن البناء، أبو العباس أحمد بن محمد: ٣١١، ٣١٤، ٣١٥، ٣٣٤، ٣٣٥، ٣٣٨
ابن ترك، عبدالحميد: ١٢، ٢٠، ٣٠
ابن جني، عثمان: ٢٩٧
ابن خلدون، أبو زيد عبدالرحمن: ٦٨
ابن سينا، أبو علي: ٢٦٦، ٣١٠
ابن عبدالحامد، هارون: ٦٧
ابن الليث، أبو الجود: ٥٨
ابن معروف، تقي الدين: ١٥٨
ابن الهيثم، أبو علي الحسن: ١٥، ٤٠، ٥٢، ٦٣، ٢٦٨، ٢٧٠ - ٢٧٦، ٢٧٨، ٢٨٠، ٢٨١، ٣٠٠، ٣٣٣، ٣٧١، ٣٧٣، ٣٧٤
أبو كامل: ١٢، ٢٠، ٢٤، ٣٥، ٦٤، ٦٨، ٧٠، ٧٣
ابيان، ب.: ١٠٨
أرخميدس: ٥٧، ٥٨
أرسطو: ٧٣
أرنالدز: ٦٤
الاستدلال التراجعي: ١٠٠
الاستدلال الرياضي: ٩٤
الاستقراء التاريخي: ٣٥٤
الاستقراء التام: ٩٩، ١١٢، ٣٦٦
الاستقراء الرياضي: ١٣، ٤١، ٥٤، ٧٤، ٧٥، ٨٤، ٨٦، ٩٣، ٩٥، ٩٦، ٩٨، ١٠٠
الاستقراء غير التام: ١٠٠
الاستمرارية التاريخية: ٢٨٦
الأشكال الهندسية: ٢٧
الأعداد التامة: ٣٠١، ٣٠٢، ٣٠٦، ٣٠٩
الأعداد المتحابة: ٣٠١، ٣٠٢، ٣١٤، ٣١٦، ٣١٧
الأعداد الناقصة: ٣٠٦، ٣٠٩
أفندي، عزت: ٣٥
اقليدس: ٢١، ٣٩، ٥١، ٥٣، ٦٨، ٦٩، ٢٤٢، ٢٤٦، ٢٧٩، ٢٩٩، ٣٠٠، ٣٠٩، ٣١٨، ٣٢٢
الاقليدسي، أبو الحسن: ٧٣، ٧٧، ١١٠، ١١١، ١٣٩، ١٤١، ١٤٩ - ١٥٣، ١٦١، ١٧٩، ٢٤٠
الالسنية: ٢٨٤
المانيا: ٣٥٦، ٣٧٠
الانتاج العلمي: ٦٥
الانثروبولوجيا: ٣٦١
أوروبا: ٦٨، ٣١٢، ٣٥٠، ٣٥٣، ٣٦٠
أوروبا الغربية: ٣٥٦
أوغتريد، و.: ١٧٣، ١٧٤
أولير: ٣١٣، ٣١٩
ايتارد، جان مارك غاسبار: ٧٦
ايراتوسين، غربال: ٣١٤، ٣٢٣
إيتوسيوس: ٥٨

(ب)

بابوس، الكسندر: ٣٩، ٥٢، ٥٤
باسكال، بليز: ٧٤، ٨٦، ٩٣، ٩٤، ٩٦، ٩٨ ـ ١٠١، ٢٩١، ٣٣١
باشيولي، لوقا: ٢٩٩
باكوك، ج. : ٩٩
باكون، فرنسيس: ٣٤٩، ٣٥٥
البحث التجريبي: ٣٧١
البحث الجبري: ١١١
البحث العددي: ١٤
البحر الأبيض المتوسط: ٣٥٣، ٣٧٦
البراهين الجبرية: ٣١
البراهين الهندسية: ٣١
برنشفيك، ليون: ٣٤٩
برنولي، جاك: ٧٤، ١٠٠، ٢٨٤
البرهان التراجعي: ١٠١
البرهان الهندسي: ٢٩٠
برهان الوحدانية: ٣٢٢
بروسيوس، ج. : ٣٠٩
بروكليس: ٥٤
البعد الانثروبولوجي: ٣٥٦
البغدادي، أبو منصور عبدالقاهر: ٥٤، ١٣٩، ١٤١، ٣٠٩، ٣١٠، ٣٢٥، ٣٣٣، ٣٤٦
بنو موسى: ٢٤، ٦٣، ٢٣٠
البنية الالسنية: ٦٤
النبية المنطقية: ٧٣
بوب، فرانز: ٣٥٧
بوجوان، ج. : ٧١، ٧٢
بورباكي، نيقولا: ٦٤، ٧٤، ٩٣، ٩٥، ٣٣٧، ٣٦٢
البوزجاني، أبو الوفا محمد بن محمد: ٢٠، ٣٦، ٦٧، ٧٢، ٢٨٧، ٣١٧
بوغندورف: ٣٥٠
بونفيس: ١٠٨
بيانو: ٩٥، ٩٦، ١٠٠
بيت الحكمة: ٢٤
بيرنسيد، ويليام: ١٧٥
البيروني، أبو الريحان: ٥٨، ٦١، ١٣٦، ١٨٥، ٢٨٧، ٣٦٧
بيل: ١٧٣

(ت)

التأويلات الأيديولوجية: ٣٧٥
تانّيري، بول: ٦٣، ٦٤، ٢٨٦
التحديث العلمي: ٧
التحليل التوافيقي: ١٤، ٩٨، ٢٨٤ ـ ٢٨٦، ٢٩١، ٢٩٢، ٢٩٤، ٢٩٨، ٣٣١، ٣٤٠، ٣٤٢
التحليل الديوفانطي: ١٥، ٢٩، ٣١، ٢٣٥، ٢٣٩، ٢٤١، ٢٦٦، ٢٧٦، ٢٧٨، ٢٨٠
التحليل العددي: ١٤، ١٠٦، ١١٤، ١٦٢، ٣٤٧
التحليل الفيلولوجي: ٣٧١
التدوين: ١٤٦ ـ ١٤٨
التدوين الجبري: ١٤٦
التدوين الرمزي: ١٤٦
التدوين العشري: ١٤٩
التراث العلمي العربي: ٧
التراث اليوناني: ٣٥٣
ترتاغليا: ٤٧
تروبفيك، جوهان: ٧٣، ١٧٤، ١٩٩
التقريب: ١١١، ١١٤، ١٣٦، ١٣٨، ١٤٢، ١٥٧، ١٨٢
التقليد الحسابي: ٤٨
التكوين التاريخي: ٧٣
التنوخي، أبو علي المحسن: ٣١٠، ٣١٥
تيتلر، ج. : ١٧٧

(ث)

ثابت بن قرة: ٢٠، ٦٣، ٢٣٠، ٢٧٩، ٣٠١، ٣٠٢، ٣٠٤ ـ ٣٠٧، ٣٠٩، ٣١٢، ٣١٥ ـ ٣١٧، ٣٢٥، ٣٢٨، ٣٢٩، ٣٤٦
الثورة الديكارتية: ٣٦٨

(ج)

الجبر العربي: ٦٣، ١١٢
الجبر الكلاسيكي: ٣٠، ٤٧
الجبر الهندسي: ٢٢

الجذر التربيعي: ٥٠ ـ ٥٢، ٦٦، ١٣٩، ١٤١، ١٤٧، ١٨٦
الجذر التكعيبي: ١٣٩، ١٨٦
الجرشي، نيقوماخوس: ٣٠٢، ٣٠٩، ٣٣٢، ٣٤٦
الجغرافية الاقتصادية: ٦٨
جبليك: ٣٠٢، ٣١٣
الجهشياري، أبو عبدالله محمد بن عبدوس: ٦٧، ٦٨

(ح)

الحجاج: ٢٤
الحساب الاقليدي: ٣٢٣، ٣٤٧
الحساب التقليدي: ١٤، ٣٠٦
الحساب الجبري: ١٢، ٢٨، ٣٠، ٣٥، ٣٨، ٣٩، ٤١، ٤٣، ٤٧، ٤٩، ٥٢، ٥٩، ١٤٤، ١٦٢، ٢٩٠، ٣٦٤، ٣٦٦
الحساب الكلاسيكي: ٢٩٩
حساب المجهولات: ١١٢
الحساب الهندي: ٦٨، ٦٩، ٧١
الحساب الهيلينستي: ٣٤٦
حسيب، خير الدين: ٨
الحلول الجذرية: ٦٠
الحلول القانونية: ٦٠

(خ)

الخازن، أبو جعفر: ٥٧، ٢٤٠، ٢٤٦ ـ ٢٤٨، ٢٥٠، ٢٥٣، ٢٥٥ ـ ٢٥٧، ٢٦١، ٢٦٣، ٢٦٥، ٣٠٠
الخلافة الإسلامية: ٦٥
الخوارزمي، محمد بن موسى: ١٢، ٢٠، ٢٢ ـ ٣١، ٣٣، ٣٥، ٣٦، ٤٢، ٤٦، ٤٨، ٦٢، ٦٤، ٦٨ ـ ٧١، ١١٢، ٢٣٦، ٢٣٩، ٢٨٨، ٢٨٩، ٣٦٤
الخيّام، أبو الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي النيسابوري: ٤٨، ٥٧، ٥٩، ٦١، ١٧٩، ١٨٤ ـ ١٨٦، ٢٣٠، ٢٦٧، ٢٩٠، ٣٦٧

(د)

الدالة اللوغاريتمية: ١٠٧، ١٦١
دسلير، رينيه فرنسوا: ٣٣١
دوبيز، ليونارد: ٩، ٤٦، ٢٩٩
دوركهايم، اميل: ٦٥
دوشال، ش.: ١٧٣
الدولة الاسلامية: ٦٨
دوميزرياك، باشيه: ٩٦، ٩٧، ١٠٠، ٢٣٥، ٢٣٦، ٢٦٠، ٢٩٩، ٣٠٩، ٣٣٧
دوموافر: ١٠٠
دوهايم، بيير موريس: ٢٨٦
دومرنج: ٣٥٠
دي ماستر، جوزف: ٣٥٧
ديديه (الأب): ٣٣٠
ديكارت، رينيه: ٤٧، ٣٠٧، ٣١٢، ٣١٥، ٣٢٦، ٣٤٧، ٣٥٥، ٣٦٣، ٣٧٣
ديوفنطس: ١٢، ٢١، ٢٧، ٤٣، ٤٤، ٢٣٥، ٢٣٦، ٢٣٨، ٢٣٩، ٢٥٧، ٢٦٠ ـ ٢٦٣، ٢٨٨، ٢٩٩، ٣٦٢

(ر)

رابينوفيتش، ن.: ٧٥، ٩٣
راشد، رشدي: ٨، ٧٠ ـ ٧٢
رافسون، ج.: ١٧٣
روبيرفال: ٣١٢
روبنسون: ١٧٥
رودولف، ش.: ١٠٨
روزنبرغ، فرديناند: ٣٥٠
روفيني: ١٧٤
الرومان: ٣٥٦
الرياضيات العربية: ٩ ـ ١١، ١٣، ٤٨، ١٤٠، ٢٩٩، ٣٠٠، ٣٣٢، ٣٤٨
ـ تاريخ: ١٠، ١١، ١٥، ٣٥، ٥٢، ١٠٥، ١٢٧، ١٧٨، ٢٣٦، ٣١٩
الرياضيات الكلاسيكية: ٩، ١١
الرياضيات الهيلينستية: ١٥
الرياضيون: ١٢ ـ ١٤، ٢٠
الرياضيون العرب: ١٤، ٣٦، ٥٨، ١٣٥، ٢٧٩، ٣١٧
الرياضيون الهنود: ٢١، ٥٨، ٢٧٣
الرياضيون اليونان: ٢١، ٥٩، ٦٤
رينان، أرنست: ٦٤، ١٩٩، ٢٨٦، ٣٥٩، ٣٦٠

(ز)

زويتن، هيروينموس جورج: ٦٤، ٣٦٣
زين الدين، حسين: ٨

(س)

سارتون، جورج: ١٠٨، ١٤٠
سان ـ سيمون: ٣٥٧
سترويك، جون: ١٠٩
ستيڤل، ميشال: ٣٦٧
ستيڤن، سيمون: ٤٩، ١٠٧، ١٠٩، ١٦١، ١٨٥، ٣٦٧
سعيدان، أحمد سليم: ١١١، ١٤٠
السموأل بن يحيى، المغربي: ١٢، ٣١، ٣٧، ٤١، ٤٩ ـ ٥١، ٥٣ ـ ٥٦، ٧٣، ٧٥، ٧٨، ٨٠، ٨٦، ٩١، ٩٢، ٩٤، ٩٦، ١٠١، ١١١، ١١٣ ـ ١١٦، ١١٩ ـ ١٢٣، ١٢٥ ـ ١٢٧، ١٣٣، ١٣٤، ١٣٧ ـ ١٤١، ١٤٤، ١٤٥، ١٤٦ ـ ١٥١، ١٥٦ ـ ١٥٨، ١٨٤، ٢٤١، ٢٨٠، ٢٩٠، ٢٩١، ٣٣٧
سنان بن الفتح: ١٢، ٢٠، ٢٤، ٣١، ٣٢، ٣٥
السهروردي: ١٢
سوتر، هنريش: ١٥٨، ٣٥١
سوسيولوجيا المعرفة: ٢٨٦
سيديللو، لويس بيار: ١٧٦، ١٧٧
سيلا، أ.: ٧١
السيوطي، جلال الدين عبدالرحمن: ٢٩٧

(ش)

الشهرزوري: ٧٠، ١٧٩
شوبل: ٣٦٧
شوكيه: ٤٩، ٣٦٧

(ص)

صليبا، جورج: ٨
صناعة الجبر: ٥٧، ٢٥٩
صناعة الحساب: ٤٨
صناعة الهندسة: ٢٩٠
الصولي: ٦٧
الصيداني: ٢٠
الصينيون: ٣٥٦

(ط)

الطبري، أبو جعفر محمد بن جرير: ٦٧
الطرق العددية: ١١١، ١١٢
طريقة روفيني ـ هورنر: ٦٠، ١٠٦، ١١٥، ١٢٦ ـ ١٢٨، ١٣٣، ١٣٦، ١٦١، ١٧٨، ١٨٤
الطوسي، شرف الدين: ٣٣، ٣٨، ٤٨، ٥٩ ـ ٦٣، ٧٣، ١٢٧، ١٢٩ ـ ١٣٣، ١٦٢، ١٧٣، ١٧٩، ١٨٤ ـ ١٨٦، ١٩٠، ١٩١، ١٩٤، ١٩٦، ١٩٨، ٢٠٠، ٢٠١، ٢٠٥، ٢٠٧، ٢٠٨، ٢١٠، ٢١٢، ٢١٣، ٢١٧ ـ ٢٢١، ٢٢٦، ٢٢٨، ٢٢٩، ٢٣١، ٣٦٨
الطوسي، نصير الدين: ١٣٣

(ع)

العرب: ٣٦، ٧٣، ١٥٩، ١٧٩، ٢٣٩، ٢٩٣، ٣١٦، ٣٥٦، ٣٦٢
عصر النهضة: ١٤، ١٩٩
العصر الوسيط: ٥٦
علم الأرصاد الفلكية: ٦٥
علم الأصوات: ٢٩٤، ٢٩٦ ـ ٢٩٨
علم البصريات: ٢٧٤
علم البناءات الجبرية: ٦٤
علم الجبر: ١١، ٢٠ ـ ٢٣، ٢٧، ٣٣، ٦٢، ٧٠، ٢٣٦، ٢٤٠
علم الصرف: ٢٩٧، ٢٩٨
علم الضوء الكلاسيكي: ٣٧٦
علم العدد: ٢٧٩
علم العروض: ٢٩٥
العلم الغربي: ١٦، ٣٦١، ٣٦٢
علم الفلك: ٨، ٥٨، ٦٦، ٧٠، ٧١
العلم الكلاسيكي: ٣٥٥، ٣٦٢، ٣٧٤
علم الكلام: ٥٤
علم اللغة: ٢٨٧، ٢٩٢
علم المثلثات: ٦٥، ٣٠٠
علم المناظر: ٣٧١
العلم الهليني: ٣٦٢

العلوم
- تاريخ: ٧، ١٣
العلوم الأوروبية: ٣٥٢، ٣٥٣
العلوم الدينية: ٦٨
العلوم الرياضية: ٣٠١
العلوم الصينية: ٢٨٧
العلوم الطبيعية: ٣٧٤
العلوم العربية: ٧، ٩، ٦٥، ١٥٨، ١٧٨، ٢٨٥، ٢٩٨، ٣٤٩، ٣٦٠، ٣٦٢
العلوم الهندوسية: ٢٨٧
عمر الخيام انظر الخيام، أبو الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي النيسابوري

(غ)

غاليليو: ٣٤٩، ٣٥٥
غانتر: ٧٤، ١٠٨
غاني، ج. : ٧٠
غريم، جاكوب: ٣٥٨

(ف)

الفارابي، أبو نصر: ٣٧١، ٣٧٣
الفارس، كمال الدين: ٢٦٧، ٣١٠، ٣١٥، ٣١٧، ٣١٨، ٣٢٣، ٣٢٤، ٣٢٦، ٣٢٩ - ٣٣١، ٣٣٤، ٣٣٧ - ٣٤٣، ٣٧١
فاكا، ج. : ٧٤، ٧٥، ٢٦٩
فرنسا: ٣٥٦، ٣٦١، ٣٧٠
فريدونتال، هانز: ٧٥، ٨٤ - ٨٦، ٩٣
فرينيكل: ٩٦، ٣٣١، ٣٤٣
الفكر الرياضي: ٢٠٧
الفلسفة التقليدية: ٥٤
فلسفة الرياضيات: ٥٥
الفلسفة العربية: ٥٦
فوجل، ك. : ١٥٩
فورييه، ج. : ١٧٤
فولهابر: ٣٦٧
فون شليجل، فريدرتي: ٣٥٧، ٣٥٨
فيبر، ماكس: ٦٥
ڤيت، فرانسوا: ٤٧، ١٢٧، ١٣٢، ١٤٦، ١٦١، ١٧٣ - ١٧٥، ١٨٤، ١٨٥، ١٩٨، ١٩٩، ٢٠١ - ٢٠٣، ٢٠٥، ٢٠٧، ٣٢٧، ٣٦٣
ڤيدا، جيورجيو ديللا: ٣٤
فيدمان، ايلهارت: ٣٥١
فيرما: ١٥، ٢٣٥، ٢٦٠، ٢٦٥، ٢٦٧، ٢٩٩، ٣٠٧، ٣١٢، ٣١٥، ٣٢٧، ٣٤٣، ٣٤٥، ٣٤٧
فيكتور، س. : ٧٠، ٧٥
فيكه: ٣٥١
فيينا: ١٥٩

(ق)

قاعدة الأصفار: ١٤٠، ١٤١
القبيصي، عبدالعزيز (أبو صقر): ٣٠٨، ٣٣٣
قدامة بن جعفر، أبو الفرج بن زياد البغدادي: ٦٨
قسطا بن لوقا: ٢٣٦، ٢٣٧، ٣٠٠
القوى البحتة: ١٦٢، ١٨٥، ١٩٩
القوى المقترنة: ١٨٥
القيمة التقريبية: ١٧٧

(ك)

كاجوري، فلورين: ١٧٤
كارميشيل، روبرت دانييل: ٢٧٥
الكاشي، غياث الدين جمشيت: ٤٧، ٧٢، ١٠٩، ١١٢، ١١٥، ١٢٦، ١٢٨، ١٣٣، ١٣٥، ١٣٩، ١٥٤، ١٥٥، ١٥٧، ١٥٩، ١٦٠، ١٦٢، ١٧٧ - ١٧٩، ١٨١، ٣٠٧، ٣١١
كانط، عمانوئيل: ٣٤٩
كانتور، موريتز: ٧٣، ١٧٤
كاهين، س. : ٦٨
كتب
- الأصول: ٢٤، ٢٧، ٣٩، ٤٠، ٥٢، ٢٤٠، ٢٤٦، ٢٧٩، ٣٠٠، ٣١٩، ٣٢٠، ٣٢٣، ٣٣٧
- الباهر في الجبر: ٣٤، ٤٩، ٥٢، ٧٦، ١١٣، ١٣٦، ١٣٩
- بحث الاقليدسي: ١٥٠
- البحث في محيط الدائرة: ١٥٤، ١٥٦
- البديع في الحساب: ٣٨، ٤٠، ٤٣، ٥٣، ٧٨، ٨٤، ٣٠٨

ـ التكملة: ٥٤
ـ التناغم الشامل: ٣١٢
ـ دروس في تاريخ الفلسفة: ٣٥٦
ـ الدور والوصايا: ٤٧
ـ الشفاء: ٢٦٦، ٣١٠
ـ العقود والأبنية: ٤٦
ـ العين: ٢٩٦، ٢٩٨
ـ الفخري: ٣٢، ٣٦، ٤١، ٤٣، ٤٩، ٥٣، ٨٤
ـ الفصول: ١١١
ـ في استخراج الكعاب وأضلع ما وراءه من مراتب الحساب: ١٨٥
ـ في الحساب الهندي: ٤٧
ـ في الكرة والأسطوانة: ٥٨
ـ القوامي في الحساب الهندي: ١١٤
ـ كتاب الجبر والمقابلة: ١٩
ـ كوبرنيكوس: ٨
ـ المثلث الحسابي: ٧٤، ٩٦
ـ المدخل في علم النجوم: ٤٦
ـ المسائل العددية: ٢٩، ٣١، ٣٦، ٤٣، ٤٨، ٢٣٥ ـ ٢٣٧، ٢٤٠، ٢٧٩، ٣٠٠، ٣٦٣
ـ المعروف والمشروع: ٣١
ـ مفاتيح العلوم: ٦٨
ـ مفتاح الحساب: ١٠٩، ١٢٧، ١٥٣، ١٥٤، ١٥٦، ١٥٨، ١٧٨، ٢٩١، ٣٠٧
ـ الموسوعة الفرنسية: ٩٩
ـ نوادر الأشكال: ٤٧
ـ الوزراء والكتاب: ٦٧
الكرجي، أبو بكر بن محمد الحسين: ١٢، ١٣، ٣١ ـ ٣٣، ٣٥، ٣٧ ـ ٣٩، ٤٣، ٤٥، ٤٩، ٥٠، ٥٢ ـ ٥٤، ٦٦، ٧٠، ٧٢ ـ ٧٥، ٧٨، ٨٠، ٨٦، ٩١، ٩٤، ٩٦، ١١١ ـ ١١٣، ١٢٧، ١٣٢، ١٣٦، ١٤٤، ١٦٢، ١٨٤، ٢٦٠، ٢٩٠، ٢٩١، ٣٠٨، ٣٢٧، ٣٣٢، ٣٣٧، ٣٦٥
كردان: ١٦٠، ٢٠٩، ٢٣١
الكسور العشرية: ١٠٥، ١٠٦ ـ ١١٠، ١١٢، ١١٣، ١٢٨، ١٣٩، ١٤٢، ١٤٥، ١٤٦، ١٤٩، ١٥١، ١٥٤ ـ ١٥٩، ١٦٣، ١٨١، ٣٦٦
الكندي، يوسف يعقوب: ٦٧، ٧٢، ٣٧١
كواريه: ٣٥٠
كونت، أوغست: ٣٤٩
كوهن، هرمان: ٣٥٩
كينه، ادغار: ٣٥٦

(ل)

لاغرانج: ١٧٤، ١٧٥، ٢٦٩
اللّبان، محمد بن محمد: ٦٧، ٦٩
اللغة الألمانية: ٣٥٨
اللغة السنسكريتية: ٣٥٨
اللغة العربية: ٩، ١٠، ١٣، ٦٨، ٢٩٦، ٣٠٧، ٣٥٤، ٣٧٤
اللغة العلمية: ٩
اللغة الفارسية: ٦٧
اللغة الفلسفية: ٢٨٤
لـوكي، بـول: ٤٧، ٧٣، ١١٥، ١٣٣، ١٥٤، ١٧٧، ٣٥٢
ليفي بن جرسون: ٤٦، ٧٥، ٩٣، ٩٦

(م)

المأمون، عبدالله بن هارون الرشيد: ١٩
الماركسية: ٦٥
ماسينيون، لويس: ٦٤
المبدأ الدلالي: ٢٩٤
مبرهنة بيزوت: ٢٧٢ ـ ٢٧٤
المبرهنة الصينية: ٢٧٠
مبرهنة فيرما: ٢٦٩، ٣٠٠
مبرهنة ويلسون: ١٥، ٢٦٩ ـ ٢٧١، ٢٧٣ ـ ٢٧٥، ٢٨١، ٣٤٦
المدارس الرياضية العربية: ٢٠٧
المدرسة الألمانية: ٣٥٨
المدرسة الايطالية: ٤٧، ٣٦٣
المدرسة الجبرية الانكليزية: ٩٩
المدرسة الفيلولوجية: ٣٥٧
مذهب الخليل: ٢٩٥
المسعودي، علي بن الحسن: ٦٧
المصري، أبو الحسن علي بن يونس: ٣١٧
المصريون: ٣٠٢، ٣٥٦
المعادلات التربيعية: ٤٧

المعادلات التكعيبية: ٤٧، ٥٧، ٥٨، ٦٠، ٦٢، ١٧٥، ٢٠٩، ٢١٢، ٢١٨، ٢٢٩، ٢٣١، ٢٩٠
المعادلات الجبرية: ٦٣
المعادلات العددية: ٦٣
المعرفة الجبرية: ٦٢
المفهرسون العرب: ٤٨
متوكلا، جون إيتيان: ١٧٤، ٣٦٣
المنهج التقهقري: ١٠٠
موراي، ج.: ١٧٤
موردك، لويس جويل: ٧١، ٧٣
مورغان، وليام ويلسون: ٩٩
مورو ليكو: ٧٤، ٧٥، ٨٥، ٨٦، ٩٣، ٩٥
المؤلفون العرب: ٣٥
موللر، ماكس: ٣٥٨
مونتسكيو، شارل لويس: ٣٥٤
مونتمور: ١٠٠، ٢٨٤
الميتافيزيقيا: ٧١

(ن)

نابيه: ١٦١
النزعة الانتقائية: ١٠٩
نسلمان، جورج فرديناند: ٣٦٣
النسوي، علي بن أحمد: ٦٧، ١٣٥
نظرية الأعداد: ١٣، ٤٨، ١٠٦، ١١٢، ٢٧٣، ٢٨٠، ٢٨٨، ٢٩٩ ـ ٣٠١، ٣١٢، ٣١٦، ٣٤٧، ٣٦٦
نظرية فيثاغورس: ٢٤٠، ٢٧٦، ٢٨٠
نظرية النسبة: ٧٣
نظرية الوظيفية المثلى: ٢٩٤
النهضة الأوروبية: ٣٦٩
النهضة الشرقية: ٣٥٦
النهضة العلمية: ٣٧٥
نيوتن، اسحق: ١٧٣ ـ ١٧٥، ٢٣٠

(هـ)

هارا، كوكيتي: ٧٥، ٩٤
هاريوت، ث.: ١٧٣ ـ ١٧٥
همبولت، الكسندر فون: ٣٧٠
هنجر، هربرت: ١٥٩
الهندسة الجبرية: ٦٠، ١٨٠، ١٨٤، ٢٣٠
الهندسة المترية: ٢٣
هنكل: ١٧٤، ١٧٧
الهنود: ٣٥٦
هورنر: ١٢٦، ١٣٠، ١٣١، ١٧٤
هوكهايم: ٣٣
هيث، ث.: ٣٣٧
هيغل، فردريك: ٣٥٧

(و)

وارينغ، إ.: ٢٦٨ ـ ٢٧٠
والليس، جنيفر: ١٠٠، ١٤٦، ١٧٥
وايليتنر: ١٧٤
الوثائق الرياضية: ١٠٥
الوطن العربي: ٧
ولسون، جون: ٢٦٨، ٢٦٩
ويبك، فرانز: ١٠، ٣٣، ٣٥، ٤٧، ٦٤، ١٧٦، ١٧٧، ٣٠٠، ٣٠٧
ويتاكر، ادموند تايلور: ١٧٥
ويتسايد، ديريل توماس: ١٦١

(ي)

اليزدي، شرف الدين: ١٥٩، ٣١١
اليزدي، محمد بكر: ١٥٩
اليونان: ٣٤٩
اليونانيون: ٥٧
يونغ، ج.ر.: ١٧٥

- الجذور السياسية والفكرية والاجتماعية للحركة القومية العربية (الاستقلالية) في العراق...طبعة ثالثة
(سلسلة اطروحات الدكتوراه (٥)) (٤٨٦ ص ـ ٩,٥٠ $) .... د. وميض جمال عمر نظمي
- السياسة الامريكية تجاه الصراع العربي ـ الاسرائيلي ١٩٦٧ ـ ١٩٧٣
(سلسلة اطروحات الدكتوراه (٤))... طبعة ثانية (٣٤٤ ص ـ ٧ $) .... د. هالة ابو بكر سعودي
- الهجرة الى النفط... طبعة ثالثة (٢٤٠ ص ـ ٥ $) .... د. نادر فرجاني
- العرب وافريقيا... طبعة ثانية (٨٢٤ ص ـ ١٦,٥٠ $) .... ندوة فكرية
- الطاقة النووية العربية: عامل بقاء جديد... طبعة ثانية (١٥٦ ص ـ ٣ $) .... د. عدنان مصطفى
- الديمقراطية وحقوق الانسان في الوطن العربي... طبعة ثالثة
(سلسلة كتب المستقبل العربي (٤)) (٣٥٢ ص ـ ٧,٥٠ $) .... مجموعة من الباحثين
- الحياة الفكرية في المشرق العربي ١٨٩٠ ـ ١٩٣٩ (٢٣٦ ص ـ ٤,٥٠ $) .... اعداد مروان بحيري
- التحليل السياسي الناصري: دراسة في العقائد والسياسة الخارجية ... طبعة ثانية
(سلسلة اطروحات الدكتوراه (٣)) (٢٩٦ ص ـ ٨ $) .... د. محمد السيد سليم
- العمالة الأجنبية في اقطار الخليج العربي (٧١٢ ص ـ ١٤ $) .... ندوة فكرية
- انتقال العمالة العربية: المشاكل ـ الآثار ـ السياسات (٣١٢ ص ـ ٦ $) .... د. ابراهيم سعد الدين
ود. محمود عبد الفضيل
- جامعة الدول العربية: الواقع والطموح (١٠٠٤ ص ـ ٢٠ $) .... ندوة فكرية
- الصراع العربي ـ الاسرائيلي: بين الرادع التقليدي والرادع النووي (٢٤٨ ص ـ ٥ $) ... طبعة ثانية .... امين حامد هويدي
- ببليوغرافيا الوحدة العربية ١٩٠٨ ـ ١٩٨٠ ـ المجلد الأول: المؤلفون ـ القسم الأول. بالعربية
(١٠٦٠ ص ـ ٢١ $) .... مركز دراسات الوحدة العربية.
- ببليوغرافيا الوحدة العربية ١٩٠٨ ـ ١٩٨٠ ـ المجلد الأول: المؤلفون ـ
القسم الثاني: بالانكليزية والافرنسية (١٠٩٦ ص ـ ٣٢ $) .... مركز دراسات الوحدة العربية
- ببليوغرافيا الوحدة العربية ١٩٠٨ ـ ١٩٨٠ ـ المجلد الثاني: العناوين
ـ القسم الأول: بالعربية (٤٠٠ ص ـ ٨ $) .... مركز دراسات الوحدة العربية
- ببليوغرافيا الوحدة العربية ١٩٠٨ ـ ١٩٨٠ ـ المجلد الثاني: العناوين
ـ القسم الثاني: بالانكليزية والافرنسية (٣٦٨ ص ـ ٧,٥٠ $) .... مركز دراسات الوحدة العربية
- ببليوغرافيا الوحدة العربية ١٩٠٨ ـ ١٩٨٠ ـ المجلد الثالث
الموضوعات (ثلاثة اقسام) (٢٢٧٢ ص ـ ٦٥ $) .... مركز دراسات الوحدة العربية
- النظام الاقليمي العربي... طبعة خامسة جديدة ومطورة (٣٢٤ ص ـ ٦,٥٠ $) .... جميل مطر ود. علي الدين هلال
- التطور التاريخي للانظمة النقدية في الأقطار العربية... طبعة ثالثة (٤٧٢ ص ـ ٩,٥٠ $) .... د. عبد المنعم السيد علي
- مصر والعروبة وثورة يوليو (سلسلة كتب المستقبل العربي (٣)) (٤٠٠ ص ـ ٨ $) .... مجموعة من الباحثين
- الفكر الاقتصادي العربي وقضايا التحرر والتنمية والوحدة... طبعة ثانية (٢٤٨ ص ـ ٥ $) .... د. محمود عبد الفضيل
- المواصلات في الوطن العربي... طبعة ثانية (٤٠٤ ص ـ ٨ $) .... ندوة فكرية
- السياسة الامريكية والعرب .. طبعة ثانية مزيدة ومنقحة (سلسلة كتب المستقبل العربي (٢))
(٣٦٨ ص ـ ٧,٥٠ $) .... مجموعة من الباحثين
- دراسات في التنمية والتكامل الاقتصادي العربي... طبعة ثالثة
(سلسلة كتب المستقبل العربي (١)) (٤٧٦ ص ـ ٩,٥٠ $) .... مجموعة من الباحثين
- التعريب ودوره في تدعيم الوجود العربي والوحدة العربية. طبعة ثانية (٥٢٨ ص ـ ١٠,٥٠ $) .... ندوة فكرية
- المرأة ودورها في حركة الوحدة العربية... طبعة ثانية (٥٥٦ ص ـ ١١ $) .... ندوة فكرية
- الامكانات العربية... طبعة ثانية (١٣٦ ص ـ ٣ $) .... د. علي نصار
- صور المستقبل العربي... طبعة ثانية (٢١٢ ص ـ ٤ $) .... د. ابراهيم سعد الدين وآخرون
- النظام الاجتماعي العربي الجديد... طبعة ثالثة (٣٠٤ ص ـ ٦ $) .... د. سعد الدين ابراهيم
- تجربة دولة الامارات العربية المتحدة... طبعة ثالثة (٨١٦ ص ـ ١٦,٥٠ $) .... ندوة فكرية
- التصور القومي العربي في فكر جمال عبد الناصر ١٩٥٢ ـ ١٩٧٠.. طبعة ثالثة
(سلسلة اطروحات الدكتوراه (٢)) (٤١٦ ص ـ ٨,٥٠ $) .... د. مارلين نصر
- البعد التكنولوجي للوحدة العربية... طبعة ثالثة (١١٦ ص ـ ٢,٥٠ $) .... د. انطوان زحلان
- القومية العربية والاسلام.. طبعة ثالثة (٧٨٠ ص ـ ١٥,٥٠ $) .... ندوة فكرية
- التكامل النقدي العربي: المبررات ـ المشاكل ـ الوسائل... طبعة ثالثة (٧٤٠ ص ـ ١٥ $) .... ندوة فكرية

- سلسلة التراث القومي: الاعمال القومية لساطع الحصري /٣ مجلدات
(٣١٢٤ ص ـ ٦٢,٥٠ $) ....
- مجلة المستقبل العربي: المجلدات السنوية ٩ سنوات (ثمن مجلات السنة الواحدة ٤٠ $) .... مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة الثقافة القومية

- حقوق الانسان في الوطن العربي (١) (١٨٠ ص - ٢ $) .... حسين جميل
- عن العروبة والاسلام (٢) (٤٧٦ ص - ٥ $) .... د. عصمت سيف الدولة
- الوطن العربي: الجغرافية الطبيعية والبشرية (٣) (١٨٤ ص - ٢ $) .... ناجي علوش
- جامعة الدول العربية ١٩٤٥ - ١٩٨٥: دراسة تاريخية (٤) (١٢٨ ص - ١,٥٠ $) .... أحمد فارس عبد المنعم
- الجماعة الاوروبية: تجربة التكامل والوحدة (٥) (٢٨٨ ص - ٣ $) .... د. عبد المنعم سعيد
- التعريب والقومية العربية في المغرب العربي (٦) (٢٠٠ ص - ٢ $) .... د. نازلي معوض أحمد
- الوحدة النقدية العربية (٧) (١٦٨ ص - ١,٥٠ $) .... د. عبد المنعم السيد علي
- اوروبا والوطن العربي (سلسلة الثقافة القومية (٨)) (٣٦٨ ص - ٣,٥٠ $) .... د. نادية محمود محمد مصطفى
- المثقفون والبحث عن مسار: دور المثقفين في اقطار الخليج العربية في التنمية (٩)
  (٢٤٤ ص - ٢,٥٠ $) .... د. اسامة عبد الرحمن
- نحو عقد اجتماعي عربي جديد: بحث في الشرعية الدستورية (١٠) (١٠٨ ص - دولار واحد) .... د. غسان سلامة
- السياسة الأمريكية تجاه الصراع العربي - الاسرائيلي ١٩٧٣ - ١٩٧٥
  (١١) (١٤٤ ص - ١,٥٠ $) .... د. محمد الاطرش
- معوقات العمل العربي المشترك (١٢) (١٥٦ ص - ٢ $) .... د. وليد عبد الحي
- رحّل في ارض العرب: عن الهجرة للعمل في الوطن العربي (١٣) (١١٦ ص - ١,٥٠ $) .... د. نادر فرجاني
- التجزئة العربية كيف تحققت تاريخياً؟ (سلسلة الثقافة القومية (١٤)) (٣٢٤ ص - ٤ $) .... د. أحمد طربين
- الاستيطان الاسرائيلي في فلسطين: بين النظرية والتطبيق (١٥) (٣٠٤ ص - ٣,٥٠ $) .... د. نظام محمود بركات
- الاستراتيجية الاسرائيلية لتطبيع العلاقات مع البلاد العربية (١٦) (٢٨٠ ص - ٣,٥٠ $) .... محسن عوض
- المشروعات العربية المشتركة: الواقع والآفاق (١٧) (١٨٠ ص - ٣ $) .... د. سميح مسعود برقاوي
- وحدة العرب في الشعر العربي (١٨) (٤٥٦ ص - ٥,٥٠ $) .... عبد اللطيف شرارة
- العرب والعلم والتقانة (١٩) (١٢٨ ص - ١,٥٠ $) .... انطوان زحلان
- موقف فرنسا والمانيا وإيطاليا من الوحدة العربية ١٩١٩ - ١٩٤٥ (١) (٥٤٠ ص - ١١ $) .... د. علي محافظة
- تطور الوعي القومي في المغرب العربي (سلسلة كتب المستقبل العربي (٨)) (٣٦٠ ص - ٧ $) .... مجموعة من الباحثين
- الوحدة الاقتصادية العربية: تجاربها وتوقعاتها (جزءان).
  (١٢٩٦ ص - تجليد عادي ٢٦ $/ تجليد فني ٣٠ $) .... د. محمد لبيب شقير
- تطور الفكر القومي العربي (٤٠٨ ص - ٨ $) .... ندوة فكرية
- نحو علم اجتماع عربي: علم الاجتماع والمشكلات العربية الراهنة
  (سلسلة كتب المستقبل العربي (٧) (٤٠٨ ص - ٨ $) .... مجموعة من الباحثين
- تهيئة الانسان العربي للعطاء العلمي (٥٤٨ ص - ١١ $) .... ندوة فكرية
- التصحر في الوطن العربي (١٧٦ ص - ٣,٥٠ $) .... د. محمد رضوان الخولي
- كيف يصنع القرار في الوطن العربي (٢٦٠ ص - ٥ $) ... طبعة ثانية .... د. ابراهيم سعد الدين وآخرون
- صناعة الانشاءات العربية (٣٩٢ ص - ٨ $) .... د. انطوان زحلان
- التراث وتحديات العصر في الوطن العربي: الاصالة والمعاصرة (٨٧٢ ص - ١٧,٥٠ $) ... طبعة ثانية .... ندوة فكرية
- السياسات التكنولوجية في الاقطار العربية (٥٢٨ ص - ١٠,٥٠ $) .... ندوة فكرية
- الفلسفة في الوطن العربي المعاصر (٣٣٦ ص - ٦,٥٠ $) ... طبعة ثانية .... ندوة فكرية
- نحو استراتيجية بديلة للتنمية الشاملة... طبعة ثانية (١٩٦ ص - ٤ $) .... د. علي خليفة الكواري
- الاعلام العربي المشترك: دراسة في الاعلام الدولي العربي... طبعة ثانية (١٦٤ ص - ٣,٥٠ $) .... د. راسم محمد الجمال
- صورة العرب في صحافة المانيا الاتحادية... طبعة ثانية (سلسلة اطروحات الدكتوراه (٨))
  (٢٢٠ ص - ٤,٥٠ $) .... د. سامي مسلّم
- ازمة الديمقراطية في الوطن العربي (٩٢٨ ص - ١٨,٥٠ $) ... طبعة ثانية .... ندوة فكرية
- التنمية العربية: الواقع الراهن والمستقبل.. طبعة ثانية،
  (سلسلة كتب المستقبل العربي (٦)) (٣٦٠ ص - ٧ $) .... مجموعة من الباحثين
- التكوين التاريخي للأمة العربية: دراسة في الهوية والوعي... طبعة ثالثة (٣٣٦ ص - ٦,٥٠ $) .... د. عبد العزيز الدوري
- دراسات في القومية العربية والوحدة (سلسلة كتب المستقبل العربي (٥)) (٢٨٤ ص - ٧,٥٠ $) .... مجموعة من الباحثين
- الثروة المعدنية العربية: امكانات التنمية في اطار وحدوي... طبعة ثانية (١٥٢ ص - ٣ $) .... د. محمد رضا محرم
- البحر الاحمر والصراع العربي - الاسرائيلي: التنافس بين استراتيجيتين،
  طبعة ثانية (سلسلة اطروحات الدكتوراه (٧)) (٣٦٠ ص - ٧ $) .... د. عبد الله عبد المحسن السلطان

من منشورات
مركز دراسات الوحدة العربية

- المغرب العربي الكبير: نداء المستقبل (١٨٤ص ـ ٤$) .... د. مصطفى الفيلالي
- الاقتصاد الاسرائيلي (٤٠٤ ص ـ ٨ $) .... د. حسين ابو النمل
- مستقبل الأمة العربية: التحديات.. والخيارات (٥٧٦ ص ـ ١٠ $) .... د. خير الدين حسيب وآخرون
- السلطة والمجتمع والعمل السياسي: من تاريخ الولاية العثمانية في بلاد الشام (سلسلة اطروحات الدكتوراة (١٣)) (٢٤٨ ص ـ ٥ $) .... د. وجيه كوثراني
- المورد الواحد والتوجه الانفاقي السائد (٢١٦ ص ـ ٤,٥٠ $) .... د. اسامة عبد الرحمن
- العرب والعالم (٤١٢ ص ـ ٨,٥٠ $) .... د. علي الدين هلال وآخرون
- المجتمع والدولة في الوطن العربي (٤٥٢ ص ـ ٩ $) .... د. سعد الدين ابراهيم وآخرون
- الفلسفة العربية المعاصرة مواقف ودراسات (٥٠٠ ص ـ ١٠ $) .... ندوة فكرية
- المشاريع الوحدوية العربية، ١٩١٣ ـ ١٩١٧ دراسة توثيقية (٧٦٠ ص ـ ٢٠ $) .... د. يوسف خوري
- البحر المتوسط في العالم المتوسط: دراسة التطور المقارن للوطن العربي وتركيا وجنوب أوروبا (١٢٠ ص ـ ٢,٥٠ $) .... د. أمين ود. فيصل ياشير
- سعياً وراء الرزق دراسة ميدانية عن هجرة المصريين للعمل في الأقطار العربية (٢٥٤ص ـ ٧$) .... د. نادر فرجاني
- التشكيلات الاجتماعية والتكوينات الطبقية في الوطن العربي دراسة تحليلية لاهم التطورات والاتجاهات خلال الفترة ١٩٤٥ ـ ١٩٨٥ (٢٠٢ ص ـ ٥$) .... د. محمود عبد الفضيل
- الدبلوماسية المصرية في عقد السبعينات: دراسة في موضوع الزعامة (سلسلة اطروحات الدكتوراه (١٢)) (٢٠٨ ص ـ ٤$) .... د. سلوى شعراوي جمعة
- صورة العرب في الصحافة البريطانية دراسة اجتماعية للثبات والتغير في مجمل الصورة (سلسلة اطروحات الدكتوراه (١١)) (٢٤٨ ص ـ ٧$) .... د. أحمد يوسف أحمد
- الصراعات العربية ـ العربية ١٩٤٥ ـ ١٩٨١: دراسة استطلاعية (٢٣٦ ص ـ ٤,٥٠ $) .... د. أحمد يوسف أحمد
- تكوين العقل العربي (نقد العقل العربي (١)) ... طبعة ثالثة (٣٨٨ ص ـ ٨ $) .... د. محمد عابد الجابري
- ما بعد الرأسمالية (سلسلة كتب المستقبل العربي (٩)) (٢٦٠ ص ـ ٥ $) .... د. سمير أمين
- مستقبل الصراع العربي ـ الاسرائيلي (٢٤٤ ـ ص ٥ $) .... د. أسامة الغزالي حرب
- القوى الخمس الكبرى والوطن العربي ـ دراسة مستقبلية ـ (٢٢٤ ص ـ ٤,٥٠ $) .... د. ناصيف يوسف حتي
- المجتمع والدولة في الخليج والجزيرة العربية (من منظور مختلف) (٢١٦ ص ـ ٤,٥٠ $) .... د. خلدون حسن النقيب
- المجتمع والدولة في المشرق العربي (٣٢٠ ص ـ ٦,٥٠ $) .... د. غسان سلامة
- المجتمع والدولة في المغرب العربي (١٥٦ ص ـ ٢ $) .... د. محمد عبد الباقي الهرماسي
- الحركات الاسلامية المعاصرة في الوطن العربي (٤٢٤ ص ـ ٨,٥٠ $) .... ندوة فكرية
- العرب ومستقبل النظام العالمي (٢٩٢ ص ـ ٦ $) .... د. عبد المنعم سعيد
- العرب ودول الجوار الجغرافي (٦٣٦ ص ـ ٤,٥٠ $) .... د. عبد المنعم سعيد
- الاقباط والقومية العربية ـ دراسة استطلاعية ـ (٢٣٦ ص ـ ٥ $) .... د. أبو سيف يوسف
- يوميات ووثائق الوحدة العربية ١٩٨٦ (٨٦٤ ص ـ ١٧,٥٠ $) .... مركز دراسات الوحدة العربية
- دراسات في الحركة التقدمية العربية (٣٨٠ ص ـ ٧,٥٠ $) .... ندوة فكرية
- العسكريون العرب وقضية الوحدة (٤٨٦ ص ـ ٩,٥٠ $) .... د. مجدي حماد
- البعد القومي للقضية الفلسطينية: فلسطين بين القومية العربية والوطنية الفلسطينية (سلسلة اطروحات الدكتوراه (١٠) (٢٧٦ ص ـ ٥,٥٠ $) .... د. ابراهيم ابراش
- صورة العرب في عقول الامريكيين (٢٦٨ ص ـ ٥,٥٠ $) .... د. ميخائيل سليمان
- السياسة الخارجية الفرنسية إزاء الوطن العربي منذ علم ١٩٦٧ (سلسلة اطروحات الدكتوراه (٩) (٢٦٨ ص ـ ٥,٥٠ $) .... د. بو قنطار الحسان